Proiect: CNCSIS PN-III-P4-PCE-2021-0282, contract nr. 47/2022

"Quasi Quantum Groups and Monoidal Categories"

Director: D. Bulacu

RAPORT ŞTIINŢIFIC, NOIEMBRIE 2022

Cercetarea pe temele propuse în proiect s-a concretizat în următoarele 6 lucrări, dintre care 3 sunt trimise spre publicare la reviste cu factor de impact ridicat (din zona Q2) iar 3 sunt în stadiu avansat de finalizare.

[1] D. Bulacu, B. Torrecillas, 1-Homology for coalgebras in Yetter-Drinfeld categories, trimis spre publicare.

[2] D. Bulacu, D. Popescu, B. Torrecillas, Double wreath quasi-Hopf algebras, în stadiu avansat de elaborare.

[3] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, L. Năstăsescu, Graded Frobenius rings, trimis spre publicare.

[4] M. Joiţa, Finsler locally C^*-modules, în stadiu avansat de elaborare.

[5] L. Liu, A. Makhlouf, C. Menini, F. Panaite, BiHom-NS-algebras, twisted Rota-Baxter operators and generalized Nijenhuis operators, trimis spre publicare.

[6] A. Makhlouf, D. Ștefan, Deformations of algebraic structures in monoidal categories, în curs de finalizare.

I. Descrierea ştiinţifică cu punerea în evidenţă a rezultatelor etapei anuale şi gradul de realizare a obiectivelor

Prin fiecare • de mai jos punem în evidenţă rezultatele obţinute în cadrul uneia dintre cele trei activităţi considerate în prima etapă (anul 2022) a proiectului.

• Rezultatele obţinute în lucrarea [1] sunt în strânsă legătură cu **obiectivele activităţii 1.1** din planul de realizare a proiectului pe anul 2022. Pe scurt, cu definirea şi studierea 1-ciclurilor pentru un grup quasi-cuantic şi legătura acestora cu grupurile quasi-cuantice ce admit o proiecţie slabă (la nivel de coalgebră). Acest articol face ca obiectivele asumate la activitatea 1.1 să fie realizate în procent de 100%. Mai jos prezentăm conţinutul ştiinţific al lucrării [1].

O primă problemă pe care o rezolvăm în [1], fundamentală de altfel, este definirea unui 1-ciclu pe C cu coeficienţi în H. Dificultatea acestei probleme constă în faptul că noţiunea de comodul coalgebră peste H nu are sens, fapt ce face imposibil de definit un 1-ciclu într-o categorie de coreprezentări ale unui grup quasi-cuantic (aşa cum se defineşte în cazul cuantic). Pentru a depăşi această problemă, am înlocuit categoria de coreprezentări cu una de module Yetter-Drinfeld peste H, deci în loc de comodul coalgebre am considerat Yetter-Drinfeld coalgebre (YD-coalgebre pe scurt). Dar, chiar şi aşa, a trebuit să găsim o cale naturală care să permită definirea noţiunii de 1-ciclu. Privind la cazul cuantic, 1-ciclurile apar în descrierea grupului de endomorfisme al unei coalgebre (în categoria de H-bimodule) de tip produs încrucişat, $C \rtimes H$. Studiind cazul quasi-cuantic, am ajuns la următorul rezultat.

Propoziţia 0.1. *Fie H un grup quasi-cuantic şi C, C' două YD-coalgebre. A da un morfism de coalgebre $F : C \rtimes H \to C' \rtimes H$ în categoria de H-bimodule ${}_H\mathcal{M}_H$ este echivalent cu a da două aplicaţii liniare $\Omega : C \to C'$ şi $\zeta : C \to H$ astfel încât Ω este morfism de coalgebre în ${}_H\mathcal{M}$, ζ satisface*

$$\zeta(h_1 \cdot c)h_2 = h\zeta(c),\ \varepsilon\zeta = \underline{\varepsilon}_C, \tag{0.1}$$

$$\Delta(\zeta(c)) = \zeta(y^1X^1 \cdot c_{\underline{1}})y^2Y^1(x^1X^2 \cdot c_{\underline{2}})_{[-1]}x^2X_1^3 \otimes \zeta(y_1^3Y^2 \cdot (x^1X^2 \cdot c_{\underline{2}})_{[0]})y_2^3Y^3x^3X_2^3, \tag{0.2}$$

pentru orice $c \in C$, $h \in H$, şi următoarele relaţii de compatibilitate au loc ($\forall\ c \in C$):

$$\zeta(y^1X^1\cdot c_{\underline{1}})y^2(X^2\cdot c_{\underline{2}})_{[-1]}X^3\otimes\Omega(y^3\cdot(X^2\cdot c_{\underline{2}})_{[0]}) = \Omega(X^1\cdot c_{\underline{1}})_{[-1]}\zeta(X^2\cdot c_{\underline{2}})X^3\otimes\Omega(X^1\cdot c_{\underline{1}})_{[0]}. \tag{0.3}$$

Astfel, în cazul quasi-cuantic, am introdus următoarea noţiune.

Definiţia 0.2. *Pentru C o YD-coalgebră, un 1-ciclu alternativ cu coeficienţi în H este o aplicaţie liniară $\zeta : C \to H$ ce satisface (0.1-0.2). Spaţiul 1-ciclurilor alternative pe C cu coeficienţi în H se notează cu $AZ_H^1(C, H)$.*

Am adăugat "alternativ" în definiţie fiindcă, în cazul quasi-cuantic, condiţia (0.1) nu este echivalentă cu H-liniaritatea lui ζ de la C la H_0, spaţiul H privit ca H-modul via acţiunea sa adjunctă la stânga; acest tip de liniaritate este esenţial în ceea ce priveşte inversabilitatea (în convoluţie) a unui 1-ciclu. Din acest motiv, am deformat un 1-ciclu ζ printr-un element special $p_R = p^1 \otimes p^2$ din $H \otimes H$ pentru a obţine o aplicaţie liniară $\overline{\zeta} : C \to H_0$. Mai mult, am arătat că $\zeta \mapsto \overline{\zeta}$ este o corespondenţă bijectivă. Astfel,

Definiţia 0.3. *Pentru C o coalgebră în ${}_H^H\mathcal{YD}$, un 1-ciclu pe C cu coeficienţi în H este un morfism $\overline{\zeta} : C \to H_0$ în ${}_H\mathcal{M}$ ce satisface $\varepsilon\overline{\zeta} = \underline{\varepsilon}_C$ şi*

$$\begin{aligned}\Delta(\overline{\zeta}(c)) \ &= \ y^1q^1\overline{\zeta}(z^1 \cdot c_{\underline{1}})S(q^2)z^2X^1(p^1 \cdot c_{\underline{2}})_{[-1]}p^2S(y_2^3Y^3z_2^3X^3)f^1 \\ &\otimes y^2Y^1\overline{\zeta}(z_1^3X^2 \cdot (p^1 \cdot c_{\underline{2}})_{[0]})S(y_1^3Y^2)f^2,\ \forall\ c \in C.\end{aligned} \tag{0.4}$$

Mai mult, am notat cu $Z_H^1(C, H_0)$ spaţiul 1-ciclurilor şi am arătat că

Propoziţia 0.4. *Dacă H este un grup quasi-cuantic, orice 1-ciclu $\overline{\zeta} : C \to H_0$ este inversabil (în raport cu produsul de convoluţie ce se defineşte natural pe $\mathrm{Hom}_H(C, H_0)$).*

Fiindcă $\zeta \mapsto \overline{\zeta}$ este bijectivă, avem o structură de monoid pe

$$\mathrm{Hom}_H^w(C, H) := \{\zeta : C \to H \mid \zeta(h_1 \cdot c)h_2 = h\zeta(c),\ \forall\ c \in C,\ h \in H\}.$$

Pentru $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathrm{Hom}_H^w(C, H)$, compoziţia lor $\zeta_1 \diamond \zeta_2 : C \to H$ este morfismul liniar definit de

$$(\zeta_1 \diamond \zeta_2)(c) = \zeta_1(X^1 \cdot c_1)\zeta_2(X^2 \cdot c_2)X^3,\ \forall\ c \in C. \tag{0.5}$$

S-a obţinut astfel următorul rezultat:

Propoziţia 0.5. *Pentru H o algebră quasi-Hopf şi C o YD-coalgebră, corespondenţa* $AZ^1_H(C,H) \ni \zeta \mapsto \overline{\zeta} \in Z^1_H(C,H_0)$ *respectă structurile de monoid* $(\mathrm{Hom}^w_H(C,H),\diamond)$ *şi* $(\mathrm{Hom}_H(C,H_0),*)$*. Prin urmare, un 1-ciclu alternativ este $\diamond$-inversabil.*

În continuare lucrarea studiază deformările printr-un 1-ciclu ale unei YD-coalgebre C, scopul nostru fiind dublu: să vedem cum putem introduce primul "grup" de omologie pentru o YD-coalgebră şi ce anume clasifică acesta (lucruri noi chiar şi în cazul cuantic). În acest fel am ajuns la două tipuri de deformări; ambele presupun păstrarea structurii de coalgebră a lui C în ${}_H\mathcal{M}$ şi deformarea doar a coacţiunii lui H pe C care-i conferă structura de YD-modul. În acest sens, pentru $\overline{\zeta}: C \to H_0$ H-liniară la stânga, cu $C^{\overline{\zeta}}$ am notat H-modulul C echipat cu noua H-coacţiune $\lambda^{\overline{\zeta}}_C : C \ni c \mapsto c^{\overline{\zeta}}_{[-1]} \otimes c^{\overline{\zeta}}_{[0]} \in H \otimes C$ dată, pentru orice $c \in C$, prin

$$\lambda^{\overline{\zeta}}_C(c) = q^1\overline{\zeta}(x^1X^1 \cdot c_{\underline{1}})S(q^2)x^2(X^2 \cdot c_{\underline{2}})_{[-1]}X^3 \otimes x^3 \cdot (X^2 \cdot c_{\underline{2}})_{[0]}. \tag{0.6}$$

Cu această notaţie, avem că

Propoziţia 0.6. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\overline{\zeta}$ este 1-ciclu;

(ii) $C^{\overline{\zeta}}$ este un obiect în ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Mai mult, dacă una dintre condiţiile de mai sus este satisfăcută atunci $\overline{\zeta}$ devine un morfism în ${}^H_H\mathcal{YD}$ dacă este considerat morfism de la $C^{\overline{\zeta}}$ la H_0.

Acum, observaţia cheie ce conduce la definirea primului "grup" de omologie este următoarea.

Lema 0.7. *Fie H o algebră quasi-Hopf, C o YD-coalgebră şi $\overline{\zeta} \in Z^1_H(C,H_0)$. Modulul Yetter-Drinfeld $C^{\overline{\zeta}}$ defined mai sus este un comodul drept peste C în ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Pentru H o algebră quasi-Hopf şi C o coalgebră în ${}^H_H\mathcal{YD}$, notăm cu $\mathrm{Com}^r_{{}^H_H\mathcal{YD}}(C,\underline{\Delta}_C)$ structurile de C-comodul drept ce se pot defini pe H-modul coalgebra C, în ${}^H_H\mathcal{YD}$, determinate de către comultiplicarea $\underline{\Delta}_C$ a coalgebrei C. Cu această definiţie, ultimul rezultat amintit ne-a ajutat să arătăm că

Propoziţia 0.8. *Pentru C o YD-coalgebră, corespondenţa*

$$Z^1_H(C,H_0) \ni \overline{\zeta} \mapsto \lambda^{\overline{\zeta}}_C \in \mathrm{Com}^r_{{}^H_H\mathcal{YD}}(C,\underline{\Delta}_C)$$

este bine definită şi bijectivă.

Astfel, numim două 1-cicluri alternative $\zeta_1,\zeta_2 \in AZ^1_H(C,H)$ omoloage (şi scriem $\zeta_1 \sim \zeta_2$) dacă există $\varsigma \in U_H(C^*)$ astfel încât

$$\varsigma(c_{\underline{1}})\zeta_2(c_{\underline{2}}) = \zeta_1(X^1 \cdot c_{\underline{1}})(X^2 \cdot c_{\underline{2}})_{[-1]}X^3\varsigma((X^2 \cdot c_{\underline{2}})_{[0]}), \tag{0.7}$$

pentru orice $c \in C$. De asemenea, spunem că două 1-cicluri sunt omoloage dacă şi numai dacă 1-ciclurile alternative asociate lor sunt omoloage. În fine, prin $\mathcal{AH}^1_H(C,H)$ (respectiv

$\mathcal{H}^1_H(C,H_0)$) notăm mulţimea claselor de echivalenţă a 1-ciclurilor alternative (respectiv a 1-ciclurilor) modulo relaţia de echivalenţă $\sim$. Faptul că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă se poate arăta direct sau folosind următorul rezultat din lucrarea [1].

Propoziţia 0.9. *Fie ζ_1, ζ_2 două 1-cicluri alternative şi $\underline{C^1}, \underline{C^2}$ cele două C-comodule în ${}^H_H\mathcal{YD}$ asociate lor. Atunci $\zeta_1 \sim \zeta_2$ dacă şi numai dacă $\underline{C^1}$ şi $\underline{C^2}$ sunt izomorfe ca C-comodule în ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Dacă notăm cu $\mathrm{Com}^r_{{}^H_H\mathcal{YD}}(C, \underline{\Delta}_C)/\approx$ mulţimea claselor de izomorfism ale C-comodulelor drepte în ${}^H_H\mathcal{YD}$ construite pe H-modul coalgebra C şi având structura de C-comodul dată de $\underline{\Delta}_C$, atunci unul dintre rezultatele centrale ale lucrării [1] afirmă următorul lucru.

Teorema 0.10. *Fie H o algebră quasi-Hopf şi C o YD-coalgebră. Există o corespondenţă bijectivă între $\mathrm{Com}^r_{{}^H_H\mathcal{YD}}(C, \underline{\Delta}_C)/\approx$, $\mathcal{AH}^1_H(C,H)$ şi $\mathcal{H}^1_H(C,H_0)$.*

Iniţial am crezut că deformările (de al doilea tip) pe care le vom explicita mai jos definesc "grupul" de 1-omologie al lui C. Nu este cazul, tipurile lor sunt date de anumite orbite şi ajută la o mai bună înţelegere a grupului de automorfime ale unei coalgebre în ${}_H\mathcal{M}_H$ de tip produs încrucişat. Mai exact, am obţinut următoarele rezultate.

Propoziţia 0.11. *Fie $\mathfrak{C}$ o YD-coalgebră şi $\zeta \in AZ^1_H(C,H)$. Notăm cu $\mathfrak{C}^{(\zeta)}$ H-modul coalgebra $\mathfrak{C}$ echipată cu noua H-coacţiune*

(0.8)

$$\lambda^{(\zeta)}_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \ni \mathfrak{c} \mapsto q^1_1\zeta(x^1y^1\cdot \mathfrak{c}_{\underline{1}})x^2y^2_1(z^1\cdot \mathfrak{c}_{\underline{21}})_{[-1]}z^2\overline{\zeta}^{-1}(\mathfrak{c}_{\underline{22}})S(q^2y^3z^3)\otimes q^1_2x^3y^2_2\cdot(z^1\cdot \mathfrak{c}_{\underline{21}})_{[0]} \in H\otimes \mathfrak{C};$$

$\overline{\zeta}$ este 1-ciclul asociat lui ζ iar $\overline{\zeta}^{-1}$ este inversul lui $\overline{\zeta}$ în grupul $(\mathrm{Hom}_H(C,H_0), *)$. Atunci $\mathfrak{C}^{(\zeta)}$ este o coalgebră în ${}^H_H\mathcal{YD}$.

O coalgebră C în ${}^H_H\mathcal{YD}$ realizează trivial coalgebra (în ${}_H\mathcal{M}_H$) produs încrucişat $C \rtimes H$. Condiţii când o altă YD-coalgebră o realizează sunt date de următoarea

Teorema 0.12. *Fie H un grup quasi-cuantic şi C o YD-coalgebră. Coalgebra $\mathfrak{C}$ din ${}^H_H\mathcal{YD}$ realizează aceeaşi H-bimodul coalgebră ca $(C, \underline{\varepsilon}_C\otimes \mathrm{Id}_H)$ dacă şi numai dacă există $\zeta \in AZ^1_H(\mathfrak{C},H)$ astfel încât $\mathfrak{C}^{(\zeta)}$ şi C sunt izomorfe ca YD-coalgebre.*

Mai mult, avem că

Corolarul 0.13. *Pentru C o YD-coalgebră şi $\zeta_1,\zeta_2 \in AZ^1_H(C,H)$, $C^{(\zeta_1)}$ şi $C^{(\zeta_2)}$ sunt coalgebre izomorfe în ${}^H_H\mathcal{YD}$ dacă şi numai dacă există $\Omega \in \mathrm{Aut}_H(C)$ astfel încât $\zeta := \zeta_2^{(-1)}\Omega \diamond \zeta_1 \in AZ^1_H(C,H)$ şi $(\Omega,\zeta) \in \mathrm{Aut}_{\overline{H}}(C \rtimes H)$, dacă şi numai dacă există $\Omega \in \mathrm{Aut}_H(C)$ astfel încât $\zeta_2^{(-1)}\Omega\diamond\zeta_1 \in AZ^1_H(C,H)$ şi $\Omega : C^{(\zeta_2^{(-1)}\Omega\diamond\zeta_1)} \to C$ este un izomorfism de YD-coalgebre.*

Pentru C o coalgebră în ${}^H_H\mathcal{YD}$, spunem că $\zeta \in AZ^1_H(C,H)$ este un 1-ciclu bun pentru C dacă $C^{(\zeta)} \cong C$ ca şi coalgebre în ${}^H_H\mathcal{YD}$. Altfel, spunem că ζ este un 1-ciclu rău pentru C. Notăm cu $\mathrm{AZ}^{1,g}_H(C,H)$ (respectiv $\mathrm{AZ}^{1,b}_H(C,H)$) mulţimea 1-ciclurilor bune (respectiv rele) pentru C.

Propoziţia 0.14. *Grupul* $\mathrm{Aut}_{\overline{H}}(C \rtimes H)$ *acţionează pe* $\mathrm{AZ}^1_H(C, H)$ *la stânga şi, în raport cu această acţiune, orbita* $\mathcal{O}_\zeta$ *a lui* $\zeta \in \mathrm{AZ}^1_H(C, H)$ *este determinată de copiile coalgebrei* $C^{(\zeta)}$ *din* ${}^H_H\mathcal{YD}$*:* $\mathcal{O}_\zeta = \{\zeta' \in \mathrm{AZ}^1_H(C, H) \mid C^{(\zeta')} \cong C^{(\zeta)}\}$*, unde* $\cong$ *semnifică faptul că* $C^{(\zeta')}$ *şi* $C^{(\zeta)}$ *sunt coalgebre izomorfe în* ${}^H_H\mathcal{YD}$*. Prin urmare, când* 1*-ciclu este trivial,* $\mathcal{O}_{\varepsilon_C 1_H} = \mathrm{AZ}^{1,g}_H(C, H)$*.*

În cazul finit, am putut număra tipurile deformărilor de speţa a doua.

Teorema 0.15. *Fie* H *o algebră quasi-Hopf şi* C *o coalgebră din* ${}^H_H\mathcal{YD}$*. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) $\mid \mathrm{AZ}^{1,g}_H(C, H) \mid\mid \mathrm{AutCoalg}_{{}^H_H\mathcal{YD}}(C) \mid=\mid \mathrm{Aut}_{\overline{H}}(C \rtimes H) \mid$*;*

(ii) $n_\zeta \mid \mathrm{AutCoalg}_{{}^H_H\mathcal{YD}}(C^{(\zeta)}) \mid=\mid \mathrm{Aut}_{\overline{H}}(C \rtimes H) \mid$*, pentru orice* $\zeta \in \mathrm{AZ}^{1,b}_H(C, H)$*, unde am notat* $n_\zeta :=\mid \mathcal{O}_\zeta \mid=\mid \{\zeta' \in \mathrm{AZ}^1_H(C, H) \mid C^{(\zeta')} \cong C^{(\zeta)}\} \mid$*;*

(iii) dacă $\mathrm{Aut}_{\overline{H}}(C \rtimes H)$ *şi* $\mathcal{AH}^1_H(C, H)$ *sunt mulţimi finite,* $\mathrm{AZ}^1_H(C, H)$ *este finită şi numărul* N *al tipurilor de coalgebră din* ${}^H_H\mathcal{YD}$ *de forma* $C^{(\zeta)}$*,* $\zeta \in AZ^1_H(C, H)$*, este finit şi egal cu*

$$N = 1 + \sum_{\widehat{\zeta} \in \mathcal{AH}^{1,b}_H(C,H)} \frac{1}{n_\zeta} |\widehat{\zeta}|. \tag{0.9}$$

Lucrarea [1] se încheie cu producerea unor exemple concrete de coalgebre în categorii Yetter-Drinfeld şi determinarea 1-ciclurilor corespunzătoare lor. Mai exact, folosind teorema de structură a coalgebrelor din ${}_H\mathcal{M}_H$, pentru grupurile quasi cuantice "fermion-simplectice" am asociat aşa numitele YD-coalgebre fermion-simplectice. Pentru cele din urmă am descris complet structura lor de coalgebră în ${}^H_H\mathcal{YD}$, le-am determinat "grupurile" lor de 1-omologie şi am arătat că orice 1-ciclu este bun. Structurile ce apar sunt greu de explicitat şi reprodus în acest raport, dar ele se găsesc în mod explicit în pdf-ul lucrării [1] pe care l-am anexat. Mai menţionăm că, lucrarea [1] a fost trimisă spre publicare recent şi că a fost prezentată în cadrul conferinţei "New trends in Hopf algebras and Monoidal categories" ce a avut loc în perioada 6-9 septembrie la Torino, Italia (a se vedea https://www.hopf-turin-22.it/speakers/bulacu).

• Pentru continuitate, vom pune în evidenţă acum rezultatele livrate în cazul **activităţii 1.3** din planul de realizare. Pe scurt, o să explicăm cum rezultatele lucrărilor [2, 5] fac ca obiectivele acestei activităţi să fi fost atinse în procent de 90% (în scurt timp acestea se vor realiza în procent de 100%, prin finalizarea lucrării [2] şi trimiterea ei spre publicare).

Lucrarea [2] face ca următoarele obiective din **activitatea 1.3** să fie realizate: descrierea unui qQG (grup quasi-cuantic) cu proiecţie slabă, definirea noţiunii de 2-cociclu pentru un qQG, studiul deformărilor printr-un 2-cociclu al unui qQG, totul însoţit de exemple concrete. Mai jos detaliem conţinutul ştiinţific al acestei lucrări.

Analog cu [1], primul lucru pe care-l clarificăm în [2] este noţiunea de 2-cociclu pentru un grup quasi-cuantic. La momentul actual nu există (personal nu credem că acest lucru este posibil în general) o astfel de definiţie care să permită o teorie a deformării ca în cazul cuantic. Ceea ce am reuşit în lucrarea [2] este să dezvoltăm o astfel de teorie pentru bimonoizi în categorii duoidale, fapt ce a permis dezvoltarea unei astfel de teorii pentru grupuri quasi-cuantice cu proiecţie slabă (exact ceea ce ne-am propus). Mai precis, am arătat mai întâi că

Propoziţia 0.16. *Pentru H o quasi-bialgebră, categoria de H-bimodule $\mathcal{C} = {}_H\mathcal{M}_H$ este duoidală.*

Putem deci considera bimonoizi în $\mathcal{C}$ iar aceştia se caracterizează astfel.

Corolarul 0.17. *Fie H o quasi-bialgebră. A da un bimonoid în categoria duoidală $\mathcal{C} = {}_H\mathcal{M}_H$ este echivalent cu a da o pereche (A, i) formată dintr-o quasi-bialgebră A şi un morfism de quasi-bialgebre $i : H \to A$.*

Înainte de a studia deformările produse de 2-cocicluri, avem nevoie mai întâi de structura unui grup quasi-cuantic cu proiecţie slabă. În acest sens, am obţinut două descrieri. Prima este dată cu ajutorul algebrelor coroană şi al coalgebrelor op-coroană: unei coroane R peste k-algebra H în categoria de spaţii vectoriale putem să-i asociem o algebră asociativă $R\#_\gamma H$, iar unei op-coroane R peste coalgebra H în $\mathcal{C} = {}_H\mathcal{M}_H$ putem să-i asociem H-bimodul coalgebra $R \rtimes^\delta H$. Ambele structuri sunt definite pe spaţiul vectorial $R \otimes H$, deci are sens să studiem când acestea produc o structură de grup quasi-cuantic, caz în care spunem că avem un grup quasi-cuantic dublu-coroană (notăm acest obiect cu $R \times_\gamma^\delta H$. Surprinzător, dar extrem de util, este că

Lema 0.18. *Dacă $R \times_\gamma^\delta H$ este un grup quasi-cuantic dublu-coroană atunci structura de op-coroană a lui C este complet determinată de o H-coacţiune $\lambda_R : R \to H \otimes R$ pe R care face ca R să devină un modul stâng Yetter-Drinfeld peste H.*

Corolarul 0.19. *Dacă $R \times_\gamma^\delta H$ este un grup quasi-cuantic dublu-coroană atunci R este o coalgebră în ${}_H^H\mathcal{Y}D$ şi $R \rtimes^\delta H = R \rtimes H$ ca şi coalgebre în ${}_H\mathcal{M}_H$.*

Propoziţia 0.20. *Fie H un grup quasi-cuantic, R o coalgebră în ${}_H^H\mathcal{Y}D$ şi $R \rtimes H$ coalgebra produs încrucişat a lui R şi H. Pentru $1_R \in R$ definim $\iota : H \ni h \mapsto 1_R \rtimes h \in R \rtimes H$ şi presupunem că $R \rtimes H$ admite o structură de grup quasi-cuantic astfel încât ι este morfism de quasi-bialgebre iar structura de H-bimodul pe $R \rtimes H$ indusă de ι coincide cu cea iniţială de pe $R \rtimes H$. Atunci structura de grup quasi-cuantic presupusă pe $R \rtimes H$ este de tip dublu-coroană.*

Pasul următor a constat în a descrie structura de algebră a unei duble-coroane. Aici am arătat că ea este complet determinată de o multiplicare m_R pe R şi de un 1-ciclu al YD-coalgebrei $R\widetilde{\otimes}R$ ($R\widetilde{\otimes}R$ este produsul tensorial de coalgebre dintre R şi R, în categoria ${}_H^H\mathcal{Y}D$) ce sunt compatibile. De notat este că m_R nu este asociativă (monoidal sau clasic) şi nici H-coliniară (deci nu este morfism în ${}_H^H\mathcal{Y}D$); în schimb, m_R are o asociativitate controlată de un izomorfism definit de ζ iar m_R devine morfism în ${}_H^H\mathcal{Y}D$ dacă este privită de la $(R\widetilde{\otimes}R)^{(\zeta)}$ la R (aici se poate observa importanţa teoriei deformărilor din lucrarea [1]). Altfel spus, R este o pre-bialgebră în ${}_H^H\mathcal{YD}$ cu un 1-ciclu (sunt multe structuri ce intervin, greu de reprodus aici; a se vedea Propoziţiile 3.10, 3.11 şi Teorema 3.13 din pdf-ul ataşat al lucrării). Acum, dacă ne întoarcem la structura unui grup quasi-cuantic A cu proiecţie slabă $\pi : A \to H$, din teorema de structură a unei H-bimodul coalgebre deducem că structura sa de coalgebră este de tip produs încrucişat $R \rtimes\!\!\!\ltimes H$, în sensul că exsită o coalgebră R în ${}_H^H\mathcal{YD}$ şi un izomorfism $\chi : R \rtimes\!\!\!\ltimes H \to A$. Mai mult, avem că

Propoziţia 0.21. *Unica structră de quasi-bialgebră pe $R \rtimes\!\!\!\ltimes H$ ce face ca χ să devină un izomofism de quasi-bialgebre este de tip dublu-coroană, deci este complet determinată de o pre-bialgebră cu* 1*-ciclu din ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

În continuare, se determină explicit structura de pre-bialgebră cu 1-ciclu a lui R din ${}_H^H\mathcal{YD}$; toate aceste structuri sunt definite de proiecţia slabă şi de proiecţia canonică a lui A pe R. De asemenea, studiul existenţei antipodului (şi, deci, noţiunea de pre-algebră Hopf cu 1-ciclu în ${}_H^H\mathcal{YD}$) este tratat cu atenţie; într-o direcţie (atunci când avem proiecţie slabă) lucrurile sunt clare: antipodul lui $R \rtimes\!\!\!\ltimes H$ este definit de un endomorfism H-liniar S_R al lui R ce satisface anumite proprietăti (similare cu cele ale antipodului unui grup cuantic braided) însa pentru reciprocă avem doar o parte din calcule făcute (lucrarea este în stadiu avansat de elaborare). Cu aceste lucruri clarificate, putem să introducem 2-cocicluri σ pentru un grup quasi-cuantic A cu proiecţie slabă. Definiţia lor este similară cu cea din cazul cuantic, cu două excepţii: σ este H-balansată şi H-bilinară. Privind pe A ca un H-bimonoid în ${}_H\mathcal{M}_H$, putem considerea bimonoidul A^σ ce se obţne din deformarea lui A prin σ. Am arătat că A^σ este tot un grup quasi-cuantic cu proiecţie slabă, deci caracterizat de o pre-algebră Hopf R cu 1-ciclu ζ din ${}_H^H\mathcal{YD}$; aici, rezultatele centrale pe care le-am obţinut sunt următoarele.

Lema 0.22. *Pentru (A, π, i) un bimonoid u-coaugumentat din ${}_H\mathcal{M}_H$ şi $R = \overline{A^{\mathrm{co}(H)}}$, un morfism H-biliniar $\sigma : A \otimes_H A \to k$ este unic determinat de un morfism H-liniar la stânga $\vartheta : R \otimes R \to k$.*

Lema 0.23. *Corespondenţa $\Xi : \sigma \mapsto \vartheta$ definită de lema anterioară este un izomorfism de monoizi de la ${}_H\mathrm{Hom}_H(A \otimes_H A, k)$ la $\mathrm{Hom}_H(R\widetilde{\otimes}R, k)$. Deci, prin această corespondenţă, σ este inversabil în convoluţie dacă şi numai dacă ϑ este.*

Propoziţia 0.24. *Fie H un grup quasi-cuantic, $i : H \to A$ un bimonoid u-coaugumentat din ${}_H\mathcal{M}_H$ şi $R = A^{\mathrm{co}(H)}$. A da un* 2*-cociclu unitar (inversabil) pentru A este echivalent cu a da un morfism H-liniar $\vartheta : R\widetilde{\otimes}R \to H$ astfel încât $\vartheta(i(b)\widetilde{\otimes}r) = \epsilon(r) = \vartheta(r\widetilde{\otimes}i(\underline{)})$ şi, pentru orice $r, s, \mathsf{t} \in R$,*

$$
\begin{aligned}
&\vartheta((s\widetilde{\otimes}\mathsf{t})_{\underline{1}})\vartheta(r\widetilde{\otimes}m_R((s\widetilde{\otimes}\mathsf{t})_{\underline{2}}))\\
&\quad = \vartheta((v^1 \triangleright_i r\widetilde{\otimes}v^2 \triangleright_i s)_{\underline{1}})\vartheta(Y^1 \triangleright_i m_R((v^1 \triangleright_i r\widetilde{\otimes}v^2 \triangleright_i s)_{\underline{21}})\widetilde{\otimes}\zeta(Y^2 \triangleright_i (v^1 \triangleright_i r\widetilde{\otimes}v^2 \triangleright_i s)_{\underline{22}})Y^3v^3 \triangleright_i \mathsf{t}).
\end{aligned}
$$

Aceste rezultate ne-au permis să obţinem rezultatul dorit: deformările printr-un 2-cociclu ale unui grup quasi-cuantic cu proiecţie slabă sunt de tip dublu-coroană, deci caracterizate de (un fel de) 2-coclii unitari şi inversabili ai unei pre-algebre Hopf cu 1-ciclu dintr-o categorie de module Yetter-Drinfeld. Ca şi exemple, am completat structura unei coalgebre fermion-simplectice până la una de pre-bialgebră cu 1-ciclu dintr-o anumită categorie de module Yetter-Drinfeld. Urmează să includem în curând în lucrare pre-antipodul lor, ca şi calculul tuturor 2-cociclurilor ce se pot considera pentru anumite grupuri quasi-cuantice de dimensiune 8 şi descrierile deformărilor definite de aceştia. Iar lista de exemple poate continua, din ce am putut constata, studiind literatura de specialitate, majoritatea grupurilor quasi-cuantice existente sunt de tip dublu-coroană, deci au descrierea pe care am obţinut-o în această lucrare. Rezultatele obţinute în lucrarea [2] urmează să fie prezentate în cadrul conferinţei UMA-RMA, Ronda (Spain), 12-16/12/2022 (http://www.rsmeuma2022.uma.es/index.php/programa-general/).

Tot în cadrul **activităţii 1.3**, ne-am propus să studiem operatori de tip Rota-Baxter şi generalizari ale algebrelor dendriforme, obiecte ce sunt în legatură cu algebrele amestecate şi care pot produce exemple de grupuri quasi-cuantice cu proiectie slabă sau deformari printr-un 2-cociclu ale acestora. Prin trimiterea spre publicare a lucrării [5], acest obiectiv a fost realizat în procent de 100%. În continuare vom detalia conţinutul ştiinţific al acestei lucrări.

Lucrarea [5] studiază clase de algebre ce generalizează algebrele dendriforme, precum şi operatori de tip Rota-Baxter şi Nijenhuis ce corespund în mod firesc acestor clase. Într-o lucrare mai veche (G. Graziani, A. Makhlouf, C. Menini, F. Panaite, *BiHom-associative algebras, BiHom-Lie algebras and BiHom-bialgebras*, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. (SIGMA) **11** (2015), 086) a fost introdus următorul concept:

Definiţia 0.25. *O algebră BiHom-asociativă este un 4-tuplu* (A, μ, α, β)*, unde* A *este un spaţiu linear,* $\alpha : A \to A$*,* $\beta : A \to A$ *şi* $\mu : A \otimes A \to A$ *sunt aplicaţii liniare, cu notaţia* $\mu(x \otimes y) = xy$*, astfel încât, pentru* $x, y, z \in A$*, avem* $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ *şi*

$$\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) \text{ şi } \beta(xy) = \beta(x)\beta(y), \quad \textit{(multiplicativitate)} \tag{0.10}$$

$$\alpha(x)(yz) = (xy)\beta(z). \quad \textit{(BiHom-asociativitate)} \tag{0.11}$$

Aplicaţiile α şi β sunt numite aplicaţiile de structură ale lui A. Acest concept a apărut ca o generalizare a conceptului anterior (introdus de Makhlouf şi Silvestrov) de algebră Hom-asociativă, din anumite motive legate de categorii monoidale: o algebră BiHom-asociativă este oarecum similară cu o algebră într-o categorie monoidală cu asociatori netriviali (aşa cum sunt, de exemplu, algebrele în categorii de module asociate unor algebre quasi-Hopf), iar în situaţia când aplicaţiile de structură sunt bijective, exact acesta este cazul. În ultimii ani a început să fie dezvoltată o teorie a acestor algebre (Bi)Hom-asociative, în diverse direcţii, generalizând proprietăţi ale algebrelor asociative. În lucrarea [5] este introdus următorul concept:

Definiţia 0.26. *O BiHom-NS-algebră este un 6-tuplu* $(A, \prec, \succ, \vee, \alpha, \beta)$ *unde* A *este un spaţiu liniar înzestrat cu aplicaţii liniare* $\prec, \succ, \vee : A \otimes A \to A$ *şi* $\alpha, \beta : A \to A$ *astfet încât (pentru* $x, y, z \in A$ *şi notaţia* $x * y = x \prec y + x \succ y + x \vee y$*) avem* $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ *şi*

$$\alpha(x \prec y) = \alpha(x) \prec \alpha(y), \alpha(x \succ y) = \alpha(x) \succ \alpha(y), \alpha(x \vee y) = \alpha(x) \vee \alpha(y),$$

$$\beta(x \prec y) = \beta(x) \prec \beta(y), \beta(x \succ y) = \beta(x) \succ \beta(y), \beta(x \vee y) = \beta(x) \vee \beta(y),$$

$$(x \prec y) \prec \beta(z) = \alpha(x) \prec (y * z),$$

$$(x \succ y) \prec \beta(z) = \alpha(x) \succ (y \prec z),$$

$$(x * y) \succ \beta(z) = \alpha(x) \succ (y \succ z),$$

$$(x \vee y) \prec \beta(z) + (x * y) \vee \beta(z) = \alpha(x) \succ (y \vee z) + \alpha(x) \vee (y * z).$$

Acest concept este un analog BiHom al conceptului de NS-algebră introdus de către Leroux şi Uchino, care la rândul lui generalizează conceptul de algebră dendriformă al lui Loday, un concept important de care sunt legaţi operatorii Rota-Baxter şi deci aceste concepte sunt legate de algebrele amestecate şi, implicit, de algebrele Hopf braided tensoriale. Analogul BiHom al algebrelor dendriforme (ca şi al algebrelor tridendriforme ale lui Loday-Ronco) a fost deja introdus într-o lucrare anterioară (L. Liu, A. Makhlouf, C. Menini, F. Panaite, *Rota-Baxter operators on BiHom-associative algebras and related structures*, Colloq. Math. **161** (2020), 263–294), iar BiHom-NS-algebrele conţin toate aceste concepte drept cazuri particulare. Proprietatea principală a algebrelor BiHom-asociative este următoarea:

Propoziţia 0.27. *Fie* $(A, \prec, \succ, \vee, \alpha, \beta)$ *un 6-tuplu unde* A *este un spaţiu liniar iar* $\prec, \succ, \vee : A \otimes A \to A$ *şi* $\alpha, \beta : A \to A$ *sunt aplicaţii liniare astfel încât* α *şi* β *sunt multiplicative în raport cu* $\prec$, $\succ$ *şi* $\vee$*. Definim o nouă multiplicare pe* A *prin* $x * y = x \prec y + x \succ y + x \vee y$*, pentru* $x, y \in A$*. Atunci* $(A, \prec, \succ, \vee, \alpha, \beta)$ *este o BiHom-NS-algebră dacă şi numai dacă* $(A, *, \alpha, \beta)$ *este o algebră BiHom-asociativă, notată* A_{bhas}*, iar* $(A, \succ, \prec, \alpha, \beta)$ *este un* A_{bhas}*-bimodul.*

Exemple de BiHom-NS-algebre se pot obţine din NS-algebre clasice printr-un procedeu numit "Yau twisting":

Propoziţia 0.28. *Fie* $(A, \prec, \succ, \vee)$ *o NS-algebră iar* $\alpha, \beta : A \to A$ *două morfisme de NS-algebre care comută. Definim* $\prec_{(\alpha,\beta)}, \succ_{(\alpha,\beta)}, \vee_{(\alpha,\beta)} : A \otimes A \to A$ *prin*

$$x \prec_{(\alpha,\beta)} y = \alpha(x) \prec \beta(y), \qquad x \succ_{(\alpha,\beta)} y = \alpha(x) \succ \beta(y), \qquad x \vee_{(\alpha,\beta)} y = \alpha(x) \vee \beta(y),$$

pentru $x, y \in A$*. Atunci* $A_{(\alpha,\beta)} := (A, \prec_{(\alpha,\beta)}, \succ_{(\alpha,\beta)}, \vee_{(\alpha,\beta)}, \alpha, \beta)$ *este o BiHom-NS-algebră.*

Operatori Rota-Baxter răsuciţi au fost definiţi în cazul asociativ de Uchino, iar definiţia poate fi extinsă, cu modificări minore, la cazul BiHom-asociativ (coomologia Hochschild pentru algebre BiHom-asociative a fost definită foarte recent de către A. Das). Aceşti operatori generează exemple de algebre BiHom-asociative:

Propoziţia 0.29. *Fie* $(A, \mu_A, \alpha_A, \beta_A)$ *o algebră BiHom-asociativă, fie* $(M, l, r, \alpha_M, \beta_M)$ *un* A*-bimodul, fie* $H : A \otimes A \to M$ *un 2-cociclu Hochschild şi fie* $\pi : M \to A$ *un operator Rota-Baxter* H*-răsucit. Definim operaţiile următoare pe* A*:* $m \prec n = m \cdot \pi(n)$*,* $m \succ n = \pi(m) \cdot n$*,* $m \vee n = H(\pi(m), \pi(n))$*. Atunci* $(M, \prec, \succ, \vee, \alpha_M, \beta_M)$ *este o BiHom-NS-algebră.*

Operatorii Nijenhuis, apăruţi iniţial în geometria diferenţială, au fost consideraţi pentru cazul algebrelor asociative pentru prima dată (cu motivaţii ce ţineau de fizica teoretică) în lucrarea J. F. Cariñena, J. Grabowski, G. Marmo, *Quantum bi-Hamiltonian systems*, Internat. J. Modern Phys. A **15** (2000), 4797–4810. Leroux a arătat că un operator Nijenhuis pe o algebră asociativă generează o NS-algebră (aceasta a fost motivaţia sa principală de a introduce conceptul de NS-algebră). Operatori Nijenhuis (în sens obişnuit) pot fi consideraţi pentru orice clasă de algebre; în particular, se poate arăta că un operator Nijenhuis pe o algebră BiHom-asociativă ce comută cu aplicaţiile de structură generează o BiHom-NS-algebră. Problema este că acest context nu este suficient de general pentru a cuprinde drept caz particular o clasă naturală de exemple aparută într-o lucrare anterioară (L. Liu, A. Makhlouf, C. Menini, F. Panaite, *Tensor products and perturbations of BiHom-Novikov-Poisson algebras*, J. Geom. Phys. **161** (2021), 104026). Am fost astfel conduşi la a considera un concept mai general de operatori Nijenhuis şi a demonstra că şi aceştia conduc la BiHom-NS-algebre:

Teorema 0.30. *Fie* (A, μ, α, β) *o algebră BiHom-asociativă, fie* $\sigma, \gamma, \tau, \delta : A \to A$ *aplicaţii liniare care sunt multiplicative în raport cu* μ *şi astfel încât oricare două dintre aplicaţiile* $\alpha, \beta, \sigma, \gamma, \tau, \delta$ *comută şi fie* $N : A \to A$ *o aplicaţie liniară satisfăcând condiţiile (pentru* $x, y \in A$*):*

$$\begin{aligned}
&\alpha\sigma\gamma N = N\alpha\sigma\gamma, \qquad \beta\tau\delta N = N\beta\tau\delta,\\
&\sigma\gamma N(x)\tau\delta N(y) = N(\sigma\gamma(x)\delta N(y) + \gamma N(x)\tau\delta(y) - N(\gamma(x)\delta(y))),\\
&\alpha\sigma\gamma^2 N(x)\tau\delta N(y) = N(\alpha\sigma\gamma^2(x)\delta N(y) + \alpha\gamma^2 N(x)\tau\delta(y) - N(\alpha\gamma^2(x)\delta(y))),\\
&\sigma\gamma N(x)\beta\tau\delta^2 N(y) = N(\sigma\gamma(x)\beta\delta^2 N(y) + \gamma N(x)\beta\tau\delta^2(y) - N(\gamma(x)\beta\delta^2(y)))
\end{aligned}$$

(numim un astfel de N *operator Nijenhuis generalizat). Definim operaţiile pe* A*:*

$$x \prec y = \sigma\gamma(x)\delta N(y), \qquad x \succ y = \gamma N(x)\tau\delta(y), \qquad x \vee y = -N(\gamma(x)\delta(y)),$$

pentru $x, y \in A$*. Atunci* $(A, \prec, \succ, \vee, \alpha\sigma\gamma, \beta\tau\delta)$ *este o BiHom-NS-algebră.*

Aşa cum am menţionat, lucrarea [5] a fost trimisă spre publicare. Mai mult, rezultatele din acest articol au fost prezentate (online) în cadrul a două conferinţe internaţionale, ambele cu titlul "Generalized Rota-Baxter and Nijenhuis operators":

"International Workshop on Hopf algebras", Zhejiang Normal University, Jinhua (China), July 2022 şi

”Hopf algebras, monoidal categories and related topics”, IMAR Bucharest (Romania), July 2022 (https://hopfconferencebuch.wixsite.com/website).

Ultimul obiectiv al **activităţii 1.3** se referă la **iniţierea** unui studiu privitor la legătura dintre perechile aproape în dualitate din categoriile de module Yetter-Drinfeld şi 2-cociclurile în anumite categorii braided. Acest studiu a fost iniţiat, în sensul că am definit perechile aproape în dualitate din categorii de module Yetter-Drinfeld şi am descris, într-un caz particular, structura unui 2-cociclu pe un grup quasi-cuantic de tip biprodus (caz particular la grup quasi-cuantic cu proiecţie slabă). Putem spune că acest obiectiv s-a realizat în procent de 100%.

• Ne referim acum la rezultatele livrate în cazul **activităţii 1.2** din planul de realizare. Primul obiectiv, calculul algebrei tensoriale asociată unui spaţiu vectorial V privit ca un modul Yetter-Drinfeld peste o algebră grupală deformată printr-un 3-cociclu al unui anumit grup abelian, a fost realizat în procent de 100%. Mai mult, pentru un grup quasi-cuantic H am descris algebrele Hopf braided de dimensiune 2 din categoria de module Yetter-Drinfeld peste H; de asemenea, am produs exemple noi de grupuri quasi-cuantice considerând H definită de anumite grupuri ciclice si anumiţi 3-cocilii asociaţi lor. Am iniţiat aici şi calculul algebrelor tensoriale. Toate aceste rezultate premerg obiective din anii următori, deci vor fi incluse în lucrări ce se vor trimite spre publicare în 2023 sau 2024.

Un alt obiectiv **menţionat la activitatea 1.2** din planul de realizare este definirea unor clase de algebre Hopf braided tensoriale din grupuri quasi-cuantice ce nu sunt doar spaţii vectoriale; mai exact sunt algebre Frobenius în categorii de coreprezentări, iar pentru aceast lucru o teoremă de structură pentru o astfel de algebră este esenţială. Această problemă este soluţionată în lucrarea [3] al cărei conţinut o să-l detaliem în continuare. Menţionăm că, prin trimiterea spre publicare a lucrării [3], acest obiectiv al **activităţii 1.2** a fost realizat în procent de 100%.

Avându-şi originea în lucrările lui Frobenius privind reprezentările de grupuri, algebrele Frobenius şi algebrele quasi-Frobenius au devenit obiecte de mare interes după studiile remarcabile făcute de Brauer, Nesbitt şi Nakayama în anii 1940. Interesul iniţial a fost de natură algebrică, dar algebrele Frobenius au apărut, uneori neaşteptat, în topologie, geometria diferenţială, teoria nodurilor, algebra omologică, teoria topologică a câmpului cuantic, algebre Hopf, grupuri cuantice, etc. Un pas important către înţelegerea algebrelor Frobenius din perspectiva teoriei inelelor a fost introducerea şi studiul inelelor Frobenius şi al inelelor quasi-Frobenius. Există anumite algebre Frobenius care sunt echipate cu o structură suplimentară care apare în mod natural, de exemplu algebrele Frobenius care au şi o graduare. Având ca sursă de inspiraţie caracterizarea algebrelor Frobenius dată de L. Abrams, pot fi definite algebre Frobenius într-o categorie monoidală arbitrară. Astfel, o algebră A într-o astfel de categorie este Frobenius dacă are şi o structură de coalgebră pentru care comultiplicarea este morfism de A-bimodule. În particular, putem considera algebre Frobenius în categoria monoidală a spaţiilor vectoriale G-graduate, unde G este un grup. Acestea sunt numite algebre gr-Frobenius, iar studiul lor, precum şi al unei versiuni modificate printr-o σ-suspensie, a fost iniţiat într-o lucrarea precedentă a autorilor. Astfel de obiecte apar natural în geometria necomutativă, unde anumite algebre graduate conexe sunt n-gr Frobenius pentru un număr natural n. De exemplu, dacă A este o algebră graduată conexă noetheriană care este regulată Artin-Schelter şi Koszul, de dimensiune globală n, atunci duala Koszul $A^!$ a lui A este n-gr Frobenius. Structura şi teoria reprezentării anumitor algebre gr-Frobenius pot fi folosite la clasificarea anumitor algebre din geometria necomutativă şi la demonstrarea unei corespondenţe de tip Bernstein-Gelfand în cazul necomutativ. Având ca obiectiv înţelegerea algebrelor gr-Frobenius, scopul nostru iniţial a fost de a introduce şi studia algebrele gr-quasi-Frobenius. Pe măsură ce am dezvoltat teoria, am realizat că este util să studiem versiunile acestor concepte din teoria inelelor. Astfel, am introdus inelele gr-quasi-Frobenius, inelele gr-Frobenius şi versiunile lor via o suspensie, inelele σ-gr-Frobenius, şi am studiat reprezentările lor. Aşa cum era de aşteptat, o algebră finit dimensională este σ-gr-Frobenius dacă şi numai dacă este σ-gr-Frobenius ca inel. Unele rezultate privind inelele graduate şi modulele graduate pot lăsa impresia că teoria graduată este o simplă extindere a celei negraduate. Aceasta este adevărat până la un punct, iar motivul este că atât categoria de module peste un inel, cât şi categoria de module graduate peste un inel graduat sunt categorii Grothendieck. Cu toate acestea, categoria de module graduate este echipată suplimentar cu o clasă de izomorfisme de categorii, suspensiile prin elemente ale grupului care defineşte graduarea, iar aceasta adaugă un nou nivel de complexitate la structura categoriei şi a obiectelor sale. În sprijinul acestei idei menţionăm teoria grupului Grothendieck în cazul unei algebre graduate după un grup abelian. În Secţiunea 2 a lucrării discutăm structura inelului graduat $A = M_n(\Delta)(g_1, \ldots, g_n)$ asociat unui corp graduat Δ şi unor elemente $g_1, \ldots, g_n$ ale grupului. A este gr-simplu şi gr-Artinian, prin urmare orice două A-module graduate gr-simple sunt izomorfe până la o suspensie. Numărăm tipurile de izomorfism de A-module gr-simple şi stabilim câte dintre ele se scufundă în A. În Secţiunea 3 considerăm versiuni graduate ale radicalului Jacobson şi ale radicalului singular şi demonstrăm proprietăţi ale acestora legate de proprietăţi de finitudine şi de injectivitate. Prezentăm o demonstraţie nouă a teoremei de structură a inelelor gr-simple gr-Artiniene la stânga, care spune că orice astfel de inel este izomorf cu $M_n(\Delta)(g_1, \ldots, g_n)$ pentru anumiţi n, Δ şi $g_1, \ldots, g_n$. În Secţiunea 4 considerăm o descompunere a unui inel gr-Artinian la stânga ca sumă directă de subobiecte indecompozabile şi obţinem consecinţe privind modulele simple graduate când factorizăm prin radicalul Jacobson graduat. Ca o aplicaţie, obţinem o teoremă de structură pentru obiectele proiective din categoria de module graduate asociată. În Secţiunea 5 definim inelele gr-quasi-Frobenius prin mai multe caracterizări echivalente. Rezultatul principal este:

Teorema 0.31. *Fie R un inel graduat după grupul G. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

(1) *R este gr-Artinian şi satisface condiţia dublului anulator pentru ideale graduate la dreapta, adică $\mathrm{ann}_r(\mathrm{ann}_\ell A) = A$ pentru orice ideal drept graduat A al lui R, şi pentru ideale graduate stângi, adică $\mathrm{ann}_\ell(\mathrm{ann}_r U) = U$ pentru orice ideal stâng graduat U al lui R.*

(2) *R este gr-Noetherian la stânga şi satisface condiţia dublului anulator pentru ideale graduate drepte şi pentru ideale graduate stângi.*

(3) *R este gr-Noetherian la stânga şi gr-injectiv la stânga.*

(4) *R este gr-Noetherian la dreapta şi gr-injectiv la stânga.*

Un inel graduat care verifică aceste proprietăţi echivalente se numeşte gr-quasi-Frobenius. Pentru un inel graduat R de suport finit, arătăm că R este gr-quasi-Frobenius dacă şi numai dacă este quasi-Frobenius. În Secţiunea 6 studiem mai multe proprietăţi ale inelelor gr-quasi-Frobenius. Printre altele, asociem unui astfel de inel o versiune a permutării Nakayama. Astfel, unui inel gr-quasi-Frobenius îi asociem:

(i) un număr natural t, numărul de tipuri izo-shift de module principale graduate stângi; alegem un sistem de reprezentanţi $P_1, \ldots, P_t$ pentru aceste tipuri, astfel încât $P_1, \ldots, P_t$ se scufundă în R. Dacă $S_i = P_i/J^{\mathrm{gr}}(R)P_i$ pentru $1 \leq i \leq t$, ştim că $S_1, \ldots, S_t$ sunt izo-shift tipurile de R-module gr-simple.

(ii) numere naturale $n_1, \ldots, n_t$, indicând multiplicităţile lui $P_1, \ldots, P_t$ într-o descompunere a lui R.

(iii) o mulţime $g_{i1}, \ldots, g_{in_i}$ de elemente din G, astfel încât componenta izo-shift-tipică a lui R de tip P_i este $P_i(g_{i1}) \oplus \ldots \oplus P_i(g_{in_i})$.

(iv) o permutare $\pi \in S(\{1, \ldots, t\})$, şi nişte elemente $\sigma_1, \ldots, \sigma_t \in G$ astfel încât $\mathrm{soc}(P_i) \simeq S_{\pi(i)}(\sigma_i)$ pentru orice $1 \leq i \leq t$. Acestea ne permit să definim în Secţiunea 7 inelele gr-Frobenius, în fapt a unei versiuni extinse a lor, inelele σ-gr-Frobenius şi să dăm caracterizări echivalente ale lor. Rezultatul în acest sens este:

Teorema 0.32. *Fie R un inel graduat care este gr-Artinian şi fie $\sigma \in G$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

(1) *R este gr-quasi-Frobenius şi $\mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}(R)(\sigma) \simeq R/J^{\mathrm{gr}}(R)$ în $R-gr$.*

(2) *R este gr-quasi-Frobenius şi $(\sigma)\mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}(R) \simeq R/J^{\mathrm{gr}}(R)$ în $gr-R$.*

(3) *R este gr-quasi-Frobenius şi pentru orice $1 \leq i \leq t$ avem $n_i = n_{\pi(i)}$, şi şirul de clase la stânga $\sigma g_{i1}\sigma_i\Sigma(S_{\pi(i)}), \ldots, \sigma g_{in_i}\sigma_i\Sigma(S_{\pi(i)})$ este o permutare a lui $g_{\pi(i)1}\Sigma(S_{\pi(i)}), \ldots, g_{\pi(i)n_i}\Sigma(S_{\pi(i)})$.*

(4) *$\mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}_\ell(R)(\sigma) \simeq R/J^{\mathrm{gr}}(R)$ în $R-gr$ şi $(\sigma)\mathrm{soc}^{\mathrm{gr}}_r(R) \simeq R/J^{\mathrm{gr}}(R)$ în $gr-R$.*

(5) *R este gr-quasi-Frobenius şi $(R/J^{\mathrm{gr}}(R))\hat{}(\sigma) \simeq R/J^{\mathrm{gr}}(R)$ în $R-gr$ (unde $R/J^{\mathrm{gr}}(R)$ este privit ca un R-modul graduat drept în membrul stâng al egalităţii, şi ca un R-modul graduat stâng în membrul drept).*

(6) *R este gr-quasi-Frobenius şi $(\sigma)(R/J^{\mathrm{gr}}(R))\hat{} \simeq R/J^{\mathrm{gr}}(R)$ în $gr-R$ (unde $R/J^{\mathrm{gr}}(R)$ este privit ca un R-modul graduat stâng în membrul stâng al egalităţii, şi ca un R-modul graduat drept în membrul drept).*

Un inel graduat R se numeşte σ-gr-Frobenius dacă verifică condiţiile echivalente din teorema precedentă. Demonstrăm mai multe proprietăţi de bază privind inelele gr-Frobenius, printre care aceea că un inel gr-semisimplu este gr-Frobenius. Un rezultat central al lucrării este următoarea teoremă de structură.

Teorema 0.33. *Fie R un inel gr-Artinian şi $\sigma \in G$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*
(1) *R este σ-gr-Frobenius.*
(2) *R este σ-fidel la stânga şi la dreapta, $\mathrm{soc}({}_{R_\varepsilon}R_\sigma) \simeq R_\varepsilon/J(R_\varepsilon)$ ca R_ε-module stângi, şi $\mathrm{soc}((R_\sigma)_{R_\varepsilon}) \simeq R_\varepsilon/J(R_\varepsilon)$ ca R_ε-module drepte.*

Ultimul obiectiv al **activităţii 1.2** face referire la structuri balansate şi twist pe categorii de module Yetter-Drinfeld şi legăturile lor cu cele pivotale, suverane şi/sau sferice. În acest sens, am descris structurile balansate şi ribbon ale unei categorii de module Yetter-Drinfeld peste un grup quasi-cuantic. Aparent, acestea sunt extrem de complicate şi, deci, greu de lucrat cu ele; urmează ca ele să fie rafinate încât legătura lor cu structurile pivotale, suverane şi/sau sferice să fie una naturală. Din acest motiv obiectivul a fost realizat în procent de 90%, urmând ca în viitorul apropiat problema să fie soluţionată complet (aceste rezultate sunt suport pentru anumite obiective asumate pentru anii următori).

Încheiem această parte a raportului cu descrierea conţinutului ştiinţific al lucrărilor [4, 6]. Rezultatele din lucrările [4, 6] au legătură cu obiective asumate pentru anii următori, le includem aici fiindcă ele au fost obţinute în această etapă a proiectului.

Un obiectiv al proiectului (din anii următori) este obţinerea unor exemple concrete de grupuri quasi-cuantice amestecate folosind studiul anumitor functori între categorii de module Hilbert peste C^*-algebre locale; lucrarea [4] se încadrează în acest topic. O C^*-algebra locală este o $*$-algebră complexă topologică Hausdorff completă A, a cărei topologie este definită de o familie dirijată la dreapta de C^*-seminorme $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Un element $a \in A$ este mărginit dacă $\sup\{p_\lambda(a)\,;\lambda \in \Lambda\} < \infty$. Mulţimea elementelor mărginite ale C^*-algebrei locale A, notată $b(A)$, este o C^*-algebră în raport cu C^*-norma $\|\cdot\|_\infty = \sup\{p_\lambda(\cdot)\,;\lambda \in \Lambda\}$, densă în A. Fie $(\Delta, \leq)$ o multime dirijată la dreapta. Un domeniu cuantizat într-un spatiu Hilbert este un triplet $\{\mathcal{H};\mathcal{E};\mathcal{D}_\mathcal{E}\}$, unde $\mathcal{H}$ este un spatiu Hilbert, $\mathcal{E} = \{\mathcal{H}_\delta;\delta \in \Delta\}$ este o familie dirijată la dreapta de subspaţii închise cu reuniunea $\mathcal{D}_\mathcal{E} = \bigcup\limits_{\delta\in\Delta}\mathcal{H}_\delta$ densă în $\mathcal{H}$. $C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_\mathcal{E}); T(\mathcal{H}_\delta) \subseteq \mathcal{H}_\delta, T(\mathcal{H}_\delta^\perp \cap \mathcal{D}_\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{H}_\delta^\perp \cap \mathcal{D}_\mathcal{E}$ şi $T|_{\mathcal{H}_\delta} \in B(\mathcal{H}_\delta)$ pentru orice $\delta \in \Delta\}$ este o C^*-algebră locală cu involuţia dată de $T^* = T^\bigstar|_{\mathcal{D}_\mathcal{E}}$, unde $T^\bigstar$ este adjunctul operatorului liniar şi nemărginit $T \in C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$ şi topologia definită de familia de C^*-seminorme $\{\|\cdot\|_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, unde $\|T\|_\delta = \left\| T|_{\mathcal{H}_\delta} \right\|_{B(\mathcal{H}_\delta)}$. Pentru orice C^*-algebră locală A există un domeniu cuantizat $\mathcal{D}_\mathcal{E}$ într-un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$ şi un $*$-homomorfism local isometric $\pi : \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E})$. Prin urmare, o C^*-algebră locală se poate identifica cu o $*$-subalgebră de operatori liniari şi nemărginiţi pe un spaţiu Hilbert. Un C^*-modul Finsler local peste o C^*-algebră locală A, a cărei topologie este definită de familia de C^*-seminorme $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, este un modul la dreapta E peste A înzestrat cu o aplicaţie $\rho_A : E \to A$ astfel încât $\rho_A(xa)^2 = a^*\rho_A(x)^2 a$ pentru orice $x \in E$ şi orice $a \in A$, pentru orice $\lambda \in \Lambda$, $p_\lambda \circ \rho_A$ este o seminormă pe E şi E este complet în raport cu topologia definită de familie de seminorme $\{p_\lambda \circ \rho_A\}_{\lambda\in\Lambda}$. Dacă E este un C^*-modul Hilbert local peste A, atunci E este un C^*-modul Finsler local peste A cu $\rho_A(x) = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. În lucrarea [4] prezentăm câteva proprietăţi ale C^*-modulelor Finsler locale. Arătăm că mulţimea elementelor mărginite $b(E)$ ale unui C^*-modul Finsler local E peste A are o structură de C^*-modul Finsler peste $b(A)$. În plus, $b(E)$ este dens în E. O quasi-reprezentare a unui C^*-modul Finsler local E peste A pe spaţiile Hilbert $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{K}$ cu cuantizările $\mathcal{D}_\mathcal{E} = \bigcup_{\iota\in\Upsilon} \mathcal{H}_\iota$, respectiv $\mathcal{D}_\mathcal{F} = \bigcup_{\iota\in\Upsilon} \mathcal{K}_\iota$, este o aplicaţie $\Phi : E \to C^*(\mathcal{D}_\mathcal{E}, \mathcal{D}_\mathcal{F})$, cu proprietatea că există o $*$-reprezentare locală φ a lui A pe $\mathcal{H}$ astfel încât $(\Phi(x)^* \Phi(x))^{\frac{1}{2}} = \varphi(\rho_A(x))$ pentru orice $x \in E$. Arătăm că pentru orice C^*-modul Finsler local E peste A există o quasi-reprezentare a lui E pe anumite spaţii Hilbert. De asemenea, arătăm că un C^*-modul Finsler local poate fi realizat ca limită proiectivă a unui sistem proiectiv de C^*-module Finsler. Ca o aplicaţie a acestui rezultat, demonstrăm că derivările C^*-algebrei locale $C^*(\mathcal{D}_\mathbb{E})$, unde $\mathcal{D}_\mathbb{E} = \bigcup_n \mathbb{C}^{k(n)}$ cu $(k(n))_n$ un şir crescător de numere naturale, în C^*-module Finsler locale sunt aproximativ interioare. Lucrarea este într-un stadiu avansat, urmează să fie înbunătăţită şi trimsă spre publicare anul viitor.

Un alt obiectiv al proiectului (din anii următori) vizează obţinerea unei teorii a deformărilor de (co)algebre în categorii monoidale şi construirea unor astfel de obiecte ce verifică, în plus, o anumită proprietate de universalitate, cu scopul de a obtine clase noi de algebre Hopf braided tensoriale şi de a descrie câturi (factori) ale acestora. În articolul [6] se iniţiază studiul deformărilor unei algebre într-o categorie monoidală relativ la o coalgebră dată. În particular se urmăreşte extinderea teoriei deformărilor algebrelor asociative, elaborată de M. Gerstenhaber (a se vedea articolul *On the Deformation of Rings and Algebras*, Annals of Mathematics 79(1064), 59-103). Propunem următorul cadru şi metodă de lucru: fiind dată o categorie K-liniară tensorială $(\mathcal{M}, \otimes, 1)$ şi o coalgebă C se construieşte o nouă categorie K-liniară tensorială $\mathcal{M}_C$ care are aceleaşi obiecte ca şi $\mathcal{M}$, dar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_C}(X, Y)$ coincide cu mulţimea morfismelor K-liniare de la C la $\mathrm{Hom}_\mathcal{M}(X, Y)$. Operaţia de compunere este definită astfel încât coincide cu produsul de convoluţie pe $\mathrm{Hom}_K(C, \mathrm{Hom}_\mathcal{M}(X, X))$, pentru orice obiect X în $\mathcal{M}$. Din acest motiv compunerea în $\mathcal{M}_C$ va fi notată cu $\star$. Exemplul prototip pe care îl avem în permanenţă în vedere este cel din lucrarea lui Gerstenhaber, unde $\mathcal{M}$ este categoria K-spaţiilor liniare, iar C este coalgebra polinoamelor într-o variabilă $K[q]$. În acest caz particular morfismele de la X la Y în categoria $\mathcal{M}_C$ se identifică cu serii formale $\sum_{n\geq 0} f_n q^n$ în variabila q cu coeficienţii f_n în $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)$. Unui morfism de coalgebre $\sigma : C \to D$ îi putem asocia un functor $\sigma^* : \mathcal{M}_D \to \mathcal{M}_C$ care acţionează ca identitatea pe obiecte şi $\sigma^*(f) = f \circ \sigma$ pentru orice morfism f în $\mathcal{M}_D$. Noţiunea de algebră are sens în orice categorie monoidală. Suntem în mod special interesaţi de algebrele în $\mathcal{M}_C$, care vor fi numite pentru simplitate C-algebre. Prin definiţie o C-algebră este dată de două morfisme $m : C \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A \otimes A, A)$ şi $u : C \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(1, A)$ în $\mathcal{M}_C$ (multiplicarea şi unitatea) care satisfac relaţiile:

$$m \star (m \otimes A) = m \star (A \otimes m) \tag{†}$$

$$m \star (u \otimes A) = m \star (A \otimes u) \tag{‡}$$

Folosind notaţia Sweedler uzuală $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ prima relaţie este echivalentă cu

$$\sum m(c_1) \circ [m(c_2) \otimes A] = \sum m(c_1) \circ [A \otimes m(c_2)],$$

pentru orice $c \in C$, iar cea de a doua se poate rescrie într-o formă similară. Morfismele de C-algebre se definesc într-un mod evident. Obţinem o nouă categorie $\mathrm{Alg}_C(\mathcal{M})$. Pentru $\sigma : C \to D$ functorul σ^* de mai sus induce un functor $\sigma^* : \mathrm{Alg}_D(\mathcal{M}) \to \mathrm{Alg}_C(\mathcal{M})$. Dat un morfism σ, putem defini acum noţiunea σ-deformare a unei C-algebre (A, m_0, u_0) ca fiind o D-algebră (A, m, u) asfel încât $\sigma^*(A, m, u) = (A, m_0, u_0)$, adică (A, m, u) este în fibra functorului σ^* peste (A, m_0, u_0). Vom spune că două σ-deformări (A, m, u) şi (A, m', u') ale aceleiaşi C-algebre sunt echivalente dacă algebrele din $\mathcal{M}_D$ corespunzătoare sunt izomorfe via un automorfism f în $\mathcal{M}_D$, cu proprietatea $\sigma^*(f) = I_A$. Aici I_A reprezintă identitatea lui A în $\mathcal{M}_D$. Aşadar, $I_A \in \mathcal{M}_D(A, A)$ şi $I_A(d) = \varepsilon_D(d) id_A$, unde id_A este identitatea lui A în $\mathcal{M}$ iar ε_D este counitatea lui D. Revenind la exemplul clasic, $D = K[q]$ şi $C = K$, o C-algebră asociativă şi unitară se identifică cu o structură de algebră asociativă şi unitară (A, m_0, u_0) în $\mathcal{M}$, unde $m_0 : A \otimes A \to A$ şi $u_0 : 1 \to A$ sunt morfisme în $\mathcal{M}$. Dacă σ este incluziunea lui C în D, atunci o σ-deformare (A, m, u) a C-algebrei (A, m_0, u_0) este dată, după cum am văzut, de două serii formale $\bar{m} = \sum_{n\geq 0} m_n q^n$ şi $\bar{u} = \sum_{n\geq 0} u_n q^n$, care au termenii liberi m_0 şi u_0, morfismele de mai sus. Deoarece $\Delta(q^n) = \sum_{i=0}^n q^i \otimes q^{n-i}$ şi m şi u satisfac condiţiile (†) şi (‡) se vede uşor că $\bar{m}$ şi $\bar{u}$ definesc o deformare à la Gerstenhaber. Unul dintre obiectivele noastre centrale este de a studia mulţimea claselor de echivalenţă de σ-deformări ale unei C-algebre date. În primul rând se aratăa că ne putem reduce la cazul C-algebrelor neunitare.

Teorema 0.34. *Fie (A, m_0, u_0) o C-algebră. Fie $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_D}(A \otimes A, A)$ un morfism care satisface (†) şi $\sigma^*(m) = m_0$. Atunci există un morfism $u : 1 \to A$ în $\mathcal{M}_D$ astfel încât (A, m, u) este o σ-deformare a lui (A, m_0, u_0).*

Având în vedere acest rezultat, de aici înainte C-algebra (A, m_0) şi D-algebra (A, m) sunt neunitare. Şi în cazul neunitar folosim notaţiile σ^*, $\mathrm{Alg}_D(\mathcal{M})$ etc., cu aceeaşi semnificaţie, dar făcând abstractie de unitate. Obiectivul nostru acum este de a caracteriza σ-deformările (A, m) ale unei C-algebre (A, m_0) cu ajutorul unor coalgebre care verifică anumite proprietăţi de universalitate. Construcţia acestora depinde de alegerea unei clase de coalgebre $\mathcal{T}$ care este închisă la sume directe şi la coalgebre factor. Cele mai importante exemple sunt furnizate de clasa tuturor coalgebrelor, clasa coalgebrelor cocomutative, sau a celor pointed. O coalgebră din $\mathcal{T}$ va fi numită de tip $\mathcal{T}$. Interesul pentru coalgebrele de tip $\mathcal{T}$ se explică prin faptul că în aplicaţii este util ca atunci când se deformează o C-algebră, cu C de tip $\mathcal{T}$, coalgebra universală corespunzătoare să fie de acelaşi tip. Are loc următorul rezultat.

Teorema 0.35. *Fie (A, m_0) o C-algebră. Fie $\sigma : C \to D$ un morfism fixat de coalgebre. Există o coalgebră $\mathrm{Def}^{\sigma}_{\mathcal{T}}(m_0)$ de tip $\mathcal{T}$ şi o multiplicare asociativă $m^{\sigma}_{\mathcal{T}} : \mathrm{Def}^{\sigma}_{\mathcal{T}}(m_0) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A \otimes A, A)$ astfel încât orice σ-deformare $m : C \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A \otimes A, A)$ a lui m_0 factorizează în mod unic printr-un morfism de coalgebră $\widehat{m} : C \to \mathrm{Def}^{\sigma}_{\mathcal{T}}(m_0)$.*

Demonstraţia se bazează pe existenţa coalgebrei colibere de tip $\mathcal{T}$ cogenerată de un spaţiu liniar V, adică a unei $\mathcal{T}$-coalgebre $F_{\mathcal{T}}(V)$ împreună cu o aplicaţie $f_V : F_{\mathcal{T}}(V) \to V$ care verifică proprietatea de universalitate a coalgebrelor libere pentru morfismele $f : C \to V$ cu C de tip $\mathcal{T}$. Să remarcăm că $\mathrm{Def}^{\sigma}_{\mathcal{T}}(m_0)$ depinde de morfismul σ. Se poate adapta demonstraţia teoremei precedente astfel încât să obţinem următorul rezultat.

Teorema 0.36. *Fie (A, m_0) o C-algebră. Există o $\mathcal{T}$-coalgebră $\mathrm{Def}_{\mathcal{T}}(m_0)$ şi o multiplicare asociativă $m_{\mathcal{T}} : \mathrm{Def}_{\mathcal{T}}(m_0) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A \otimes A, A)$ astfel încât orice σ-deformare $m : C \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A \otimes A, A)$ a lui m_0 factorizează în mod unic printr-un morfism de coalgebră $\widehat{m} : C \to \mathrm{Def}_{\mathcal{T}}(m_0)$, unde $\sigma : C \to D$ este un morfism de $\mathcal{T}$-coalgebre arbitrar.*

Rezultatele discutate se regăsesc în [6], un preprint de 14 pagini. Alte rezultate noi sunt în curs de finalizare. Ele privesc σ-deformările infinitezimale (i.e deformările pentru care σ este incluziunea $D_0 \subseteq D_1$ a primilor doi termeni ai filtrării coradical a lui D), precum şi de rolul pe care îl joacă o anumită teorie de coomologie Hochschild generalizată în studiul deformărilor. Avem de asemenea în vedere o serie de exemple şi aplicaţii pentru unele categorii tensoriale concrete. Toate acestea vor fi de asemenea incluse în [6], motiv pentru care preprintul nu este disponibil pentru a fi încărcat în momentul de faţă.

II. Sumar al progresului

- Obiectivele asumate în cadrul celor 3 activităţi ale proiectului au fost realizate în procent de 100%, 95% şi, respectiv, de 95%. Pâna la sfârşitul etapei (31.12.2022), a doua şi a treia activitate vor fi realizate în procent de 100%, deci toate obiectivele acestei etape se vor concretiza în procent de 100%. Mai mult, alte două obiective ce corespund etapelor următoare au fost iniţiate.

- Au fost trimise spre publicare 3 articole, toate la reviste din zonele Q1 şi Q2.
- Alte 3 articole sunt în stadiu avansat de elaborare, urmând să fie trimise spre publicare în viitorul apropiat.
- Rezultatele obţinute au fost prezentate în cadrul a 5 conferinţe internaţionale, toate fiind apreciate.
- Am dezvoltat reţeaua de internet locală şi am îmbunătăţit aparatura din dotare prin achiziţionarea unor routere şi a unor laptopuri performante.
- Ne-am asigurat o bună parte din baza materială necesară producerii şi diseminării articolelor de specialitate.
- Bugetul alocat acestei etape a fost cheltuit în totalitate.

III. Rezumat executiv al activităţilor realizate în perioada de implementare

În prima etapă a proiectului au fost trimise spre publicare (la reviste cotate Q2) 3 articole de specialitate, alte 3 fiind în curs avansat de elaborare. Pe scurt, rezultatele obţinute în cadrul acestei etape sunt următoarele:

- descrierea 1-omologiei pentru coalgebre din categorii de module Yetter-Drinfeld peste un grup quasi-cuantic (qQG pe scurt);
- dezvoltarea a două teorii de deformare prin 1-cicluri pentru coalgebre Yetter-Drinfeld şi clasificările produse de către acestea;
- caracterizarea unui qQG cu proiecţie slabă;
- descrierea deformărilor unui qQG cu proiecţie slabă printr-un 2-cociclu cu ajutorul pre-algebrelor Hopf cu 1-ciclu din categorii de module Yetter-Drinfeld;
- proprietăţi pentru operatori de tip Rota-Baxter şi pentru generalizări ale algebrelor dendriforme;
- iniţierea unui studiu privitor la legăturile ce există între perechile aproape în dualitate şi 2-cocicluri;
- calculul algebrei tensoriale asociate unui spaţiu vectorial, privit ca un modul Yetter-Drinfeld peste un qQG de dimensiune mică;
- teoreme de structură pentru algebre Frobenius în anumite categorii de coreprezentări;
- determinarea algebrelor Hopf braided de dimensiune 2 în categorii de module Yetter-Drinfeld peste un qQG;
- descrierea structurilor balansate şi ribbon ale unei categorii de module Yetter-Drinfeld peste un qQG şi legătura dintre acestea şi alte structuri monoidale speciale;
- un studiu al anumitor functori între categorii de module Hilbert peste C^*-algebre locale;

- dezvoltarea unei teorii a deformărilor de (co)algebre în categorii monoidale şi construirea unor astfel de obiecte ce verifică, în plus, o anumită proprietate de universalitate.

O mare parte din rezultatele menţionate mai sus au fost prezentate în cadrul a 4 conferinţe internaţionale, şi anume:

- 2 prezentări la ”New trends in Hopf algebras and Monoidal categories”, 6-9 septembrie, Torino, Italia (a se vedea https://www.hopf-turin-22.it/speakers/bulacu);

- 1 prezentare la ”International Workshop on Hopf algebras”, Zhejiang Normal University, Jinhua (China), July 2022;

- 1 prezentare la ”Hopf algebras, monoidal categories and related topics”, IMAR Bucharest (Romania), July 2022 (https://hopfconferencebuch.wixsite.com/website);

- 1 prezentare la ”‘UMA-RMA”’, Ronda (Spain), 12-16/12/2022 (http://www.rsmeuma2022.uma.es/index.php/programa-general/).

Data, Director de proiect,

Prof. dr. Daniel Bulacu