Proiect: CNCSIS PN-III-P4-PCE-2021-0282, contract nr. 47/2022

"Quasi Quantum Groups and Monoidal Categories"

Director: D. Bulacu

RAPORT ŞTIINŢIFIC, NOIEMBRIE 2023

Dintre articolele raportate în anul 2022 ca fiind trimise spre publicare, în cursul anului 2023 au fost acceptate următoarele (primele două au apărut în reviste din zona Q2, al treilea a fost publicat într-o revistă din zona Q3):

[1] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, L. Năstăsescu: Graded (quasi-) Frobenius rings, J. Algebra 620 (2023), 392-424.

[2] L. Liu, A. Makhlouf, C. Menini, F. Panaite, BiHom-NS-algebras, twisted Rota-Baxter operators and generalized Nijenhuis operators, Results in Mathematics 78 (2023), article number: 251.

[3] M. Joiţa, Finsler locally C^*-modules, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 46 (2023), 86.

De asemenea, încă aşteptăm raport pentru articolul

[4] D. Bulacu, B. Torrecillas, 1-Homology for coalgebras in Yetter-Drinfeld categories,
elaborat şi trimis spre publicare în anul 2022 (la ultimul schimb de mesaje pe care l-am avut cu editorul în data de 25 septembrie a.c., acesta ne-a asigurat că "the paper is with a referee; a report is expected in two/three months").

Articolul

[5] D. Bulacu, D. Popescu, B. Torrecillas, Double wreath quasi-Hopf algebras,
declarat în anul 2022 ca fiind în stadiu avansat de elaborare, a fost trimis spre publicare în anul 2023. Faţă de versiunea raportată în 2022, am adăugat exemple noi, am găsit caracterizări pentru antipodul pre-bialgebrei cu 1-ciclu şi am studiat "deformatul" acestuia definit de 2-cociclu iniţial.

Cercetarea pe temele propuse în proiect pentru anul 2023 s-a concretizat în următoarele 7 lucrări, dintre care 3 sunt trimise spre publicare la reviste cu factor de impact ridicat (din zona Q2) iar 4 sunt în stadiu avansat de finalizare.

[6] A. Makhlouf, D. Ştefan, Deformations of algebraic structures in monoidal categories, în stadiu avansat de elaborare.

[7] D. Bulacu, D. Popescu, B. Torrecillas, Double biproduct quasi-quantum groups, trimis spre publicare.

[8] D. Bulacu, B. Torrecillas, The quasi-Hopf analog of the Drinfeld-Jimbo quantum groups, în stadiu avansat de elaborare.

[9] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, L. Nästšescu, Picard groups of quasi-Frobenius algebras and a question on Frobenius strongly graded algebras, trimis spre publicare.

[10] D. Bulacu, C. Menini, M. Misuratti, Biproduct quasi-quantum groups of rank 2, în curs avansat de elaborare.

[11] D. Bulacu, C. Menini, M. Misuratti, Quasi-quantum groups obtained from Nichols algebras of diagonal type, în curs de elaborare.

[12] M. Joiţa, I. Simon, Injective envelopes for locally C^*-algebras, în stadiu avansat de elaborare.

I. Descrierea ştiinţifică cu punerea în evidenţă a rezultatelor etapei anuale şi gradul de realizare a obiectivelor

Prin fiecare • de mai jos punem în evidenţă rezultatele obţinute în cadrul uneia dintre cele două activităţi considerate în a doua etapă (anul 2023) a proiectului.

• Privitor la articolul [6], acesta a fost declarat în anul 2022 ca fiind în stadiu de finalizare; menţionăm că el vizează un obiectiv al proiectului din anul curent **(a se vedea obiectivele activităţii 2.2 din anul 2023)**. Am realizat la sfârşitul anului trecut că multe dintre rezultatele obţinute în [6] se pot îmbunătăţi considerabil. Acest fapt a făcut ca trimiterea lui spre publicare să fie amânată pentru sfârşitul acestui an. Schimbările sunt majore aşa că o să includem aici rezultatele obţinute în noua versiune a sa.

Se dă o nouă interpretare a noţiunii de deformare a unei $\mathbb{K}$-algebre asociative A cu multiplicarea m, folosind teoria coalgebrelor şi teoria categoriilor monoidale drept instrumente principale de studiu. Prin definiţie, o deformare a lui A este o $K[[t]]$-algebră asociativă definită pe spaţiul vectorial $A[[t]]$, cu multiplicarea $m_t : A[[t]] \times A[[t]] \to A[[t]]$, care este o aplicaţie bilinară de forma $m_t := \sum_{n=0}^{\infty} m_i t^i$, cu $m_i : A \times A \to A$ aplicaţie K-biliniară şi având $m_0 = m$. Abordarea noastră actuală are ca punct de plecare observaţia, simplă, că seriile formale m_t ca mai sus se identifică cu funcţiile liniare $f : K[t] \to \mathrm{Hom}_K(A \otimes A, A)$, asociind lui f seria formală $\sum_{n=0}^{\infty} f(t^n)t^n$. O altă observaţie fundamentală este că teoria deformarilor în sens clasic are sens pentru algebre într-o categorie K-liniară monoidală $\mathcal{M}$ arbitrară. Identificarea menţionată mai sus sugerează construcţia unei noi categorii monoidale K-liniare $\mathcal{M}_t$, care are aceleaşi obiecte ca şi $\mathcal{M}$, dar morfismele de la X la Y în $\mathcal{M}_t$ sunt aplicaţiile liniare $f : K[t] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$. Cu ajutorul categoriei $\mathcal{M}_t$ se poate privi o deformare $(A[[t]], m_t)$ ca algebră asociativă în $\mathcal{M}_t$ (şi invers). Obiectivul principal este de a arăta că se poate elabora o teorie a deformărilor în care coalgebra $K[t]$ să fie înlocuită cu o coalgebrăcocomutativa.

Pentru mai multa flexibilitate se introduce o clasă $\mathcal{T}$ de coalgebre. Coalgebrele din $\mathcal{T}$ vor fi considerate de un anumit tip (spre exemplu, $\mathcal{T}$ poate fi clasa coalgebrelor cocomutative sau punctate). Se arată că în $\mathcal{T}$ există întotdeauna o coalgebră colibera $F_{\mathcal{T}}(V)$ peste orice spaţiu vectorial V. La rândul lor, coalgebrele colibere în $\mathcal{T}$ vor fi principalul instrument de studiu al deformărilor unei algebre asociative, precum şi al altor noţiuni înrudite cu acestea, cum ar fi

ι-factorizările unei transformări liniare f de la o coalgebră D de tip $\mathcal{T}$ la un spaţiu vectorial V dat. Prin definiţie, o ι-factorizare a lui f este o transformare liniară $g : C \to V$ astfel încât $g \circ \iota = f$. Într-un anumit sens, acestea pot fi privite ca structura subiacentă unei deformari, care se obţine uitând aplicaţia de multiplicare. Într-unul dintre rezultatele principale din această parte a articolului se arată că ι-factorizările lui f sunt în corespondenţă bijectivă cu mulţimea morfismelor de coalgebră $\widehat{g}$ de la C la $F_{\mathcal{T}}(V)$ cu o anumită proprietate (a se vedea Teorema 2.3 din pdf-ul încărcat). Deoarece coalgebrele conexe de tip $\mathcal{T}$ vor fi importante pentru aplicaţii, se demonstrează un rezultat asemanător, construind un fel de coalgebră conexa colibera de tip $\mathcal{T}$ (a se vedea Teorma 2.8, acelaşi fisier pdf).

În continuare, este definită o nouă categorie monoidală $\mathcal{M}_C$ care generalizează $\mathcal{M}_t$ şi sunt prezentate câteva proprietăţi de bază ale acesteia (incluzând o metodă de a produce morfisme inversabile, inspirată de un rezultat bine-cunoscut al lui Takeuchi). Mai mult, orice morfism de coalgebre $\iota : D \to C$ induce un functor ι^* de la categoria algebrelor în $\mathcal{M}_C$ la categoria algebrelor în $\mathcal{M}_D$. Se poate defini acum noţiunea de ι-deformare a unei algebre (A, m) în categoria $\mathcal{M}_D$ ca fiind o algebră în fibra functorului ι^* peste (A, m). Spre exemplu, deformările obişnuite se recuperează luând morfismul ι egal cu incluziunea coalgebrei K în $K[t]$. Pe baza rezultatelor privitoare la factorizări, se arată că deformările unei algebre $m_D : D \to Hom_K(A^{\otimes 2}, A)$ sunt guvernate de o coalgebră $\mathrm{Def}_{\mathcal{T}}(m_D, \iota)$ de tip $\mathcal{T}$ satisfacând o anumita proprietate de universalitate (a se vedea Teorema 4.8, pdf-ul menţionat). Un rezultat similar este demonstrat pentru coalgebrele conexe (Teorema 4.9, aceeaşi sursă).

Partea centrală a articolului este secţiunea a cincea, unde se face legătura cu o anumită teorie de coomologie $H^*(m_D, \iota)$. Presupunand că C este o extindere a coalgebrei D, mai întâi se asociază unei multiplicări asociative m_D un 3-cociclu ξ (obstrucţia la deformare). Apoi se arată că există o deformare a lui m_D dacă si numai dacă ξ este o 3-cofrontieră. Rezultatul fundamental este Teorema 5.3 unde se arată că mulţimea claselor de echivalenţa de deformări este în bijecţie cu $H^2(m_D, \iota)$.

Rezultatele mentionate se regăsesc deja într-un preprint. In afara acestora s-au mai studiat o serie de cazuri particulare, unele deja cunoscute în literatura de specialitate, altele noi. Menţionam aici deformările infinitezimale, care corespund cazului când $\iota : C_0 \to C_1$ este incluziunea dată de fitrarea coradical $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a lui C. Acestea sunt clasificate de componenta de grad 1 a filtrării coradical pe $\mathrm{Def}_{\mathcal{T}}(m_{C_0}, \iota)$. În cazul conex, Teoremea Taft-Wilson ne permite să identificăm deformările infinitesimale cu elementele primitive din $\mathrm{Def}_{\mathcal{T}}(m_{C_0}, \iota)$. Şi, mai particular, pentru $C = K[t]$ se recuperează mai multe rezultate din teoria deformărilor algebrelor asociative, iniţiată de M. Gerstenhaber. Mai mult, alegând convenabil categoria $\mathcal{M}$ se regăsesc o serie de tipuri binecunoscute de deformări (e.g. pentru (co)acţiuni ale algebrelor Hopf, sau diagrame de (co)algebre). Cazul $C = K[t_1, \ldots, t_n]$ este de asemenea analizat.

Aceste rezultate sunt în stadiu avansat de redactare şi vor fi incluse în preprintul mantionat. Estimăm că până la sfârşitul anului 2023 acesta va fi trimis spre publicare. De asemenea, una dintre motivaţiile iniţiale ale acestei activităţi de cercetare a fost găsirea unor noi exemple de grupuri quantice (algebre Hopf sau structuri înrudite) cu ajutorul deformărilor. Ceea ce am obţinut până acum poate fi privit ca un pas intermediar.

• Rezultatele obţinute în lucrările [7, 8] sunt în strânsă legătură cu **obiectivele activităţii 2.1** din planul de realizare a proiectului pe anul 2023. Pe scurt, aceste articole fac ca obiectivele asumate la activitatea 2.1 să fie realizate în procent de 100%. Mai jos prezentăm conţinutul ştiinţific al lucrărilor [7, 8].

O primă problemă pe care o rezolvăm în [7], fundamentală de altfel, este introducerea biprodusului dublu peste un grup quasi-cuantic (qQG pe scurt) H şi identificarea lui cu un biprodus stâng sau drept. Biprodusul la stânga asociază unei algebre Hopf braided C în categoria de module stângi peste H, ${}_H^H\mathcal{Y}D$, o algebră quasi-Hopf notată cu $C \times H$. Asemănător, unei algebre Hopf B în categoria de module drepte Yetter-Drinfeld peste H, $\mathcal{Y}D_H^H$, i se asociază algebra quasi-Hopf $H \times B$, numită biprodusul drept dintre H şi B. Am arătat însă într-un articol mai vechi că biprodusele caracterizează algebrele Hopf braided din categoria bimodulelor şi bicomodulelor peste H, ${}_H^H\mathcal{M}_H^H$. Am folosit această caracterizare şi identificarea $C \otimes H \otimes B \equiv (C \otimes H) \otimes_H (H \otimes B)$ din ${}_H^H\mathcal{M}_H^H$ pentru a da o structură de algebră Hopf braided în ${}_H^H\mathcal{M}_H^H$ pe $C \otimes H \otimes B$. Am notat-o cu $C \times H \times B$ şi am numit-o biprodusul dublu asociat lui C, H, B. Notaţia şi terminologia sunt justificate de faptul că $C \times H \times B$ conţine $C \times H$ şi $H \times B$ ca subalgebre quasi-Hopf. De asemenea, am arătat ca biprodusul dublu se poate considera doar dacă C şi B satisfac o anumită relaţie de compatibilitate, indusă de faptul că un produs tensorial (în sens braided monoidal) de două algebre şi respectiv de două coalgebre furnizează un produs tensorial de bialgebre (respectiv algebre Hopf) dacă şi numai dacă braiding-ul definit de cele două (co)algebre este simetric.

Pentru o algebră C (respectiv B) în categoria reprezentărilor stângi (respectiv dreapte) peste H se poate considera k-algebra $C\#H$ (respectiv $H\#B$), numită produsul încrucişat dintre C, H (respectiv B, H). În acelaşi spirit, cu ajutorul lui C, B putem forma o altă k-algebră, notată cu $C\#H\#B$ şi numită produsul încrucişat pe două părţi al lui C, H, B; este numită aşa deoarece conţine atât $C\#H$ cât şi $B\#H$ ca algebre asociative. Am demonstrat că $C \times H \times B = C\#H\#B$ ca algebre asociative, cu condiţia ca C, B să fie algebre Hopf braided ca mai sus. Un rezultat paralel funcţionează la nivel de coalgebre: unei coalgebre $C \in {}_H^H\mathcal{Y}D$ (resp. $B \in \mathcal{Y}D_H^H$) putem să-i asociem o coalgebră monoidală în categoria de H-bimodule, ${}_H\mathcal{M}_H$; se notează cu $C \rtimes H$ (resp. $H \ltimes B$) şi se numeşte coalgebra produs încrucişat a lui C, H (resp. B, H). În acelaşi context, se poate construi o nouă coalgebră în ${}_H\mathcal{M}_H$, $C \rtimes H \ltimes B$, aşa-numita coalgebră produs încrucişat pe două părţi a lui C, H, B, o coalgebră monoidală care conţine $C \rtimes H$ şi $H \ltimes B$ ca H-bimodul coalgebre. Când C, B sunt algebre Hopf braided, $C \times H \times B = C \rtimes$

$H \bowtie B$ ca şi coalgebre în ${}_H\mathcal{M}_H$. Structurile de (quasi-co)algebră ale lui $C \times H \times B$ sunt complicate şi imposibil de găsit prin calcul brut; modul nostru categorical oferă modalitatea naturală de a-l obţine fără efort, deoarece nu este necesar niciun calcul. Mai mult, folosind din nou unele rezultate categoricale, arătăm că, $C \times H \times B$ se identifică cu un biprodus la stânga (şi/sau la dreapta) ca algebră quasi-Hopf. Mai exact, am construit un functor braided $\mathcal{K} : \mathcal{Y}D_H^H \to {}_H^H\mathcal{Y}D$ care permite să-l vedem pe B ca o (co)algebră, bialgebră etc. în ${}_H^H\mathcal{Y}D$; $\overline{B}$ reprezintă B echipat cu această nouă structură braided în ${}_H^H\mathcal{Y}D$. Este remarcabil faptul că echivalenţele braided monoidale ${}_H^H\mathcal{Y}D \sim {}_H^H\mathcal{M}_H^H \sim \mathcal{Y}D_H^H$ furnizate de teoremele de structură în ${}_H^H\mathcal{M}_H^H$ duc la identificări naturale ŷ ntre (co)algebrele produs încrucişat la stânga şi la dreapta, identificări care în final implică o identificare naturală între grupurile quasi-cuantice biproduse duble şi grupurile biproduse quasi-cuantice la stânga şi/sau dreapta. Trebuie subliniat faptul că "condiţia naturală" menţionată mai sus rezidă din condiţia necesară şi suficientă pentru ca structura de algebră produs tensorial şi cea de coalgebră produs tensorial (ambele asociate la două bialgebre braided, în cazul nostru C şi $\overline{B}$) să confere o structură de bialgebră braided de tip produs tensorial. Când această "condiţie naturală" este valabilă, avem o nouă algebră Hopf braided $C\widetilde{\otimes}\overline{B}$ în ${}_H^H\mathcal{Y}D$ şi $C \times H \times B \equiv (C\widetilde{\otimes}\overline{B}) \times H$ ca algebre quasi-Hopf, printr-un izomorfism natural χ produs, din nou, de Teoremele de Structură din ${}_H^H\mathcal{M}_H^H$.

Cu ajutorul identificării $C \times H \times B \equiv (C\widetilde{\otimes}\overline{B}) \times H$ putem caracteriza 2-cociclurile pe $C \times H \times B$. Am arătat în [5] că 2-cociclurile ϑ pe un grup quasi-cuantic de tip biprodus, să zicem $A \times H$, sunt determinate de aproape 2-cocicluri $\overline{\vartheta}$ pe algebra Hopf braided A din ${}_H^H\mathcal{Y}D$; am folosit termenul aproape deoarece $\overline{\vartheta}$ respectă toate condiţiile necesare pentru un 2-cociclu braided, cu o singură excepţie: $\overline{\vartheta}$ nu este H-coliniar şi, deci, nu este un morfism în ${}_H^H\mathcal{Y}D$. Lipsa H-coliniarităţii pentru ϑ nu este un dezavantaj pentru noi, deşi pierdem cumva calea categoricală. Dimpotrivă, dacă presupunem că ϑ este H-coliniar, Teorema 5.2 din articol şi Consecinţa sa 5.3 ne spun că deformarea lui $A \times H$ prin ϑ este, până la identificare, biprodusul dintre deformarea braided a lui A produsă de $\overline{\vartheta}$ şi H, un inconvenient pentru noi deoarece grupurile cuantice Drinfeld-Jimbo sunt algebre Hopf cu proiecţii slabe şi nu biproduse. Cu toate acestea, exemple particulare de aproape 2-cocicluri pe $A = C\widetilde{\otimes}\overline{B}$ sunt oferite de perechile aproape duale strâmbe dintre C și $\overline{B}$ în ${}_H^H\mathcal{Y}D$ (aproape deoarece nu sunt H-coliniare, aşa cum era de aşteptat). Folosind izomorfismul χ, acestea din urmă sunt date de anumite morfisme H-balansate de la $B \otimes A$ la k, fapt ce ne-a condus astfel la definiţia lui Majid pentru procesul de bozonizare dublă, dar acum în context quasi-Hopf.

Lucrarea [7] se încheie cu exemple concrete de grupuri quasi-cuantice biproduse duble care produc, datorită procesului de bozonizare, noi exemple de grupuri quasi-cuantice. Mai exact, în [10] (la care o să revenim pentru conţinut mai jos) sunt descrise algebrele Hopf braided de rang 2 într-o categorie de module Yetter-Drinfeld peste o algebră quasi-Hopf dată H; le folosim pentru a construi exemple de grupuri quasi-cuantice de tip biproduse duble. Apoi, am determinat perechile aproape duale strâmbe pentru două astfel de algebre Hopf braided de rang 2 şi 2-cociclurile rezultate din ele. Nu în ultimul rând, am aplicat procesul de bozonizare prezentat mai sus. Prin specializarea lui H, am obţinut o mulţime de exemple noi de algebre quasi-Hopf.

Mai multe detalii despre conţinutul lucrării [7] se găsesc în pdf-ul lucrării pe care l-am anexat. Mai menţionăm că, lucrarea [7] a fost trimisă spre publicare recent.

• Pentru continuitate, vom pune în evidenţă acum rezultatele care fac ca obiectivele **activităţii 2.1** din planul de realizare să fie realizate în procent de 100% . Acestea fac obiectul lucrării [8], ce se află într-un stadiu avansat de elaborare. Nefiind finalizată şi fiindcă nu este trimisă spre publicare sau prezentată în cadrul unei conferinţe, dorim doar să prezentăm succint rezultatele obţinute, un fişier pdf al său urmând să fie făcut public atunci când lucrarea se va finaliza (sperăm ca acest lucru să se întâmple undeva spre sfârşitul anului curent).

In cazul clasic, construcţia grupurilor cuantice Drinfeld-Jimbo foloseşte, pe de o parte, un fel de algebră Hopf braided liberă într-o categorie de module Yetter-Drinfeld şi, pe de altă parte, factorizări ale acestora prin aşa numite relaţii Serre asociate unei date Cartan. În cazul quasi-Hopf ambele probleme sunt greu de abordat fiindcă în acest caz structura de modul Yetter-Drinfeld este mult mai complicată: este modul şi are o coacţiune ce nu este coassociativă, dar compatibilă cu acţiunea. Am observat însă într-un articol anterior că, în cazul Hopf, coacţiunile sunt definite de forme biliniare ce oferă structuri co-quasi-triangulare (CQT pe scurt) simetrice pe H. Pentru un qQG noţiunea de CQT nu are sens fiindcă ea este echivalentă cu faptul că, co-reprezentările formează o categorie braided iar în cazul quasi-Hopf această categorie nu există. Din acest motiv am plecat cu o R-matrice pe H (cazul dual) ce dă coacţiunea algebrei Hopf libere în categoria de module Yetter-Drinfeld şi am considerat acţiunea acesteia definită de o familie de caractere indexată după mulţimea ce-i conferă alfabetul. Mulţimea de caractere trebuie să satisfacă un set de condiţii (notat cu $\mathcal{A}$), impuse de faptul că, multiplicarea este asociativă modulo reasociatorul lui H. Cazul clasic, cel al algebrelor Hopf, se recuperează considerând module stângi Yetter-Drinfeld peste duala lui H (ce devine astfel CQT). Mai departe am completat structura de algebră liberă în ${}_H^H\mathcal{Y}D$ pâna la una de algebră Hopf. În acest sens, am definit comultiplicarea şi antipodul pe fiecare literă şi am arătat că aceste definiţii se comportă bine cu, condiţiile din setul $\mathcal{A}$.

Al doilea pas, unul extrem de dificil, a fost acela de a determina condiţiile Serre pentru contextul nostru. Dificultatea a constat în faptul că aceste condiţii trebuie sa fie compatibile cu cele din $\mathcal{A}$, fapt ce nu apare în cazul clasic. După mai multe încercări le-am găsit, mai întâi pentru varianta la stânga şi după pentru varianta la dreapta. Putem spune că acestea implică nu numai literele alfabetului şi familia de caractere fixată, ci şi componentele reasociatorului lui H. În plus, cele două construcţii (la stânga şi la dreapta) verifică "condiţia naturală"' menţionată mai sus; de asemenea, idealul generat de relaţiile noastre de tip Serre este ideal Hopf braided şi, astfel, avem două algebre Hopf braided în categorii de module Yetter-Drinfeld (stângi şi respectiv drepte) cărora le-am aplicat construcţia biprodusului dublu.

Trebuie să remarcăm că toate rezultatele de mai sus au fost obţinute pentru un qQG QT arbitrar (H, R). În cazul clasic acesta este algebra de funcţii a grupului liber $\mathbb{Z}[I]$, unde $(I, \cdot)$ este o dată Cartan, privită ca duala unei algebre Hopf grupale CQT cu forma biliniară simetrică $\mathcal{R}$ definită de un scalar q nenul din corpul de bază: $\mathcal{R}(K_\mu \otimes K_\nu) = q^{\mu\cdot\nu}$, pentru orice $\mu, \nu \in \mathbb{Z}[I]$. Continuând acest joc al dualităţii, în cazul quasi-Hopf am considerat pe postul lui (H, R) produsul tensorial dintre $k^{\mathbb{Z}[I]}$ şi un qQG QT arbitrar, obţinând astfel o varaintă mai generală decât în cazul grupurilor cuantice Drinfeld-Jimbo. Produsul tensorial se impune pentru a ieşi din zona Hopf: nu există garanţii precum că, pentru orice I, putem să găsim un 3-cociclu abelian netrivial pentru $k[\mathbb{Z}[I]]$ care să producă o structură de qQG CQT pe acesta.

Această generalitate ne-a permis să demonstrăm că multe dintre construcţiile existente în literatură sunt cazuri particulare ale construcţiei noastre. O să continuăm să lucrăm în această direcţie şi anul următor, activitatea 3.1 din anul 2024 fiind legată strict de acest lucru. La momentul acestei raportări lucrăm la redactarea rezultatelor obţinute şi îmbunătăţirea lor, acolo unde este posibil.

• Lucrarea [9] din lista de mais sus conţine rezultate ce le completează pe cele obţinute în cadrul **activităţii 1.2** din anul 2022 dar în acelaşi timp oferă informaţii şi exemple importante în ceea ce priveşte obiectivele **activităţii 2.2** de anul acesta, întrucât algebrele graduate produc exemple de module Yetter-Drinfeld peste algebra grupală şi, astfel, au legătură cu "cazul diagonal" din teoria algebrelor Nichols. Scopul nostru iniţial a fost să răspundem la următoarea întrebare: se transferă proprietatea de a fi Frobenius (simetrică) de la o algebră tare graduată la componenta ei omogenă de grad trivial? În legătură cu această întrebare, studiem bimodulele inversabile şi grupul Picard al unei algebre finit dimensionale quasi-Frobenius R. În cazul special al grupurilor cuantice obţinem:

Teorema A. *Fie H o algebră Hopf finit dimensională cu antipod S. Atunci ordinul lui $[H^*]$ în $\mathrm{Pic}(H)$ este cel mai mic multiplu comun al ordinului clasei lui S^2 în $\mathrm{Out}(H)$ şi al ordinului elementului modular al lui H^* în grupul elementelor grupale din H^*.*

Calculăm grupul Picard, grupul de automorfisme şi grupul de automorfisme exterioare ale unei algebre $\mathcal{R}$, care este quasi-Frobenius de dimensiune 9, dar nu este Frobenius, construită de Nakayama. În această direcţie, rezultatele centrale obţinute sunt următoarele.

Teorema B. *Există un izomorfism de $\mathcal{R}$-bimodule $\varphi : \mathcal{R}^* \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^* \to \mathcal{R}$, prin urmare $[\mathcal{R}^*]$ are ordin 2 în $\mathrm{Pic}(\mathcal{R})$. Un $\mathcal{R}$-bimodul inversabil este izomorf cu ${}_1\mathcal{R}_\alpha$ sau cu ${}_1\mathcal{R}^*{}_\alpha$ pentru un*

$\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$, *iar* $\mathrm{Pic}(\mathcal{R}) \simeq \mathrm{Out}(\mathcal{R}) \times C_2$.

Teorema C. $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ *este izomorf cu produsul semidirect* $(K^2 \times M_{2,1}(K)) \rtimes (K^* \times GL_2(K))$, *iar* $\mathrm{Out}(\mathcal{R}) \simeq K^*$.

Considerăm o algebră finit dimensională oarecare R şi un morfism de R-bimodule $\psi : R^* \otimes_R R^* \to R$, care este asociativ, adică $\psi(r^* \otimes_R s^*) \leftharpoondown t^* = r^* \rightharpoonup \psi(s^* \otimes_R t^*)$ pentru orice $r^*, s^*, t^* \in R^*$; aici $\rightharpoonup$ şi $\leftharpoondown$ sunt acştiunile la stânga şi la dreapta ale lui R pe R^*. Putem forma extensia semi-trivială $R \rtimes_\psi R^*$, care este produsul cartezian $R \times R^*$ cu adunarea uzuală şi în mulţirea dată de

$$(r, r^*)(s, s^*) = (rs + \psi(r^* \otimes_R s^*), (r \rightharpoonup s^*) + (r^* \leftharpoondown s))$$

pentru orice $r, s \in R, r^*, s^* \in R^*$. Acesta are o structură de C_2-algebră graduată având R drept componenta omogenă de grad trivial. Demonstrăm că:

Propoziţia A. $R \rtimes_\psi R^*$ *este algebră simetrică.*

Dacă ψ este izomorfism, ceea ce implică că R^* este inversabil (şi astfel R trebuie să fie quasi-Frobenius), atunci $R \rtimes_\psi R^*$ este o algebră C_2-tare graduată. Arătăm că izomorfismul $\varphi : \mathcal{R}^* \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^* \to \mathcal{R}$ construit în Teorema B este asociativ, şi tragem concluzia că $\mathcal{R} \rtimes_\varphi \mathcal{R}^*$ este o algebră C_2-tare graduată şi simetrică, prin urmare şi Frobenius, în timp ce componenta ei de grad trivial nu este Frobenius. Astfel răspundem în negativ întrebării iniţiale pentru ambele proprietăţi, Frobenius şi simetric.

În lucrare mai investigăm, de asemenea, asociativitatea izomorfismelor $R^* \otimes_R R^* \simeq R$ pentru o algebră quasi-Frobenius R. Aceasta a fost trimisă spre publicare anul acesta la o revistă din zona Q2.

• Lucrările [10] şi [11], împreună cu lucrarea [6], fac ca obiectivele **activităţii 2.2** din anul 2023 să fie realizate în procent de 90% (în scurt timp acestea se vor realiza în procent de 100%, prin finalizarea lucrării [10] şi trimiterea ei spre publicare).

Lucrarea [10] este o sursă bună de exemple de algebre Hopf braided în categorii de module Yetter-Dinfeld, multe dintre clasele de exemple obţinute aici au fost deja folosite pentru a produce exemple în cadrul lucrărilor [7, 8, 11]. Ea a fost iniţiată în cadrul activităţii 1.2 de anul trecut însă anul acesta a devenit o lucrare ce poate fi trimisă spre publicare. Mai mult, rezultatele obţinute aici au fost prezentate de către al treilea autor în cadrul conferinţei ”Hopf Days in Brussels”, 4-6 Septembrie, 2023, https://sites.google.com/view/hopfdaysbrussels2023/home

Pe scurt, conţinutul său este următorul. Într-o primă fază sunt clasificate algebrele Hopf braided 2-dimendionale B dintr-o categorie de module Yetter-Drinfeld ${}^H_H\mathcal{YD}$, H un qQG fixat.

Am arătat că B poate avea una dintre următoarele forme:

1. $k[S]$, unde $S = \{1, s\}$ şi $s^2 = s$ group-like, cu H-acţiunea şi H-coacţiunea triviale (nu este algebră Hopf dar este algebră Hopf braided);
2. $k[S]$, unde $S = \{1, s\}$ şi $s^2 = 1$, s group-like, cu H-acţiunea şi H-coacţiunea triviale (este algebră Hopf şi algebră Hopf braided);
3. de tipul $B_{\alpha,y}$, definit de o pereche (α, y) cu α caracter al lui H şi $y \in H$ satisfăcând anumite condiţii (algebră Hopf şi algebră Hopf braided).

Prin procesul de bozonizare fiecărui tip de mai sus îi corespunde o algebră quasi-Hopf pe care am determinat-o complet în termeni de generatori şi relaţii. Mai mult, pentru a obţine cât mai multe astfel de exemple de qQGs, am considerat H ca fiind algebra grupală a unui grup ciclic finit, privită ca un qQG via un 3-cociclu netrivial ω al grupului. Când ω este definit de o rădăcină primitivă a unităţii, surprinzător poate, toate algebrele Hopf braided sunt triviale (algebra grupală a unui grup ciclic cu două elemente). Cazul netrivial este acela când ω nu este definit de o rădăcină primitivă a unităţii din corpul de bază k: există două tipuri în acest caz şi, deci, două clase de qQGs de rang 2.

Rezultatele obţinute ne-au ajutat să aratăm că, în cazul quasi-Hopf, nu avem un analog al algebrei 4-dimensionale a lui Sweedler: singurul qQG de dimensiune 4 şi rang 2 este produsul tensorial $k[C_2] \otimes k[C_2]$, unde C_2 este grupul ciclic cu două elemente; al doilea este înzestrat cu singurul său 3-cociclu netrivial.

Rezultatele obţinute au fost redactate, urmează să fie rafinate şi adăugate altele noi. Mai exact, dorim să vedem dacă exemplele noi obţinute în dimensiune 8, împreună cu cele deja cunoscute (Gelaki), ne permit să clasificăm grupurile quasi-quantice "basic" de dimensiune 8. Acest ultim rezultat, dacă se obţine, va da "greutate" articolului care, astfel, poate să fie trimis spre publicare la o revistă din zona Q2 sau chiar Q1. Din acest motiv am amânat trimiterea lui spre publicare, însă am prezentat rezultatele centrale în cadrul unei conferinţe internaţionale.

• În continuare, expunem rezultatele obţinute pâna la momentul de faţă în cadrul lucrării [11]. Aşa cum am menţionat, el este legat de obiectivele **activităţii 2.2** din planul de realizare al proiectului pe anul 2023.

În [11] am introdus noţiunea de algebră Nichols in cazul grupurilor quasi-cuantice. Multe dintre tehnicile utilizate în cazul clasic funcţionează şi în cazul quasi-Hopf. Numai că, structura monoidală din ${}_H^H\mathcal{Y}D$ nefiind strictă în cazul unui qQG H, tot timpul intervin anumiţi operatori definiţi de constantele de asociativitate şi/sau baiding-ul categoriei ${}_H^H\mathcal{Y}D$. Acest fapt duce la calcule dificile, cu atât mai mult cu cât ele sunt deja dificile în cazul clasic. Cu ajutorul tehnicilor oferite de categoriile braided monoidale, am arătat că pentru orice coalgebră $\mathbb{N}$-graduată $C =$

$\bigoplus_{n\geq 0} C_n$ din ${}^H_H\mathcal{Y}D$ care este connected (componenta sa de grad 0 este 1-dimensională) există un cel mai mare coideal braided graduat al său, notal cu I_C, astfel încât $I_C \subseteq \bigoplus_{n\geq 2} C_n$. Putem astfel considera coalgebra factor $\mathcal{B}(C) := C/I_C$.

Rezultatele de mai sus se aplică algebrei tensoriale $T(V)$ asociată unui obiect V din ${}^H_H\mathcal{Y}D$; pentru simplitate, în acest caz notăm $\mathcal{B}(T(V))$ cu $\mathcal{B}(V)$ şi o numim algebra Nichols a lui V, o algebră Hopf braided în ${}^H_H\mathcal{Y}D$ fiindcă $T(V)$ este mai mult decât o coalgebră braided $\mathbb{N}$-graduată connected, este chiar algebră Hopf braided $\mathbb{N}$-graduată. Inspiraţi de cazul clasic, am arătat că n-componenta idealului I_C coincide cu nucleu unui operator Δ_{1^n} definit de către comultiplicarea Δ a lui C şi proiecţia sa π_1 pe componenta C_1. Teoretic, acest lucru ne permite să calculăm I_C şi implicit $\mathcal{B}(C)$. Practic, am putut face acest lucru în dimensiuni mici ale lui V, anume 1 şi 2. În cel de-al doilea caz am reobţinut anumite qQG-uri de dimensiune 8 introduse de Gelaki. Pentru dimensiuni mai mari lucrurile se complică, de aceea am început să studiem anumite cazuri particulare.

Cazul particular la care facem referire este cel "diagonal"; este acela pentru care grupul quasi-cuantic este algebra grupală a unui grup finit abelian G, privită ca un qQG via un 3-cociclu netrivial al lui G. În cazul clasic, un Yetter-Drinfeld modul este un spaţiu G-graduat (graduarea defineşte coacţiunea şi reciproc) cu acţiunea pe fiecare componentă definită de un caracter liniar al grupului G. În cazul quasi-Hopf, aşa cum am mai menţionat, definiţia unui modul Yetter-Drinfeld este mult mai complicată. În plus, pentru un G-modul Yetter-Drinfeld, avem coacţiuni care nu sunt definite de G-graduări (descompunerea rămâne dar se pierde unicitatea ei). Aşa că prima întrebare la care am ajuns a fost, cum putem introduce G-modulele Yetter-Drinfeld in cazul quasi-Hopf? Am ajuns la concluzia că există două moduri de a o face, ele coincid doar în cazul clasic. Prima posibilitate este să considerăm un 3-cociclu abelian pe G: el defineşte coacţiunea iar acţiunea rămane să fie definită de caractere ale lui G, în număr egal cu componentele ciclice ale sale; se pierde în acest fel graduarea dar se păstrează caracterele. A doua posibilitate este să plecăm cu un spaţiu G-graduat iar graduarea să definească coacţiunea; mai mult, 3-cociclu de pe G considerat iniţial produce o acţiune la care graduarea joaca din nou un rol important (aici se păstrează graduarea dar se pierd caracterele). Odată clarificată această problemă, următorul nostru pas este să calculăm algebra Nichols în ambele cazuri, după care biprodusele quasi-Hopf asociate lor. Acest lucru se va face cât de curând posibil. Fiindcă reziltatele obţinute sunt într-o fază nu îndeajuns de avansată, dorim să nu ataşăm deocamdată fisierul articolului ce conţine rezultatele mai sus menţionate.

• Încheiem această parte a raportului cu descrierea conţinutului ştiinţific al lucrării [12]. Rezultatele din lucrarea [12] au legătură cu obiective asumate pentru anul următor (activitatea 3.1 din anul 2024), le includem aici fiindcă ele au fost obţinute în această etapă a proiectului.

Conceptul de injectivitate este un concept din teoria categoriilor. Un obiect I dintr-o categorie $\mathcal{C}$ este injectiv dacă perntru orice două obiecte $E \subseteq F$ din $\mathcal{C}$, orice morfism $\varphi : E \to I$ extinde la un morfism $\widetilde{\varphi} : F \to I$. În lucrarea [H. B. Cohen, *Injective envelopes of Banach spaces*, Bull. Amer.Math. Soc., 70(1964),723-726] Cohen consideră categoria spaţiilor Banach cu aplicaţiile liniare contractive ca morfisme. El introduce noţiunea de "înfăşurătoare "injectivă pentru un spaţiu Banach şi arată că pentru orice spaţiu Banach există o unică "înfăşurătoare"injectivă.

În [M. Hamana*, Injective envelopes for C^*-algebras*, J. Math. Soc. Japan, 32(1979), 1, 181-196] Hamana extinde aceste rezultate în contextul C^*-algebrelor. El consideră categoria ale cărei obiecte sunt C^*-algebre cu unitate şi ale cărei morfisme sunt aplicaţii liniare complet pozitive care păstrează unitatea.

O C^*-algebră A cu unitate este injectivă dacă pentru orice C^*-algebră cu unitate C şi orice subspaţiu autoadjunct $\mathcal{S}$ al lui C, care conţine unitatea, orice aplicaţie complet pozitivă $\varphi : \mathcal{S} \to A$, care păstrează unitatea, extinde la o aplicaţie complet pozitivă $\widetilde{\varphi} : C \to A$. C^*-algebra $B(\mathcal{H})$ a operatorilor liniari şi mărginiţi pe un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$ este injectivă conform teoremei lui Arveson de extensie. O extensie a C^*-algebrei A este o pereche (B, Φ) formată dintr-o C^*-algebră cu unitate B şi un $*$-morfism injectiv $\Phi : A \to B$. Extensia (B, Φ) este injectivă dacă B este injectivă. Conform teoremei lui Gelfand-Naimark, pentru orice C^*-algebră A există un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$ şi un $*$-morphism izometric $\Phi : A \to B(\mathcal{H})$. Deci, orice C^*-algebră cu unitate are o extensie injectivă. O "înfăşurătoare" injectivă pentru o C^*-algebră A este o extensie injectivă (B, Φ) a lui A cu proprietatea că id_B este unica aplicaţie complet pozitivă care păstrează unitatea şi elementele din $\Phi(A)$. El arată că pentru orice C^*-algebră A cu unitate există o "înfăşurătoare" injectivă, unică în următorul sens: dacă (B_1, Φ_1) şi (B_2, Φ_2) sunt două "înfăşurători" injective pentru A, atunci există un singur C^*-izomorfism $\Upsilon : B_1 \to B_2$ astfel încât $\Upsilon \circ \Phi_1 = \Phi_2$.

În articolul [12], ne propunem să extindem rezultatele lui Hamana la cazul C^*-algebrelor locale.

O C^*-algebră locală este o $*$-algebră topologică completă Hausdorff A a cărei topologie este definită de o familie dirijată de C^*-seminorme $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. O C^*-algebră locală Fréchet este o C^*-algebră locală a cărei topologie este determinată de o familie numărabilă de C^*-seminorme. Un element $a \in A$ este local pozitiv dacă $a = b^*b + c$, unde $b, c \in A$ astfel încât $p_\lambda(c) = 0$ pentru un anume element $\lambda \in \Lambda$. În acest caz, vom spune că a este λ-pozitiv, şi vom nota $a \geq_\lambda 0$. Vom nota $a =_\lambda 0$ oricând $p_\lambda(a) = 0$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $M_n(A)$, $*$-algebra tuturor matricelor de ordin n cu elemente în A, este o C^*-algebră locală, familia de C^*-seminorme fiind notată $\{p_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Fie $\mathcal{B}$ o C^*-algebră locală a cărei topologie este definită de familia de C^*-seminorme $\{q_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ şi o aplicaţie liniară $\varphi : A \to B$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm aplicaţia liniară $\varphi^{(n)} : M_n(A) \to M_n(B)$ definită prin $\varphi^{(n)}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^n\right) = [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n$.

O aplicaţie liniară $\varphi : A \to B$ este numită:

(1) *local complet pozitivă* dacă pentru orice $\delta \in \Delta$, există $\lambda \in \Lambda$ astfel încât

$$\varphi^{(n)}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right) \geq_{\delta} 0$$

oricând $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \geq_{\lambda} 0$ şi $\varphi^{(n)}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right) =_{\delta} 0$ oricând $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n} =_{\lambda} 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

(2) *admisibil local complet pozitivă dacă* $\Delta = \Lambda$ şi pentru orice $\lambda \in \Lambda$, $\varphi^{(n)}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right) \geq_{\lambda} 0$ oricând $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \geq_{\lambda} 0$ şi $\varphi^{(n)}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right) =_{\lambda} 0$ oricând $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n} =_{\lambda} 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

(3) *local complet contractive* dacă pentru orice $\delta \in \Delta$, există $\lambda \in \Lambda$ astfel încât

$$q_{\delta}^{n}\left(\varphi^{(n)}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right)\right) \leq p_{\lambda}^{n}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right)$$

pentru orice $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in M_n(A)$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

(4) *admisibil local complet contractive dacă* $\Delta = \Lambda$, şi pentru orice $\lambda \in \Lambda$,

$$p_{\lambda}^{n}\left(\varphi^{(n)}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right)\right) \leq p_{\lambda}^{n}\left([a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\right)$$

pentru orice $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in M_n(A)$ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $(\Delta, \leq)$ o mulţime dirijată la dreapta. Un domeniu cuantizat într-un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$ este un triplet $\{\mathcal{H}; \mathcal{E}; \mathcal{D}_{\mathcal{E}}\}$, unde $\mathcal{E} = \{\mathcal{H}_{\delta}; \delta \in \Delta\}$ este o familie dirijată de subspaţii închise cu reuniunea $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \bigcup\limits_{\delta \in \Delta} \mathcal{H}_{\delta}$ densă în $\mathcal{H}$. Dacă Δ este numărabilă, spunem că $\{\mathcal{H}; \mathcal{E}; \mathcal{D}_{\mathcal{E}}\}$ este domeniu cuantizat Fréchet.

Fie $C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}); T(\mathcal{H}_{\delta}) \subseteq \mathcal{H}_{\delta}, T(\mathcal{H}_{\delta}^{\perp} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{E}}) \subseteq \mathcal{H}_{\delta}^{\perp} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ şi$T|_{\mathcal{H}_{\delta}} \in B(\mathcal{H}_{\delta})$ pentru orice $\delta \in \Delta\}$.

$C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ este o C^*-algebră locală cu involuţia $T^* = T^{\bigstar}\big|_{\mathcal{D}_{\mathcal{E}}}$, unde $T^{\bigstar}$ este adjunctul operatorului liniar şi nemărginit $T \in C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$, şi topologia dată de familia de C^*-seminorme $\{\|\cdot\|_{\delta}\}_{\delta \in \Delta}$, unde $\|T\|_{\delta} = \left\| T|_{\mathcal{H}_{\delta}} \right\|_{B(\mathcal{H}_{\delta})}$.

Pentru orice C^*-algebră locală A a cărei topologie este definită de familia de C^*-seminorme $\{p_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$, există un domeniu cuantizat $\{\mathcal{H}; \mathcal{E} = \{\mathcal{H}_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}; \mathcal{D}_{\mathcal{E}}\}$ şi un $*$-morfism izometric local $\pi : \mathcal{A} \to C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$ (un $*$-morfism cu proprietatea că $\|\pi(a)\|_{\lambda} = p_{\lambda}(a)$ pentru orice $a \in A$ şi pentru orice $\lambda \in \Lambda$). Prin urmare, o C^*-algebră se identifică cu o $*$-algebră de operatori liniari nemărginiţi pe un spaţiu Hilbert.

O versiune local convexă a teoremei lui Arveson de extensie a fost demonstrată de Dosiev [A. Dosiev, *Local operator spaces, unbounded operators and multinormed C^*-algebras,* J. Funct. Anal. **255**(2008), 1724–1760.] în cazul C^*-algebrelor locale Fréchet cu unitate. In acest articol, considerăm categoria ale cărei obiecte sunt C^*-algebre locale Fréchet cu unitate şi ale cărei morfisme sunt aplicaţii admisibile local complet pozitive and local complet contractive care păstrează unitatea şi arătăm ca orice obiect din această categorie are o singură "înfăşurătoare" injectivă.

Nu ştim dacă acest rezultat este adevărat în categoria ale cărei obiecte sunt C^*-algebre locale Fréchet cu unitate şi ale cărei morfisme sunt aplicaţii local complet pozitive şi local complet contractive care păstrează unitatea.

II. Sumar al progresului

- Obiectivele asumate în cadrul celor 2 activităţi din a.c. ale proiectului au fost realizate în procent de 100% şi, respectiv, de 95%. Până la sfârşitul etapei (31.12.2023), a doua activitate va fi realizată în procent de 100%, deci toate obiectivele acestei etape se vor concretiza în procent de 100%. Mai mult, alt obiectiv ce corespunde etapei următoare a fost iniţiat.

- Au fost acceptate spre publicare 3 articole elaborate în anul 2022, două în reviste din zona Q2 şi unul într-o revistă din zona Q3; pentru un al 4-lea articol, elaborat şi trimis spre publicare în 2022, încă aşteptăm raportul referentului.

- Au fost trimise spre publicare alte 3 articole (unul elaborat în bună parte în 2022 şi finalizat în 2023), toate la reviste din zonele Q1 şi Q2.

- Alte 4 articole sunt în stadiu avansat de elaborare, urmând să fie trimise spre publicare în viitorul apropiat.

- Un articol este în curs de elaborare.

- Rezultatele obţinute au fost prezentate în cadrul a 2 conferinţe internaţionale şi a unui seminar internaţional, toate fiind apreciate. Mai exact la

Hopf algebras and Tensor categories, Marburg (Germany), 22–26 mai 2023.

Hopf Days in Brussels (Belgium), 4–6 septembrie 2023.

Universite de Haute Alsace, Faculte des Sciences et Technique, Mulhouse (France), 14 septembrie 2023.

- Am îmbunătăţit aparatura din dotare prin achiziţionarea unor tablete şi a unei unităţi PC performante.

- Ne-am asigurat o bună parte din baza materială necesară producerii şi diseminării articolelor de specialitate.

- Bugetul alocat acestei etape a fost cheltuit în totalitate.

III. Rezumat executiv al activităţilor realizate în perioada de implementare

În a doua etapă a proiectului au fost trimise spre publicare (la reviste cotate Q1 şi Q2) 3 articole de specialitate, alte 4 fiind în curs (avansat) de elaborare. Pe scurt, rezultatele obţinute în cadrul acestei etape sunt următoarele:

- descrierea antipodului unui grup quasi-cuantic (qQG pe scurt) cu proiecţie slabă şi forma acestuia după o deformare cu un 2-cociclu;

- o nouă perspectivă asupra teoriei deformării pentru algebrele asociative;

- definirea biprodusului dublu pentru grupurile quasi-Hopf;

- identificarea unui biprodus dublu cu un biprodus stâng şi/sau drept;

- deformări ale unui biprodus dublu prin 2-cociclii obţinuţi din perechi aproape duale strâmbe în categorii de module Yetter-Drinfeld;

- definirea procesului de dublă bozonizare pentru un qQG;

- definirea modulelor Yetter-Drinfeld de tip liber;

- definirea relaţiilor Serre pentru un qQG;

- introducerea grupurilor quasi-cuantice de tip Drinfeld-Jimbo, generalizarea lor şi legăturile dintre acestea şi alte qQG-uri ce există în literatura de specialitate;

- infirmarea transportului anumitor proprietăţi de la algebra graduată la componenta sa trivială;

- obţinerea de noi clase de qQG-uri de rang 2;

- definirea algebrelor Nichols în cazul quasi-Hopf şi detrminarea acestora în anumite situaţii particulare;

- un studiu al injectivităţii pentru C^*-algebre locale.

O mare parte din rezultatele menţionate mai sus au fost prezentate în cadrul a 2 conferinţe internaţionale şi a unui seminar ştiintific local, şi anume:

- 2 prezentări la ”Hopf algebras and Tensor categories”, Marburg (Germany), 22–26 mai 2023.
- 1 prezentare la ”Hopf Days in Brussels”, Brussels (Belgium), 4–6 septembrie 2023.
- 1 prezentare la Universite de Haute Alsace, Faculte des Sciences et Technique, Mulhouse (France), 14 septembrie 2023.

Data,

Director de proiect,

Prof. dr. Daniel Bulacu