Proiect: CNCSIS PN-III-P4-PCE-2021-0282, contract nr. 47/2022
"Quasi Quantum Groups and Monoidal Categories"
Director: D. Bulacu
RAPORT ŞTIINŢIFIC, NOIEMBRIE 2024

Dintre articolele raportate în anul 2023 ca fiind trimise spre publicare, în cursul anului 2024 au fost acceptate următoarele (primul într-o revistă din zona Q1 iar cel de-al doilea într-o revistă din zona Q2):

[1] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, L. Năstăsescu, Picard groups of quasi-Frobenius algebras and a question on Frobenius strongly graded algebras, acceptată spre publicare în Publicacions Matemàtiques.

[2] D. Bulacu, D. Popescu, B. Torrecillas, Double wreath quasi-Hopf algebras, Journal of Algebra **662** (2025), 1–71.

([2] a fost declarat în anul 2022 ca fiind în stadiu avansat de elaborare, a fost trimis spre publicare în anul 2023 şi acceptat spre publicare în anul 2024.)

De asemenea, încă aşteptăm raport pentru articolele [3], [4]. Articolul [3] l-am declarat iniţial cu titlul

[3] D. Bulacu, B. Torrecillas, 1-Homology for coalgebras in Yetter-Drinfeld categories

(a fost elaborat şi trimis spre publicare în anul 2022 însă doar în 2024 am primit un răspuns şi acesta nu a fost favorabil; în consecinţă, a fost revizuit şi trimis din nou spre publicare, de data aceasta cu titlul "1-Cycle deformations for Yetter-Drinfeld coalgebras");

[4] D. Bulacu, D. Popescu, B. Torrecillas, Double biproduct quasi-quantum groups, trimis spre publicare în 2023.

Dintre lucrările declarate în 2023 ca fiind în stadiu avansat de elaborare, au fost trimise spre publicare în 2024

[5] A. Makhlouf, D. Ştefan, On deformation theory of associative algebras in monoidal categories;

[6] M. Joiţa, G.I. Simon, Injective envelopes for locally C^*-algebras;

[7] D. Bulacu, M. Misurati, Biproduct quasi-quantum groups of rank 2.

Lucrarea

[8] D. Bulacu, B. Torrecillas, The quasi-Hopf analog of the Drinfeld-Jimbo quantum groups, declarată în stadiu avansat de elaborare în anul 2023, a fost considerabil îmbunătăţită în 2024 şi urmează ca, în cel mai scurt timp, să fie trimisă spre publicare. Într-o situaţie similară se găseşte şi lucrarea

[9] D. Bulacu, C. Menini, M. Misurati, Quasi-quantum groups obtained from Nichols algebras

of diagonal type.

Cercetarea pe temele propuse în proiect pentru anul 2024 s-a concretizat în finalizarea şi trimiterea spre publicare a lucrărilor menţionate mai sus, precum şi în elaborarea a 6 lucrări noi, dintre care două au fost acceptate deja spre publicare (în reviste din zona Q2) iar celelalte 4 sunt trimise spre publicare la reviste cu factor de impact ridicat (tot din zona Q2). Acestea sunt:

[10] C. Ospel, F. Panaite, P. Vanhaecke, Generalized NS-algebras, J. Pure Appl. Algebra **229** (2025), 107784;

[11] C. Boboc, S. Dăscălescu, L. van Wyk, Cyclic algebras, symbol algebras and gradings on matrices, Linear Algebra and its Applications **688** (2024), 157-178;

[12] M. Joiţa, The Shilov boundary for a local operator system, trimis spre publicare, arXiv preprint arXiv: 2409.10474;

[13] F. Panaite, Two-sided crossed products, trimis spre publicare, arXiv preprint arXiv: 2410.14908;

[14] F. Panaite, L-R crossed products, trimis spre publicare, arXiv preprint arXiv: 2410.08429.

[15] D. Bulacu, M. Misuratti, Quasi-Hopf algebras of dimension 6, trimis spre publicare, arXiv preprint arXiv: 2410.03476.

I. Descrierea ştiinţifică cu punerea în evidenţă a rezultatelor etapei anuale şi gradul de realizare a obiectivelor

Prin fiecare • de mai jos punem în evidenţă rezultatele obţinute în cadrul uneia dintre cele trei activităţi considerate în a treia etapă (anul 2024) a proiectului.

• Privitor la articolul [5], acesta a fost declarat în anul 2023 cu titlul "Deformations of algebraic structures in monoidal categories" şi ca fiind în stadiu avansat de elaborare; menţionăm că el vizează un obiectiv al proiectului din anul 2023 **(a se vedea obiectivele activităţii 2.2 din anul 2023)**. În forma trimisă spre publicare au fost făcute modificări majore și s-au adus îmbunătățiri semnificative din punct de vedere științific, comparativ cu versiunile anterioare. S-au adăugat rezultate complet noi (mai ales în ultima secțiune), altele au fost reformulate sau extinse. De asemenea, multe demonstrații au fost rescrise într-un mod mai clar. Raportarea de mai jos este disjunctă de ceea ce am declarat anterior vizavi de acest articol.

Deformarea structurilor matematice este o metodă puternică în Matematică și Fizică, prin care se încearcă să se înțeleagă cum se poate modifica *continuu* un obiect matematic dat, păstrând în același timp proprietățile sale esențiale. Rădăcinile teoriei deformărilor se regăsesc în lucrările lui Fröhlicher-Nijenhuis și Kodaira-Spencer. Totuși, Gerstenhaber a fost cel care a creat cadrul modern pentru studierea deformărilor, în special pentru algebrele asociative peste un corp $\Bbbk$. El a propus ca printr-o deformare a unei algebre asociative A cu multiplicare m să se înțeleagă o serie formală de puteri: $m_t := \sum_{n=0}^{\infty} m_n t^n$ care este asociativă.

Gerstenhaber a demonstrat că între teoria deformărilor și algebra omologică există o strânsă legătură, deformările algebrelor asociative fiind controlate de coomologia Hochschild. Al doilea grup de coomologie Hochschild $\mathrm{HH}^2(A, A)$ joacă un rol crucial în clasificarea claselor de echivalență de deformări de un tip special (infinitezimale). Existența deformărilor este echivalentă cu anularea unei anumite clase de coomologie în $\mathrm{HH}^3(A, A)$.

Dintre multiplele aplicații remarcabile ale teoriei deformărilor în Algebră, Geometrie și Fizică, amintim aici construcția algebrelor anvelopante cuantizate, care în cele din urmă au condus la apariția grupurilor cuantice.

În acest articol studiem teoria deformărilor dintr-o perspectivă nouă, bazată pe teoria categoriilor monoidale liniare, în combinație cu teoria coalgebrelor (cocomutative). Punctul de plecare al abordării noastre îl constituie observația simplă că deformările definite de Gerstenhaber (pe care le vom numi în continuare clasice), pot fi privite ca algebre într-o anumită categorie monoidală. Deci, în ultimă instanță, studiul deformărilor se transformă într-o problemă privind structura acestor algebre.

Obiectivul nostru principal este extinderea teoriei deformărilor clasice, la un context cât mai general cu putință. Pentru orice categorie monoidală liniară $\mathcal{M}$ și orice morfism de coalgebre cocomutative $\iota : C \to \widetilde{C}$, definim un functor monoidal $\iota^* : \mathcal{M}_{\widetilde{C}} \to \mathcal{M}_C$. În cazul nostru, printr-o ι-deformare a unei algebre (A, m) în $\mathcal{M}_C$ înțelegem o algebră din fibra lui ι^* peste cea dată (alegând potrivit coalgebra și morfismul, se recuperează definiția clasică).

Demersul nostru presupune mai multe etape de studiu. Fixăm $\iota : C \to \widetilde{C}$ și $\mathcal{M}$ ca mai sus.

1. Categoria $\mathcal{M}_C$: este construită în secțiunea a doua a articolului. Prin definiție, are aceleași obiecte ca și $\mathcal{M}$, dar mulțimea morfismelor sale este dată de egalitatea $\mathcal{M}_C(X, Y) = \mathcal{V}(C, \mathcal{M}(X, Y))$, unde $\mathcal{V}$ reprezintă categoria spațiilor vectoriale. Construcția, după cum am precizat deja, este functorială. Mai important, deoarece C este cocomutativă, admite o structură monoidală. Alte proprietăți utile ale morfismelor acestei categorii (cum ar fi o formă mai generală a Lemei Takeuchi) sunt de asemenea demonstrate.

2. Rezultate necesare de teoria coalgebrelor: pentru a crește generalitatea, definim conceptul de clasa admisibila de coalgebre. Coalgebrele dintr-o astfel de clasă $\mathcal{T}$, trebuie gândite ca fiind de un anumit tip particular (i.e. se găsesc în $\mathcal{T}$ dacă și numai dacă satisfac o serie de proprietăți date). Clasa coalgebrelor cocomutative servește drept prototip. Un alt exemplu util este clasa coalgebrelor cocomutative punctate. Suntem interesați de clasele admisibile deoarece, acestea sunt închise în raport cu anumite operații efectuate în categoria coalgebrelor (spre exemplu sumele directe de coalgebre din $\mathcal{T}$ rămân în $\mathcal{T}$). Fiind dată clasa $\mathcal{T}$, demonstrăm următoarea teoremă.

Teorema 3.4. *Pentru orice spațiu vectorial V există întotdeauna o coalgebră coliberă de tip $\mathcal{T}$.*

Pentru a ușura studiul ι-deformărilor relaxăm definiția acestora considerând multiplicarea unei algebre doar ca funcție liniară, uitând proprietatea de asociativitate. Obținem astfel conceptul de ι-factorizare a unei funcții liniare $f : C \to V$. Factorizările, la rândul lor, sunt organizate sub forma unui prefascicol $\mathcal{F}_f : (C \downarrow \mathcal{T}) \to \mathcal{S}$. Aici, $\mathcal{S}$ reprezintă categoria mulțimilor, iar $(C \downarrow \mathcal{T})$ este categoria coslice a lui $\mathcal{T}$ sub C. Obiectele acesteia sunt perechile (D, σ), unde D este o coalgebră în $\mathcal{T}$ și σ este un morfism de coalgebre de la C la D. Morfismele în $(C \downarrow \mathcal{T})$ sunt cele naturale. În demonstrația rezultatului următor coalgebrele colibere de tip $\mathcal{T}$ joacă un rol crucial.

Teorema 3.9. *Prefascicolul $\mathcal{F}_f$ este reprezentabil.*

O caracterizare a acestui prefascicol este dată, de asemenea, în Teorema 3.11. Proprietățile claselor admisibile ne permit ca în Teorema 3.15 să deducem în mod automat că anumite coalgebre au proprietățile dorite.

2. Deformări C-ale algebrelor: Rezultatele obținute pentru ι-factorizări sunt folosite acum pentru a arăta că ι-deformările au proprietăți asemănătoare. Spre exemplu, pentru orice algebră (A, m) din $\mathcal{M}_C$, există un prefascicol $\mathcal{D}_m : (C \downarrow \mathcal{T}) \to \mathcal{S}$, care asociază unui obiect $(\widetilde{C}, \iota)$ din categoria coslice a lui $\mathcal{T}$ peste C, mulțimea ι-deformărilor lui (A, m). Rezultatul central al acestei părți este următorul.

Teorema 4.10. *Prefascicolul $\mathcal{D}_m$ este reprezentabil.*

Caracterizări echivalente ale prefascicolului $\mathcal{D}_m$ sunt date în Teorema 4.7, iar în Teorema 4.10 se arată că dacă C este punctată sau conexă, deformările sunt controlate de coalgebre de același tip.

3. Extensii de coalgebre: Am menționat deja că există o conexiune strânsă între teoria deformărilor clasice și algebra omologică, realizată prin intermediul coomologiei Hochschild. Partea a doua a articolului este dedicată identificării coomologiei care guvernează ι-deformările unei algebre (A, m) în $\mathcal{M}_C$.

Acum $\iota : C \to \widetilde{C}$ este un morfism între două coalgebre cocomutative, care definește o extensie de coalgebre; a se vedea subsecțiunea 5.1 pentru detalii. Conform teoriei extensiilor de coalgebre se știe că structura de coalgebră a lui $\widetilde{C}$ se recuperează complet din comultiplicarea lui C, un anumit C-bicomodul X și un 2-cociclu $\omega : X \to C^{\otimes 2}$. Cu ajutorul acestor date construim în subsecțiunea 5.1 un complex de colanțuri $\mathrm{C}^*_X(A, m)$ ale cărui diferențiale sunt notate cu d^*_X. Legătura dintre coomologie și deformări se face prin intermediul soluțiilor ecuației Maurer-Cartan generalizată:

$$d^2_X(\widetilde{m}_X) = \zeta.$$

Obstrucția la deformare $\zeta : X \to \mathcal{M}(A^{\otimes 3}, A)$ se construiește din m și ω ca în subsecțiunea 5.2. Notăm mulțimea ι-deformărilor și mulțimea claselor lor de echivalență cu $\mathcal{D}_m(\widetilde{C}, \iota)$ și, respectiv, $\mathcal{D}_m(\widetilde{C}, \iota)/_\sim$. Se poate enunța acum un alt rezultat central din lucrare.

Teorema 4.10. *Cu notația de mai sus avem:*

(a) Obstrucția ζ este întotdeauna un 3-cociclu în $\mathrm{C}^*_X(A, m)$.

(b) Clasa lui ζ este trivială dacă și numai dacă $\mathcal{D}_m(\widetilde{C}, \iota) \neq \emptyset$.

(c) Există o corespondență bijectivă între $\mathcal{D}_m(\widetilde{C}, \iota)/_\sim$ și $\mathrm{H}^2_X(A, m)$.

4. Cazuri particulare: Mai multe aplicații sunt discutate în secțiunea finală a articolului. O atenție deosebită este acordată cazului în care extensia provine dintr-o coalgebră cocomutativă graduată $D = \oplus_{i \in \mathbb{N}} D^i$, luând $C = \oplus_{i<n} D^i$ și $\widetilde{C} = \oplus_{i \leq n} D^i$, pentru un $n \geq 1$ dat. Cazul special $n = 1$ corespunde ι-deformărilor pe care le numim infinitezimale. Pentru detalii, a se vedea subsecțiunile 6.1 și 6.2.

Presupunând că spațiul vectorial $m(D^0)$ are dimensiunea 1, vom spune că m este de rang 1. Proprietățile deformărilor în acest caz sunt rezumate în Teorema 6.4. Un alt caz important este discutat în Teorema 6.6, unde considerăm acele extensii de coalgebre pentru care X este complet reductibil, adică poate fi scris ca o sumă directă de subcomodule de dimensiune 1. De exemplu, dacă D^0 este punctată și cosemisimplă, atunci X este complet reductibil, conform Corolarului 6.7. $D = \Bbbk[t_1, \ldots, t_r]$, al deformărilor clasice cu r parametri, este analizat în Corolarul 6.8.

• Rezultatele din lucrarea [6] au legătură cu obiective asumate în cadrul **activităţii 3.1 din anul 2024**. El a fost raportat în anul 2023 ca fiind în stadiu avansat de elaborare, însă anul acesta a fost trimis spre publicare. Conţinutul articolului a fost îmbunătăţit. Mai exact, s-au adăugat exemple noi şi s-a arătat că "înfăşurătoarea" injectivă a unei C^*-algebrei locale Fréchet cu unitate $\mathcal{A}$ este limita proiectivă a "înfăşurătoarelor" injective a C^*-algebrelor care apar în descompunerea Arens-Michael a lui $\mathcal{A}$.

• Lucrarea [7] este relevantă în contextul **activităţii 2.2 din anul 2023**; ea a fost declarată în anul 2023 ca fiind în stadiu avansat de elaborare, însă a fost finalizată şi trimisă spre publicare în 2024. Rezultatele noi, ce fac ca lucrarea să fie substanţial îmbunatăţită în comparaţie cu versiunea din 2023, sunt următoarele.

Folosind tehnica de ridicare, am dat o nouă demonstraţie clasificării gruprilor quasi-cuantice (qQG, pe scurt) de dimensiune 4. În cazul semisimplu, acestea sunt algebre Hopf grupale definite de un grup G cu 4 elemente ce sunt privite ca şi qQs via un 3-cociclu netrivial al lui G. În cazul nesemisimplu, am considerat filtrarea dată de puterile radicalului Jacobson J ale unui qQG H. Am demonstrat că H este basic (toate rerezentările sale ireductibile sunt 1-dimensionale), fapt ce ne asigură că J este un ideal quasi-Hopf al lui H. Prin urmare, algebra graduată $\mathrm{gr}(H)$ definită de filtrarea dată de J este un qQG cu proiecţie, deci un biprodus. Utilizând acum descrierea algebrelor braided de dimensiune 2 găsită anterior, am demonstrat că $\mathrm{gr}(A)$ se identifică (ca şi qQG) cu o twistare a algebrei 4-dimensionale a lui Sweedler (notată H_4). Prin ridicare, am arătat că H este de asemenea o twistare a lui H_4, fapt ce încheie clasificarea în dimensiune 4.

În plus, am revizuit exemplele anterioare. Mai întâi, am înlocuit grupul ciclic cu un grup abelian finit arbitrar G şi, prin urmare, qQG-ul cu algebra de funcţii a lui G. Surprinzător, rezultatele obţinute în acest caz s-au putut formula în termeni de reprezentări proiective ale lui G. În al doilea rând, am considerat exemple în care qQG-ul nu este comutativ, mai exact, l-am luat ca fiind grupul dublu diedral. Am considerat acest grup fiindcă pentru el se cunosc, explicit, reprezentanţi pentru 3-cociclurile sale.

• Lucrarea [8] este în strânsă legătură atât cu **obiectivele activităţii 2.1 din planul de realizare al proiectului pe anul 2023** cât şi cu **obiectivele activităţii 3.2 din planul de realizare al proiectului pe anul 2024**. Mai jos prezentăm rezultatele ştiinţifice noi pe care le-am adăugat lucrării [8].

Primul lucru pe care l-am modificat a fost definirea multiplicării unei algebre, pe care am numit-o quasi-liberă, într-o categorie de module Yetter-Drinfeld (YD pe scurt) peste un qQG H. Sunt două versiuni, stânga şi dreapta, pe care le-am definit. Pe scurt, sunt algebre aproape libere, aproape fiindcă asociativitatea multiplicării trebuie controlată de către reasociatorul Φ al lui H. Primul obstacol pe care a trebuit să-l evităm a fost buna definire, iar acest lucru s-a putut obţine din teorema de coerenţă a lui Mac Lane. Al doilea obstacol a fost definirea structurii de modul YD pentru o astfel de algebră. Este de remarcat aici faptul că, aceasta structură este definită de o familie de elemente în grupul Picard, notat $\mathcal{Y}D_1$, al lui ${}^H_H\mathcal{Y}D$. Algebrele quasi-libere astfel construite sunt unice cu anumite proprietăţi; altfel spus, satisfac proprietăţi de universalitate ce permit definirea structurii braided a lor. Mai mult, acestea sunt de tip shuffle (amestecat), aşa cum am anticipat. Utilizând argumente combinatorice, ce ţin de shuffle-uri, am determinat explicit comultiplicarea şi antipodul a ceea ce am numit algebră Hopf braided quasi-liberă.

Privitor la versiunea quasi-cuantică a grupurilor cuantice Drinfeld-Jimbo, iniţial le-am definit cu ajutorul unei R-matrice pentru un qQG H şi a unei date Cartan. Am realizat însă că acest caz nu acoperă nucleele cuantice Frobenius-Lusztig, iar pentru a acoperi şi acest caz am înlocuit R-matricea cu o aşa numită semi R-matrice (un element ce păstrează doar o parte dintre proprietăţile unei R-matrice). La momentul actual am demonstrat că multe dintre qQG-urile ce există în literatură sunt cazuri particulare ale construcţiei noastre, în mod direct sau prin factorizări (cu relaţii de tip Serre sau de altă natură). În plus, am obţinut noi exemple în dimensiune infinită, toate fiind qQG-uri amestecate. Multe dintre aceste rezultate au fost deja prezentate în cadrul unor conferinţe internaţionale, fiind apreciate. Sunt încă două exemple în lucru, după ce se vor clarifica o să le includem în lucrare şi, cât mai curând posibil, lucrarea [8] se va trimite spre publicare.

• Lucrarea [9] din lista de mai sus vizează **activităţea 2.2 din anul 2023** şi **activitatea 3.2 din anul 2024**. Mai exact, scopul este de a obţine exemple de qQg-uri amestecate cu ajutorul algebrelor Nichols. În plus faţă de ceea ce am raportat în anul 2023, am reuşit să descriem algebra Nichols în cazul diagonal. Aşa cum am raportat anterior, contrar cazului clasic, sunt două posibilităţi ce pot fi văzute ca şi caz diagonal. Ambele cazuri au fost considerate, biprodusele corespunzătoare lor fiind calculate în mod explicit. Din nou, apar dificultăţi de calcul datorate formulelor care apar; încercăm însă să le evităm considerând exemple concrete. Fiindcă rezultatele obţinute sunt într-o fază nu îndeajuns de avansată, dorim să nu ataşăm deocamdată fişierul articolului ce conţine rezultatele mai sus menţionate.

• Lucrarea [10] vizează **activitatea 3.2 din anul 2023**, contribuind la obţinerea a noi clase de qQG-uri de tip shuffle. Forma finală a lucrării a fost obţinută în timpul derulării proiectului. În versiunea iniţială a lucrării erau studiate anumite clase de algebre ce generalizează algebrele dendriforme, numite NS-algebre, corespunzând oricărei clase de algebre definite de relaţii multiliniare, precum şi operatori de tip Rota-Baxter şi Nijenhuis ce corespund în mod firesc acestor clase. Raportul referentului a fost pozitiv, însă au fost solicitate anumite îmbunătăţiri precum şi mai multe clase de exemple. Astfel, in versiunea finală a lucrării au fost aduse îmbunătăţirile solicitate şi a fost descris explicit cum arată NS-algebrele corespunzând claselor de algebre Jordan, respectiv Poisson.

• Lucrarea [11] conţine rezultate ce le completează pe cele obţinute în cadrul **activităţii 2.2** din anul 2023 dar în acelaşi timp oferă informaţii şi exemple importante în ceea ce priveşte obiectivele **activităţii 3.2** din anul 2024, întrucât algebrele graduate produc exemple de module Yetter-Drinfeld peste algebra grupală şi, astfel, au legătură cu ”cazul diagonal” din teoria algebrelor Nichols. Rezultatele centrale ale lucrării [11] sunt următoarele.

Fie F un corp comutativ. Fie $F \subset K$ o extindere Galois de grad $s \geq 2$ astfel încât grupul Galois $\mathrm{Gal}(K/F)$ este ciclic. Fie σ un generator al lui $\mathrm{Gal}(K/F)$, şi fie $a \in F^*$. Algebra ciclică asociată $(K/F, \sigma, a)$ este

$$(K/F, \sigma, a) = K \oplus Kx \oplus \ldots \oplus Kx^{s-1},$$

cu relaţiile $x^s = a$ şi $xb = \sigma(b)x$ pentru orice $b \in K$. Aceasta are o C_s-graduare, cu componenta de grad ω^i fiind Kx^i, pentru orice $0 \leq i \leq s-1$, unde $C_s =< \omega >$. Notăm această algebră C_s-graduată cu $D_1(K/F, \sigma, a)$. Am demonstrat:

Propoziţia A. *Clasele de echivalenţă de C_s-graduări pe $\mathrm{M}_s(F)$ produse din graduări de tip $D_1(K/F, \sigma, a)$ sunt în bijecţie cu tipurile de izomorfism de extinderi Galois de grad s ale lui F.*

Presupunem acum că F conţine o rădăcină primitivă de ordin s a unităţii, fie aceasta ε. Fie $C_s \times C_s = < \omega > \times < \rho >$ produs de două grupuri ciclice de ordin s, şi fie $a, b \in F^*$. Definim algebra $C_s \times C_s$ - graduată $D_2(F,\varepsilon,a,b)$ cu generatori x, y şi relaţii

$$x^s = a,\ y^s = b,\ xy = \varepsilon yx,$$

cu graduarea $D_2(F,\varepsilon,a,b)_{\omega^i\rho^j} = Fy^ix^j$ pentru orice $0 \leq i, j \leq s-1$. Demonstrăm următoarea:

Teorema B. *$D_2(F,\varepsilon,a,b)$ este izomorfă cu $\mathrm{M}_s(F)$ dacă şi numai dacă $a \in N_{K_b/F}(K_b)$. Tipurile de izomorfism de algebre $C_s \times C_s$ - graduate de tip $D_2(F,\varepsilon,a,b)$ sunt în bijecţie cu mulţimea $U(\mathbb{Z}_s) \times F^*/(F^*)^s \times F^*/(F^*)^s$, în timp ce clasele de echivalenţă de astfel de graduări sunt clasificate de orbitele unei anumite acţiuni a lui $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_s)$ pe $F^*/(F^*)^s \times F^*/(F^*)^s$. Tipurile de izomorfism de algebre $C_s \times C_s$ - graduate induse pe $\mathrm{M}_s(F)$ de graduări de tip $D_2(F,\varepsilon,a,b)$ sunt în bijecţie cu $U(\mathbb{Z}_s) \times \mathcal{E}(F,s)$, unde $\mathcal{E}(F,s)$ este $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_s)$-submulţimea lui $F^*/(F^*)^s \times F^*/(F^*)^s$ constând din perechi $(\overline{a},\overline{b})$ cu proprietatea $a \in N_{K_b/F}(K_b)$, în timp ce clasele de echivalenţă ale acestora sunt clasificate de orbitele lui $\mathcal{E}(F,s)$.*

Aceste rezultate sunt utilizate pentru a clasifica toate graduările pe algebra $\mathrm{M}_p(F)$, unde p este un număr prim şi F este un corp comutativ oarecare.

Teorema C. *Fie p un număr prim. Atunci orice graduare pe algebra $\mathrm{M}_p(F)$ este izomorfă cu una din următoarele 3 tipuri:*
(**I**) *O graduare bună;*
(**II**) *O graduare indusă de o $D_1(K/F,\sigma,1)$ Clasele de echivalenţă de astfel de graduări sunt în bijecţie cu tipurile de izomorfism de extinderi Galois de grad p ale lui F;*
(**III**) *O graduare indusă de o $D_2(F,\varepsilon,a,b)$ pentru o rădăcină de ordin p a unităţii $\varepsilon \neq 1$, şi elemente $a, b \in F^*$ care satisfac o anumită condiţie. Clasele de echivalenţă de astfel de graduări sunt în bijecţie cu orbitele acţiunii lui $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ pe $\mathcal{E}(F,p)$. Graduări de acest tip nu există dacă F nu conţine rădăcini de ordin p ale unităţii.*

• Lucrarea [12] vizează obiectivele **activităţii 3.1 din planul de realizare al proiectului pe anul 2024**.

Fie $\mathcal{M}$ un subspaţiu liniar al C^*-algebrei $C(X)$ a tuturor funcţiilor continue pe un spaţiu compact Hausdorff X, care separă punctele lui X şi conţine constantele. Frontiera Choquet pentru $\mathcal{M}$ este mulţimea tuturor elementelor $x \in X$ cu proprietatea că există o singură reprezentare ireductibilă a lui $C(X)$ care extinde aplicaţia liniară $\tau_x : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$, $\tau_x(f) = f(x)$. O submulţime $K \subseteq X$ cu proprietatea că maximul modulului fiecărei funcţii din $\mathcal{M}$ este atins pe K este numită mulţime frontieră pentru $\mathcal{M}$. Dacă K este o mulţime frontieră pentru $\mathcal{M}$, atunci $\mathcal{J} = \{f \in C(X)/\ f|_K = 0\}$ este un $*$-ideal bilateral, închis în $C(X)$ şi aplicaţia canonică $\sigma : C(X) \to C(X)/\mathcal{J}$ este o izometrie completă pe $\mathcal{M}$. Cea mai mică mulţime închisă frontieră este numită frontiera Shilov a lui $\mathcal{M}$.

Arveson [*Subalgebras of C^*-algebras*, Acta Math. 123(1969), 141-224] extinde aceste noţiuni în cazul necomutativ. Un sistem de operatori este un subspaţiu autoadjunct $\mathcal{S}$ al unei C^*-algebre cu unitate care conţine unitatea acesteia. Noţiunea de reprezentare frontieră este o generalizare, în cazul necomutativ, a noţiunii de punct din frontiera Choquet a unui sistem de funcţii în $C(X)$. O reprezentare frontieră pentru $\mathcal{S}$ este o reprezentare ireductibilă a C^*-algebrei $C^*(\mathcal{S})$ generată de $\mathcal{S}$, a cărei restricţie la $\mathcal{S}$ are proprietatea unică de extensie. Un $*$-ideal bilateral închis $\mathcal{J}$ în $C^*(\mathcal{S})$ este un ideal frontieră pentru $\mathcal{S}$ dacă aplicaţia canonică $\sigma : C^*(\mathcal{S}) \to C^*(\mathcal{S})/\mathcal{J}$ este o izometrie completă pe $\mathcal{S}$. Un ideal frontieră pentru $\mathcal{S}$, care conţine toate idealele frontieră pentru $\mathcal{S}$, este numit frontiera Shilov a lui $\mathcal{S}$. În 2007, Arveson [*The noncommutative Choquet boundary*, J. Amer. Math. Soc. 21(2008)] arată că un sistem de operatori, separabil $\mathcal{S}$ are suficiente reprezentări frontieră, în sensul că $\left\|[s_{ij}]_{i,j=1}^n\right\| = \sup\left\{\left\|[\pi(s_{ij})]_{i,j=1}^n\right\|_{B(\mathcal{H}^{\oplus n})};\ \pi \text{ este o reprezentare frontieră pentru } \mathcal{S}\right\}$, iar idealul Shilov pentru S este intersecţia nucleelor reprezentărilor frontieră pentru S.

Effros şi Webster [*Operator analogues of locally convex spaces*, Operator Algebras and Applications, 163–207, Springer (1997)] au iniţiat un studiu pentru o versiune local convexă a spaţiilor de operatori, numindu-le spaţii locale de operatori. Dosiev [*Local operator spaces, unbounded operators and multinormed C^*-algebras,* J. Funct. Anal. 255(2008), 1724–1760] arată că orice spaţiu local de operatori se identifică cu un subspaţiu într-o C^*-algebră locală $C^*(\mathcal{D}_{\mathcal{E}})$. În lucrarea [*Local boundary representations for local operator systems*, J. Math. Anal. Appl. 535(2024),2,Paper No. 128146], am introdus noţiunea de reprezentare frontieră pentru un sistem de operatori local şi am investigat anumite proprietăţi ale reprezentărilor frontieră. În acest articol, introducem noţiunea de ideal frontieră Shilov pentru un sistem de operatori local $\mathcal{S}$ şi arătăm că, în cazul separabil, idealul frontieră Shilov pentru $\mathcal{S}$ este intersecţia nucleelor reprezentărilor frontieră admisibile pentru $\mathcal{S}$. De asemenea, arătăm că orice izometrie locală completă şi surjectivă, care păstrează unitatea, între sisteme de operatori locale metrizabile şi separabile cu idealul frontieră Shilov nul este implementată de un $*$-izomorfism local contractiv între C^*-algebrele locale generate de sistemele de operatori locale considerate.

• Lucrarea [13] are legătură cu **activităţile 3.1 şi 3.3 din anul 2024**. Rezultatele obţinute aici sunt următoarele.

Dacă A şi B sunt algebre asociative unitare iar $R : B \otimes A \to A \otimes B$ este o aplicaţie liniară ce satisface anumite condiţii (o astfel de aplicaţie R e numită aplicaţie de răsucire) atunci $A \otimes B$ devine algebră asociativă unitară cu o multiplicare definită în funcţie de R şi multiplicările lui A şi B; această structură de algebră este notată $A \otimes_R B$ şi este numită produs tensorial răsucit al lui A şi B via R. Produsele tensoriale răsucite pot fi iterate: date fiind trei produse tensoriale răsucite $A \otimes_{R_1} B$, $B \otimes_{R_2} C$ şi $A \otimes_{R_3} C$, s-a demonstrat într-o lucrare anterioară (P. Jara Martínez, J. López Peña, F. Panaite, F. Van Oystaeyen, On iterated twisted tensor products of algebras, *Internat. J. Math.* **19** (2008), 1053–1101) că o condiţie suficientă pentru a putea defini anumite aplicaţii de răsucire $T_1 : C\otimes(A\otimes_{R_1} B) \to (A\otimes_{R_1} B)\otimes C$ şi $T_2 : (B\otimes_{R_2} C)\otimes A \to A\otimes(B\otimes_{R_2} C)$ asociate lui R_1, R_2, R_3 şi care să ne asigure că algebrele $A\otimes_{T_2}(B\otimes_{R_2} C)$ şi $(A\otimes_{R_1} B)\otimes_{T_1} C$ sunt egale (această algebră este numită produsul tensorial răsucit iterat) poate fi dată în funcţie de R_1, R_2, R_3, anume, ele trebuie să satisfacă ecuaţia braid $(id_A\otimes R_2)\circ(R_3\otimes id_B)\circ(id_C\otimes R_1) = (R_1\otimes id_C)\circ(id_B\otimes R_3)\circ(R_2\otimes id_A)$.

O generalizare importantă şi substanţială a produsului tensorial răsucit este produsul încrucişat introdus de către Brzeziński în 1997 (şi care s-a dovedit a fi un exemplu relevant de produs coroană de algebre). Fiind dată o algebră asociativă unitară A, un spaţiu vectorial V înzestrat cu un element distins 1_V şi două aplicaţii liniare $\sigma : V\otimes V \to A\otimes V$ şi $R : V\otimes A \to A\otimes V$ satisfăcând anumite condiţii, produsul încrucişat este o anumită structură de algebră asociativă unitară pe $A\otimes V$, notată $A\otimes_{R,\sigma} V$. Într-o lucrare anterioară (F. Panaite, Iterated crossed products, *J. Algebra Appl.* **13** (2014), art. nr.1450036) s-a introdus o versiune "în oglindă" a produsului încrucişat, notat $W\overline{\otimes}_{P,\nu}D$ (unde D este o algebră asociativă, W este un spaţiu vectorial iar P, ν sunt anumite aplicaţii liniare), si s-a demonstrat că în anumite condiţii produsele încrucişate pot fi iterate, în sensul următor: dacă $W\overline{\otimes}_{P,\nu}D$ şi $D\otimes_{R,\sigma}V$ sunt două produse încrucişate iar $Q : V\otimes W \to W\otimes D\otimes V$ este o aplicaţie liniară ce satisface anumite condiţii, atunci se pot defini anumite aplicaţii $\overline{\sigma}$, $\overline{R}$, $\overline{\nu}$, $\overline{P}$ astfel încât să avem produsele încrucişate $(W\overline{\otimes}_{P,\nu}D)\otimes_{\overline{R},\overline{\sigma}} V$ şi $W\overline{\otimes}_{\overline{P},\overline{\nu}}(D\otimes_{R,\sigma} V)$ care în plus coincid ca algebre (această structură este numită produs încrucişat iterat). Cazuri particulare ale acestei construcţii sunt produsele tensoriale răsucite iterate de algebre si aşa-numitul produs smash bilateral peste o quasi-bialgebră.

În lucrarea [13], se introduce un alt tip de iterare pentru produse încrucişate. Anume, dacă A şi C sunt algebre asociative unitare iar V este un spaţiu vectorial înzestrat cu un element distins 1_V, şi dacă avem aplicaţii liniare $R_1 : V\otimes A \to A\otimes V$, $R_2 : C\otimes V \to V\otimes C$, $R_3 : C\otimes A \to A\otimes C$ şi $E : V\otimes V \to A\otimes V\otimes C$ satisfăcând anumite condiţii, atunci putem defini anumite produse încrucişate $A\otimes_{R,\sigma}(V\otimes C)$ şi $(A\otimes V)\overline{\otimes}_{P,\nu}C$ care în plus coincid ca algebre. Această structură de algebră asociativă unitară pe $A\otimes V\otimes C$ este numită *produsul încrucişat bilateral* dat de aplicaţiile R_1, R_2, R_3, E. Mai precis, avem următorul rezultat:

Teorema 1. Fie $(A, \mu_A, 1_A)$ şi $(C, \mu_C, 1_C)$ două algebre asociative unitare şi V un spaţiu vectorial înzestrat cu un element distins 1_V. Presupunem că avem aplicaţii liniare (cu respectivele notaţii)

$$R_1 : V\otimes A \to A\otimes V, \quad R_1(v\otimes a) = a_{R_1}\otimes v_{R_1} = a_{r_1}\otimes v_{r_1},$$

$$R_2 : C\otimes V \to V\otimes C, \quad R_2(c\otimes v) = v_{R_2}\otimes c_{R_2} = v_{r_2}\otimes c_{r_2},$$

$$R_3 : C\otimes A \to A\otimes C, \quad R_3(c\otimes a) = a_{R_3}\otimes c_{R_3} = a_{r_3}\otimes c_{r_3},$$

$$E : V\otimes V \to A\otimes V\otimes C, \quad E(v\otimes v') = E_A(v, v')\otimes E_V(v, v')\otimes E_C(v, v'),$$

pentru $a\in A$, $v, v'\in V$, $c\in C$, astfel încât următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(i) R_3 este aplicaţie de răsucire între A şi C, adică, pentru $a, a' \in A$ and $c, c' \in C$:

$$R_3(c \otimes 1_A) = 1_A \otimes c, \quad R_3(1_C \otimes a) = a \otimes 1_C, \tag{0.1}$$

$$(aa')_{R_3} \otimes c_{R_3} = a_{R_3} a'_{r_3} \otimes (c_{R_3})_{r_3}, \tag{0.2}$$

$$a_{R_3} \otimes (cc')_{R_3} = (a_{R_3})_{r_3} \otimes c_{r_3} c'_{R_3}; \tag{0.3}$$

(ii) $R_1(1_V \otimes a) = a \otimes 1_V$, $R_1(v \otimes 1_A) = 1_A \otimes v$, pentru $a \in A$, $v \in V$;

(iii) $R_2(c \otimes 1_V) = 1_V \otimes c$, $R_2(1_C \otimes v) = v \otimes 1_C$, pentru $v \in V$, $c \in C$;

(iv) $E(1_V \otimes v) = E(v \otimes 1_V) = 1_A \otimes v \otimes 1_C$, pentru $v \in V$;

(v) următoarele relaţii sunt satisfăcute:

$$R_1 \circ (id_V \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes id_V) \circ (id_A \otimes R_1) \circ (R_1 \otimes id_A), \tag{0.4}$$

$$R_2 \circ (\mu_C \otimes id_V) = (id_V \otimes \mu_C) \circ (R_2 \otimes id_C) \circ (id_C \otimes R_2), \tag{0.5}$$

$$(id_A \otimes R_2) \circ (R_3 \otimes id_V) \circ (id_C \otimes R_1) = (R_1 \otimes id_C) \circ (id_V \otimes R_3) \circ (R_2 \otimes id_A), \tag{0.6}$$

$$\begin{aligned}&(\mu_A \otimes id_V \otimes id_C) \circ (id_A \otimes E) \circ (R_1 \otimes id_V) \circ (id_V \otimes R_1)\\ &\quad = (\mu_A \otimes id_V \otimes id_C) \circ (id_A \otimes R_1 \otimes id_C) \circ (id_A \otimes id_V \otimes R_3) \circ (E \otimes id_A),\end{aligned} \tag{0.7}$$

$$\begin{aligned}&(id_A \otimes id_V \otimes \mu_C) \circ (E \otimes id_C) \circ (id_V \otimes R_2) \circ (R_2 \otimes id_V)\\ &\quad = (id_A \otimes id_V \otimes \mu_C) \circ (id_A \otimes R_2 \otimes id_C) \circ (R_3 \otimes id_V \otimes id_C) \circ (id_C \otimes E),\end{aligned} \tag{0.8}$$

$$\begin{aligned}&(\mu_A \otimes id_V \otimes \mu_C) \circ (id_A \otimes E \otimes id_C) \circ (R_1 \otimes id_V \otimes id_C) \circ (id_V \otimes E)\\ &\quad = (\mu_A \otimes id_V \otimes \mu_C) \circ (id_A \otimes E \otimes id_C) \circ (id_A \otimes id_V \otimes R_2) \circ (E \otimes id_V).\end{aligned} \tag{0.9}$$

Definim aplicaţiile liniare

$$\begin{aligned}
&R : (V \otimes C) \otimes A \to A \otimes (V \otimes C), \quad R = (R_1 \otimes id_C) \circ (id_V \otimes R_3),\\
&P : C \otimes (A \otimes V) \to (A \otimes V) \otimes C, \quad P = (id_A \otimes R_2) \circ (R_3 \otimes id_V),\\
&\sigma : (V \otimes C) \otimes (V \otimes C) \to A \otimes (V \otimes C),\\
&\sigma = (id_A \otimes id_V \otimes \mu_C) \circ (E \otimes \mu_C) \circ (id_V \otimes R_2 \otimes id_C),\\
&\nu : (A \otimes V) \otimes (A \otimes V) \to (A \otimes V) \otimes C,\\
&\nu = (\mu_A \otimes id_V \otimes id_C) \circ (\mu_A \otimes E) \circ (id_A \otimes R_1 \otimes id_V),
\end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned}
&R((v \otimes c) \otimes a) = (a_{R_3})_{R_1} \otimes (v_{R_1} \otimes c_{R_3}),\\
&P(c \otimes (a \otimes v)) = (a_{R_3} \otimes v_{R_2}) \otimes (c_{R_3})_{R_2},\\
&\sigma((v \otimes c) \otimes (v' \otimes c')) = E_A(v, v'_{R_2}) \otimes (E_V(v, v'_{R_2}) \otimes E_C(v, v'_{R_2}) c_{R_2} c'),\\
&\nu((a \otimes v) \otimes (a' \otimes v')) = (aa'_{R_1} E_A(v_{R_1}, v') \otimes E_V(v_{R_1}, v')) \otimes E_C(v_{R_1}, v'),
\end{aligned}$$

pentru $a, a' \in A$, $v, v' \in V$, $c, c' \in C$. Atunci avem produsele încrucişate $A \otimes_{R,\sigma} (V \otimes C)$ şi $(A \otimes V)\overline{\otimes}_{P,\nu} C$ şi un izomorfism de algebre între ele dat de identificarea trivială. Unitatea este $1_A \otimes 1_V \otimes 1_C$, iar multiplicarea (pentru $a, a' \in A$, $v, v' \in V$, $c, c' \in C$)

$$(a \otimes v \otimes c)(a' \otimes v' \otimes c') = a(a'_{R_3})_{R_1} E_A(v_{R_1}, v'_{R_2}) \otimes E_V(v_{R_1}, v'_{R_2}) \otimes E_C(v_{R_1}, v'_{R_2})(c_{R_3})_{R_2} c'.$$

Teorema anterioară admite următoarea reciprocă.

Teorema 2. Fie $(A, \mu_A, 1_A)$ şi $(C, \mu_C, 1_C)$ două algebre asociative unitare şi V un spaţiu vectorial înzestrat cu un element distins 1_V. Presupunem că pe $A \otimes V \otimes C$ avem o structură de algebră asociativă (cu multiplicarea notată cu $\cdot$) cu unitate $1_A \otimes 1_V \otimes 1_C$ astfel încât aplicaţiile

$$A \to A \otimes V \otimes C, \quad a \mapsto a \otimes 1_V \otimes 1_C,$$
$$C \to A \otimes V \otimes C, \quad c \mapsto 1_A \otimes 1_V \otimes c$$

sunt morfisme de algebre, şi în plus

$$(1_A \otimes v \otimes 1_C) \cdot (a' \otimes 1_V \otimes 1_C) = \sum_i a_i \otimes v_i \otimes 1_C, \tag{0.10}$$

$$(1_A \otimes 1_V \otimes c) \cdot (1_A \otimes v' \otimes 1_C) = \sum_j 1_A \otimes v_j \otimes c_j, \tag{0.11}$$

$$(1_A \otimes 1_V \otimes c) \cdot (a' \otimes 1_V \otimes 1_C) = \sum_l a_l \otimes 1_V \otimes c_l, \tag{0.12}$$

$$a \otimes v \otimes c = (a \otimes 1_V \otimes 1_C) \cdot (1_A \otimes v \otimes 1_C) \cdot (1_A \otimes 1_V \otimes c), \tag{0.13}$$

pentru $a, a' \in A$, $v, v' \in V$, $c, c' \in C$, unde $a_i, a_l \in A$, $v_i, v_j \in V$, $c_j, c_l \in C$ sunt nişte elemente. Atunci există aplicaţii liniare R_1, R_2, R_3, E satisfăcând condiţiile din teorema anterioară, iar structura de algebră dată pe $A \otimes V \otimes C$ coincide cu structura de produs încrucişat bilateral dat de aplicaţiile R_1, R_2, R_3, E.

În lucrare se prezintă apoi trei cazuri particulare de produs încrucişat bilateral prezente în literatură, anume: (i) produsul tensorial răsucit iterat de algebre; (ii) produsul încrucişat bilateral peste o quasi-bialgebră, introdus în lucrările F. Hausser, F. Nill, Diagonal crossed products by duals of quasi-quantum groups, *Rev. Math. Phys.* **11** (1999), 553–629, şi D. Bulacu, F. Panaite, F. Van Oystaeyen, Generalized diagonal crossed products and smash products for quasi-Hopf algebras. Applications, *Comm. Math. Phys.* **266** (2006), 355–399; (iii) o construcţie mai recentă, introdusă în lucrarea T. Ma, J. Li, H. Yang, S.-H. Wang, Double crossed biproducts and related structures, *Comm. Algebra* **50** (2022), 4517–4535.

• Lucrarea [14] este în strânsă concordanţă cu **activitatea 3.1 din anul 2024**.

Există în literatura de specialitate câteva construcţii de tipul următor: dată o algebră asociativă H si un spaţiu vectorial U, împreună cu anumite date suplimentare, se construieşte o structură de algebră asociativă pe $U \otimes H$. De exemplu, produsul tensorial răsucit de algebre şi produsul încrucişat Brzeziński sunt de acest tip. De asemenea, o generalizare a produsului tensorial răsucit de algebre introdusă în lucrarea M. Ciungu, F. Panaite, L-R-smash products and L-R-twisted tensor products of algebras, *Algebra Colloq.* **21**, 129–146 (2014), este de acest tip. Un alt exemplu este aşa-numitul produs L-R-smash $\mathcal{A}\natural H$, introdus în lucrarea F. Panaite, F. Van Oystaeyen, L-R-smash product for (quasi-) Hopf algebras, *J. Algebra* **309**, 168–191 (2007), unde H este o quasi-bialgebră iar $\mathcal{A}$ este o H-bimodul algebră.

În lucrarea [14] se introduce o construcţie foarte generală, care conţine toate aceste construcţii drept cazuri particulare. Anume, avem următorul rezultat:

Teorema 1. Fie $(H, \mu_H, 1_H)$ o algebră asociativă unitară şi U un spaţiu vectorial înzestrat cu un element distins 1_U. Presupunem că sunt date aplicaţii liniare (cu respectivele notaţii)

$$\begin{aligned}
&J : H\otimes U \to U\otimes H, \quad J(h\otimes u) = u_J\otimes h_J,\\
&T : U\otimes H \to U\otimes H, \quad T(u\otimes h) = u_T\otimes h_T,\\
&\gamma : U\otimes U \to U\otimes U\otimes H, \quad \gamma(u\otimes u') = \gamma_1(u,u')\otimes\gamma_2(u,u')\otimes\gamma_3(u,u'),\\
&\eta : U\otimes U \to U\otimes H\otimes H, \quad \eta(u\otimes u') = \eta_1(u,u')\otimes\eta_2(u,u')\otimes\eta_3(u,u').
\end{aligned}$$

Presupunem că următoarele condiţii sunt satisfăcute, pentru $u, u', u'' \in U$ şi $h, h' \in H$ (notăm cu j şi t copii ale lui J respectiv T):

$$\begin{aligned}
&J(h\otimes 1_U) = 1_U\otimes h, \quad J(1_H\otimes u) = u\otimes 1_H,\\
&T(u\otimes 1_H) = u\otimes 1_H, \quad T(1_U\otimes h) = 1_U\otimes h,\\
&\gamma(u\otimes 1_U) = u\otimes 1_U\otimes 1_H, \quad \gamma(1_U\otimes u) = 1_U\otimes u\otimes 1_H,\\
&\eta(u\otimes 1_U) = \eta(1_U\otimes u) = u\otimes 1_H\otimes 1_H,\\
&u_J\otimes (hh')_J = (u_J)_j\otimes h_j h'_J,\\
&u_T\otimes (hh')_T = (u_T)_t\otimes h_T h'_t,\\
&\eta_1(u_J, u'_j)\otimes\eta_2(u_J, u'_j)(h_J)_j\otimes\eta_3(u_J, u'_j) = \eta_1(u,u')_J\otimes h_J\eta_2(u,u')\otimes\eta_3(u,u'),\\
&\eta_1(u_t, u'_T)\otimes\eta_2(u_t, u'_T)\otimes(h_T)_t\eta_3(u_t, u'_T) = \eta_1(u,u')_T\otimes\eta_2(u,u')\otimes\eta_3(u,u')h_T,\\
&\eta_1(\eta_1(u,u'), u''_J)\otimes\eta_2(\eta_1(u,u'), u''_J)\eta_2(u,u')_J\otimes\eta_3(u,u')\eta_3(\eta_1(u,u'), u''_J)\\
&\quad = \eta_1(u_T, \eta_1(u',u''))\otimes\eta_2(u_T, \eta_1(u',u''))\eta_2(u',u'')\\
&\qquad \otimes\eta_3(u',u'')_T\eta_3(u_T, \eta_1(u',u'')),\\
&\gamma_1(u, u'_J)_T\otimes\gamma_2(u, u'_J)\otimes\gamma_3(u, u'_J)(h_J)_T\\
&\quad = \gamma_1(u_T, u')\otimes\gamma_2(u_T, u')_J\otimes(h_T)_J\gamma_3(u_T, u'),\\
&\gamma_1(u, \eta_1(u',u''))_T\otimes\gamma_2(u, \eta_1(u',u''))\otimes\gamma_3(u, \eta_1(u',u''))\eta_2(u',u'')_T\otimes\eta_3(u',u'')\\
&\quad = \gamma_1(\gamma_1(u,u'), u'')\otimes\eta_1(\gamma_2(u,u'), \gamma_2(\gamma_1(u,u'), u'')_J)
\end{aligned}$$

$$\otimes\eta_2(\gamma_2(u,u'),\gamma_2(\gamma_1(u,u'),u'')_J)\gamma_3(u,u')_J\gamma_3(\gamma_1(u,u'),u'')$$
$$\otimes\eta_3(\gamma_2(u,u'),\gamma_2(\gamma_1(u,u'),u'')_J),$$

$$\gamma_1(\eta_1(u,u'),u'')\otimes\gamma_2(\eta_1(u,u'),u'')_J\otimes\eta_2(u,u')\otimes\eta_3(u,u')_J\gamma_3(\eta_1(u,u'),u'')$$
$$=\eta_1(\gamma_1(u,\gamma_2(u',u''))_T,\gamma_1(u',u''))\otimes\gamma_2(u,\gamma_2(u',u''))$$
$$\otimes\eta_2(\gamma_1(u,\gamma_2(u',u''))_T,\gamma_1(u',u''))$$
$$\otimes\gamma_3(u,\gamma_2(u',u''))\gamma_3(u',u'')_T\eta_3(\gamma_1(u,\gamma_2(u',u''))_T,\gamma_1(u',u'')),$$

$$\gamma_1(u,\gamma_1(u',u'')_T)\otimes\gamma_2(u,\gamma_1(u',u'')_T)_J\otimes h'_J\gamma_3(u,\gamma_1(u',u'')_T)$$
$$\otimes\gamma_2(u',u'')\otimes\gamma_3(u',u'')h_T$$
$$=\gamma_1(u,u')\otimes\gamma_1(\gamma_2(u,u')_J,u'')_T\otimes h'_J\gamma_3(u,u')$$
$$\otimes\gamma_2(\gamma_2(u,u')_J,u'')\otimes\gamma_3(\gamma_2(u,u')_J,u'')h_T.$$

Definim pe $U\otimes H$ o multiplicare, prin

$$(u\otimes h)(u'\otimes h')=\eta_1(\gamma_1(u,u')_T,\gamma_2(u,u')_J)$$
$$\otimes\eta_2(\gamma_1(u,u')_T,\gamma_2(u,u')_J)h_J\gamma_3(u,u')h'_T\eta_3(\gamma_1(u,u')_T,\gamma_2(u,u')_J),$$

pentru $u,u'\in U$ şi $h,h'\in H$. Atunci această multiplicare este asociativă iar $1_U\otimes 1_H$ este unitatea. Această structură de algebră se numeşte *L-R-produs încrucişat* şi se notează $U\natural_{J,T,\gamma,\eta}H$.

În plus, se arată în lucrare că şi orice produs încrucişat iterat poate fi privit ca un L-R-produs încrucişat.

• În lucrarea [15] se clasifică qQG-urile de dimensiune 6 şi, implicit, categoriile finite tensoriale pentru care obiectele au dimensiunea Frobenius-Perron un număr întreg. Mai exact, am arătat că, în dimensiune 6, orice qQG este semisimplu. Tehnicile folosite sunt: descrierea anumitor algebre Hopf braided şi teoria ridicării. Astfel, am arătat că există 15 algebre quasi-Hopf în dimensiune 6 care nu sunt două câte două twist echivalente. Lucrarea [15] contribuie la realizarea obiectivelor **activităţii 3.1 din planul de realizare al proiectului pe anul 2024**.

Încheiem această parte a raportului făcând câteva observaţii:

(1). O primă versiune a lucrării [1] a fost elaborată în 2023. În urma referatelor primite de la referenţi, am revizuit lucrarea în 2024, adăugând mai multe rezultate şi îmbunătăţind altele, după cum urmează:

i). În versiunea iniţială a lucrării am arătat că dacă R este o algebră Frobenius, atunci orice izomorfism de R-bimodule $R^*\otimes_R R^*\to R$ este asociativ şi am ridicat problema dacă aceasta este adevărat şi pentru orice algebră quasi-Frobenius finit dimensională. În noua versiune am răspuns afirmativ acestei întrebări. Pentru aceasta am introdus o nouă secţiune (Section 3), unde am explicat că dacă R şi S sunt algebre echivalente Morita, atunci o echivalenţă monoidală este indusă între categoriile de bimodule peste R şi S. Mai mult, dacă R şi S sunt finit dimensionale, R^* şi S^* se corespund prin această echivalenţă. O consecinţă este că $\mathrm{Pic}(R) \simeq \mathrm{Pic}(S)$ şi ordinul lui $[R^*]$ în $\mathrm{Pic}(R)$ este egal cu ordinul lui $[S^*]$ în $\mathrm{Pic}(S)$.

ii). Ca o aplicaţie a Propoziţiei 3.2, am obţinut o demonstraţie mai scurtă a faptului că $\mathcal{R}^* \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^* \simeq \mathcal{R}$ ca $\mathcal{R}$-bimodule (unde $\mathcal{R}$ este algebra de dimensiune 9 a lui Nakayama). Astfel, am calculat automorfismul Nakayama ν al unei algebre bazice $\mathcal{S}$ a lui $\mathcal{R}$, am arătat că $\nu^2 = Id$, rezultând că $\mathcal{S}^*$ are ordin 2 în $\mathrm{Pic}(\mathcal{S})$. Din Corolarul 3.4, $\mathcal{R}^*$ are ordin 2 în $\mathrm{Pic}(\mathcal{R})$, astfel că $\mathcal{R}^* \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^* \simeq \mathcal{R}$.

iii). Am înlocuit demonstraţia calculatorie a faptului că $\dim_K (\mathcal{U}_i \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{V}_j) = 1$ cu o demonstraţie conceptuală, care foloseşte rezultate din teoria reprezentării.

(2). Lucrările [6, 12, 13, 14, 15] fac ca obiectivele **activităţii 3.1 din planul de realizare al proiectului pe anul 2024** să fie realizate în procent de 100%. Lucrările [8,9,10,11] fac ca obiectivele **activităţii 3.2 din planul de realizare al proiectului pe anul 2024** să fie realizate în procent de 100%. În fine, lucrările [2, 13] fac ca o bună parte dintre obiectivele **activităţii 3.3 din planul de realizare al proiectului pe anul 2024** să fie realizate; o altă contribuţie în acest sens este adusă de rezultate parţiale care le avem şi care, deocamdată, nu s-au concretizat în redactarea unui articol. Mai exact, s-au studiat (co)produse coroană definite de un qQG cu proiecţie slabă. Există (co)coroane ce definesc structuri monoidale şi care generalizează un biprodus. În cazul din urmă se ştie că acestea definesc un anumit tip de monade. Un rezultat asemănător pare să funcţioneze şi în cazul coroanelor duble (date de qQG-uri cu proiecţie slabă, aşa cum au fost ele descrise în [2]), caz în care studiul suveranităţii, balansării etc. se transferă asupra monadei (unde avem teoreme de caracterizare pentru aceste proprietăţi). Prin urmare, putem spune că, la momentul actual, obiectivele **activităţii 3.3 din planul de realizare al proiectului pe anul 2024** au fost realizate în procent de 90%. Avem însă convingerea că, până la sfârşitul acestui proiect (31.12.2024) şi acest obiectiv se va realiza în procent de 100%.

II. Sumar al progresului

- Obiectivele asumate în cadrul celor 3 activităţi din a.c. ale proiectului au fost realizate în procent de 100%, 100% şi, respectiv, de 90%. Până la sfârşitul etapei (31.12.2023), a treia activitate va fi realizată în procent de 100%, deci toate obiectivele acestei etape se vor concretiza în procent de 100%. Mai mult, diverse alte obiective ale proiectului au fost consolidate prin obţinerea de noi rezultate.

- Au fost acceptate spre publicare 4 articole, unul într-o revistă din zona Q1 şi 3 din reviste din zona Q2.

- Au fost trimise spre publicare alte 8 articole, toate la reviste din zonele Q1 şi Q2.

- Alte 2 articole sunt în stadiu de elaborare, urmând să fie trimise spre publicare în viitorul apropiat.

- Rezultatele obţinute au fost prezentate în cadrul a 2 conferinţe internaţionale şi a unui seminar local, toate fiind apreciate. Mai exact la

• Quantum groups, category theory and related topics, Bucureşti, 20–22 mai 2024.

• Seminar ştiinţific, Universitatea din Almeria (Spania), iunie 2024.

• Hopf algebras and monoidal categories, Ferrara (Italia), 3–6 septembrie 2024.

- Am îmbunătăţit aparatura din dotare prin achiziţionarea unui monitor PC şi a două SSD-uri performante.

- Ne-am asigurat o bună parte din baza materială necesară producerii şi diseminării articolelor de specialitate.

- Bugetul alocat acestei etape a fost cheltuit în totalitate.

III. Rezumat executiv al activităţilor realizate în perioada de implementare

În a treia etapă a proiectului au fost acceptate 4 articole spre publicare (1 în revistă din zona Q1 şi 3 din zona Q2), au fost trimise spre publicare (la reviste cotate Q1 şi Q2) 8 articole de specialitate, alte 2 fiind în curs de elaborare. Pe scurt, rezultatele obţinute în cadrul acestei etape sunt următoarele:

- deformări de algebre în sens Gerstenhaber în contexte extrem de generale;

- clasificarea qQG-urilor, şi implicit a categoriilor finit tensoriale pentru care dimensiunea Frobenius-Perron a fiecărui obiect este un număr întreg, de dimensiune 4;

- obţinerea, atât în caz comutativ cât şi necomutativ, de noi exemple de qQG-uri de tip biprodus şi shuffle (amestecat) ce sunt libere de rang 2;

- descrierea grupurilor braided quasi-libere cu ajutorul elementelor din grupul Picard;

- definirea grupurilor quasi-cuantice de tip Drinfeld-Jimbo pentru contexte mult mai generale, cu ajutorul noţiunii de semi R-matrice;

- lărgirea claselor de exemple de grupuri quasi-cuantice de tip Drinfeld-Jimbo, incluzând aici şi nucleele quasi-cuantice Frobenius-Lusztig;

- calculul algebrelor Nichols de tip diagonal şi descrierea qQG-urilor de tip shuffle determinate de către acestea;

- descrierea completă a NS-algebrelor corespunzând claselor de algebre Jordan, respectiv Poisson.;

- descrierea, până la un izomorfism, a algebrelor (de tip matrice) din anumite categorii grad-liniar monoidale;

- descrierea idealului frontieră Shilov pentru un sistem de operatori local $\mathcal{S}$;

- introducerea produsului încrucişat bilateral;

- introducerea L-R produsului încrucişat;

- clasificarea qQG-urilor, şi implicit a categoriilor finit tensoriale pentru care dimensiunea Frobenius-Perron a fiecărui obiect este un număr întreg, de dimensiune 6;

- definirea algebrelor Nichols în cazul quasi-Hopf şi determinarea acestora în anumite situaţii particulare;

- am caracterizat elementele din Grupul Picard al unei categorii de bimodule în cazul quasi-Frobenius finit dimensional.

O mare parte din rezultatele menţionate mai sus au fost prezentate în cadrul a 2 conferinţe internaţionale şi a unui seminar ştiintific local, şi anume:

- 1 prezentare la "Quantum groups, category theory and related topics", Bucureşti, 20–22 mai 2024.
- 1 prezentare în cadrul unui seminar ştiinţific organizat de către Universitatea din Almeria (Spania), iunie 2024.
- 2 prezentări la "Hopf algebras and monoidal categories", Ferrara (Italia), 3–6 septembrie 2024.

Data,

25.11.2024

Director de proiect,

Prof. dr. Daniel Bulacu