SINTEZA LUCRĂRII

Conform Anexei IIa a Actului Adițional Nr. 1 la Contractul 560/07.01.2009, pentru anul 2009 au fost prevăzute trei obiective științifice:

O1 (Co)omologie ciclică și (co)omologie Hopf-ciclică.
O2 Produse tensoriale twistate de algebre.
O3 (Co)omologie simetrică și coomologia grupurilor.

Rezultatele obținute în vederea îndeplinirii acestor obiective se regăsesc în cele 5 articole scrise. Dintre acestea unul este deja publicat într-o revistă cotată ISI, unul este acceptat spre publicare într-o revistă cotată ISI, iar celelalte au fost trimise spre publicare în reviste cotate ISI, conform următorului tabel:

Art.	Ob.	Articole elaborate
A1	**O1**	Abdenacer Makhlouf și **Dragoș Ștefan**, *Coactions on Hochschild Homology of Hopf-Galois Extensions and Their Coinvariants*, va apare în Journal of Pure and Applied Algebra, articol disponibil online la adresa arXiv:0810.5326.
A2	**O1**	**Andrei Chiteș** și Costel Chiteș, *Separable K-linear categories*, arXiv:0911.4959v1, trimis spre publicare.
A3	**O2**	P. Jara, J. López, G. Navarro și **Dragoș Ștefan**, *On the classification of twisting maps between K^n and K^m*, arXiv:0805.2874, trimis spre publicare.
A4	**O3**	**Doru-Mihai Staic**, *Symmetric cohomology of groups in low dimension*, Archiv der Mathematik, **93** (3), 205-211, (2009), arXiv:0912.0042.
A5	**O3**	**Doru-Mihai Staic**, *Secondary cohomology and k-invariants*, arXiv:0909.1086, trimis spre publicare.

Criteriul minim de performanță așteptat pentru anul 2009, stabilit în Anexa IIb, este de un articol acceptat spre publicare într-o revistă cotată ISI. **Având în vedere lista publicațiilor din tabelul de mai sus, considerăm că toate obiectivele au fost îndeplinite integral din punct de vedere științific.**

Vom prezenta în continuare cele mai importante rezultate științifice obținute.

Articolul A1

Fie A o K-algebră și fie H o algebră Hopf. Prin definiție, vom spune că A este o extindere H-Galois a lui B dacă se dă un morfism de algebre $\rho_A : A \to A \otimes H$, care definește o structură de comodul pe A, astfel încât aplicația canonică

$$\beta_A : A \otimes_B A \to A \otimes H, \quad \beta_A = (m_A \otimes H) \circ (A \otimes_B \rho_A)$$

este bijectivă. Aici $m_A : A \otimes A \to A$ reprezintă aplicația de multiplicare pe A, iar B este subalgebra elementelor coinvariante din A, adică a acelor elemente $a \in A$ astfel încât $\rho_A(a) = a \otimes 1$. În continuare $B \subseteq A$ reprezintă o extindere H-Galois dată.

Pentru un A-bimodul M vom nota omologia Hochschild a lui A cu coeficienți în M prin $HH_*(A, M)$. Deoarece B este o subalgebră a lui A, omologia Hochschild $HH_*(B, M)$ a lui B cu coeficienți în M are de asemenea sens. O trăsătură remarcabilă a acestor grupuri de omologie este că H acționează pe $HH_*(B, M)$ via acțiunea Ulbrich-Miyashita, conform [Șt]. Presupunând că M este un bimodul Hopf, pot fi definite structuri suplimentare atât pe $HH_*(B,M)$ cât și pe $HH_*(A,M)$. Reamintim că M este un bimodul Hopf dacă M este un A și un H-comodul, iar cele două structuri sunt compatibile într-un anumit sens, pe care nu îl vom explicita aici. Mai precis, se poate arăta că în acest caz $HH_*(B,M)$ este un H-comodul, iar $HH_*(A,M)$ este un comodul peste $C_H := H/[H,H]$, coalgebra cât a lui H prin subspațiul generat de comutatorii elementelor din H.

Scopul acestui articol este de studia coinvarianții celor două coacțiuni descrise mai sus, având în vedere ca aplicație importantă calculul coinvarianților omologiei ciclice a lui A, în cazul în care extinderea $B \subseteq A$ este central Galois. Această ultimă problemă a fost pusă de Martin Lorentz în [Lo] pentru extinderi Galois clasice (acțiuni ale grupurilor finite de automorfisme ale lui A). Ca instrument de lucru am folosit șirul spectral Grothendieck, pe care l-am reformulat și apoi redemonstrat într-o formă convenabilă:

Propoziția 2.3. *Fie $G:\Lambda\to\Sigma$, $F:\Sigma\to\Delta$ şi $H:\Lambda\to\Delta$ trei functori exacţi la dreapta care comută cu sumele directe, unde Λ, Σ şi Δ sunt trei categorii abeliene cocomplete şi care au suficiente obiecte. Presupunem că U este un generator în Λ şi că $\varphi: F\circ G\to H$ este o transformare naturală. Dacă $\varphi(U)$ este un izomorfism iar $G(U)$ este F-aciclic atunci există un șir spectral natural în X, de forma*

$$L_pF(L_qG(X)) \Rightarrow L_{p+q}H(X).$$

Pentru a aplica acest șir spectral în cazul care ne interesează (spre exemplu când Λ este categoria bimodulelor Hopf) avem nevoie de o serie de proprietăți ale grupurilor $HH_*(B,M)$ și $HH_*(A,M)$. Acestea sunt studiate în prima și a doua parte a lucrării. Menționăm aici numai un singur rezultat, care joacă un rol fundamental în întreaga lucrare. Este vorba de Propoziția 1.10 (1), care poate fi reformulată astfel: pentru orice bimodul Hopf $HH_*(B,M)$ este un SAYD-modul. Aceste module reprezintă coeficienți pentru coomologia Hopf ciclică și reprezintă ingredientul principal în calcularea coomologiei ciclice relative a algebrelor tare graduate, conform [JȘ]. O consecință importantă a acestui fapt este că algebra R_H a elementelor cocomutative în H acționează pe $HH_*(B,M)$. Rezultatul principal al celei de a doua părți a lucrării este dat în Teorema 2.23.

Teorema 2.23. *Fie H o algebră Hopf cu antipod involutiv, care are suficiente elemente cocomutative și astfel încât $Tor_n^{R_H}(K,H)=0$ pentru $n>0$. Dacă $B\subseteq A$ este o extindere H-Galois fidel plată și V este un C_H-comodul stâng injectiv atunci există un șir spectral*

$$Tor_p^{R_H}(K, HH_q(B, M\square_{C_H} V)) \Rightarrow HH_q(A,M)\square_{C_H} V.$$

În rezultatul de mai sus $\square_{C_H}$ reprezintă produsul cotensorial peste C_H. Spre exemplu dacă H este algebra grupală a unui grup G, atunci R_H este H iar C_H are ca bază mulțimea $T(G)$ a claselor de conjugare în G. Mai mult, dacă se ia o clasă de conjugare σ și $V:=K\sigma$ atunci $HH_q(A,M)\square_{C_H} V$ coincide cu grupurile de omologie $HH_*^{\sigma}(A,M)$ considerate de Victor Nistor pentru a calcula coomologia ciclică a produselor încrucișate. Cazuri particulare ale șirului spectral din Teorema 2.23, deja cunoscute în literatura matematică, sunt reobținute în Corolarul 2.26 și Corolarul 2.28.

Teorema 2.23 capătă o formă specială în cazul în care H este de dimensiune finită peste un corp de caracteristică zero. Păstrând ipotezele și notația din Teorema 2.23, în Teorema 2.25 se arată că șirul spectral degenerează, transformându-se într-un izomorfism

$$K \otimes_{R_H} HH_n(B, M \square_{C_H} V) \cong HH_n(A, M) \square_{C_H} V.$$

Același izomorfism se obține dacă H este comutativă și finit dimensională peste un corp K a cărui caracteristică nu divide dimensiunea lui H (a se vedea Teorema 2.33). În cazul clasic, al unei acțiuni Galois de grup Galois G, algebra Hopf H este $(KG)^*$, duala algebrei grupale KG. În particular rezultă că $HH_*(B)$ este un H-modul, iar izomorfismul de mai sus devine

$$HH_*(A)^G \cong p_1 \bullet HH_*(B),$$

unde p_1 este elementul din H care verifică $p_1(g) = \delta_{1,g}$, pentru orice g din G (Corolarul 2.35). Relația de mai sus ne arată că dacă acțiunea Ulbrich-Miyashita pe $HH_*(B)$ ar fi trivială atunci subspațiul invariant la acțiunea lui G pe $HH_*(A)$ ar coincide cu $HH_*(B)$. Se știe însă că această proprietate nu are loc în general, dar are loc pentru acțiunile Galois centrale. De fapt acesta este rezultatul central din [Lo], care constituie punctul de plecare al articolului nostru.

În ultima parte a lucrării definim extinderile Hopf-Galois centrale și arătăm că pentru acestea acțiunea Ulbrich-Miyashita este trivială (Propoziția 3.5). În consecință, pentru o extindere H-Galois centrală $B \subseteq A$, un H-comodul V și un bimodul Hopf simetric M se arată că

$$HH_n(A, M) \square_H V \cong HH_n(B, M \square_H V),$$

de îndată ce caracteristica lui K nu divide dimensiunea lui H. Metoda folosită pentru demonstrarea acestui izomorfism ne permite să exprimăm $HH_n(A, M)$ în funcție de $HH_n(B, M \square_H K)$ astfel

$$HH_n(A, M) \cong Z \otimes_{Z'} HH_n(B, M \square_H K),$$

unde Z este centrul lui A iar $Z' := Z \cap B$. Sperăm ca acest ultim izomorfism să fie util pentru calcularea omologiei Hochschild a lui A în funcție de aceea a lui B.

Rezultatul central al acestei părți, și care a reprezentat motivația inițială a acestui articol, este Teorema 3.13 în care se arată că $HC_*(A)^{coH}$ și $HC_*(B)$ sunt izomorfe pentru orice extindere H-Galois centrală $B \subseteq A$, unde H este o algebră Hopf finit dimensională astfel încât caracteristica lui K nu divide dimensiunea lui H. În final se construiește un exemplu de extindere Hopf-Galois centrală care nu este comutativă (prin definiție orice extindere Hopf-Galois comutativă este centrală).

[Lo] M. Lorenz, *On Galois descent for Hochschild and cyclic homology*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), No. 3, 474-482.

[JȘ] P. Jara și D. Ştefan, *Cyclic homology of Hopf algebras and Hopf Galois extensions*, Proc. Lond. Math. Soc. **93** (2006), No. 1, 138-174.

[Șt] D. Ştefan, *Hochschild cohomology of Hopf Galois extensions*, J. Pure Appl. Algebra **103** (1995), 221-233.

Articolul A2

Calculul (co)omologiei ciclice a unei algebre asociative este o problemă extrem de dificilă. Aproape în toate situațiile cunoscute acest calcul se bazează pe determinarea prealabilă a (co)omologiei Hochschild. Relativ recent s-a definit omologia ciclică a unei categorii k-liniare, adică a unei categorii mici în care morfismele dintre două obiecte arbitrare formează un spațiu k-linear, iar compunerea morfismelor este biliniară. Varianta clasică a (co)omologiei ciclice a unei k-algebre A se poate recupera din cea nouă considerând categoria k-lineară a modulelor proiective finit generate stângi (sau drepte) peste A. Prin analogie, pentru a studia (co)omologia ciclică a unei categorii k-liniare, este important să se cunoască bine proprietățile (co)omologiei Hochschild-Mitchell a acelei categorii (ultima teorie de (co)omologie reprezintă analogul (co)omologiei Hochschild a unei algebre). Scopul articolului **A2** este de a investiga acele categorii k-liniare $\boldsymbol{A}$ care au coomologia Hochschild-Mitchell cea mai simplă, adică sunt de dimensiune zero în raport cu această teorie de coomologie. Reamintim că $\boldsymbol{A}$ are dimensiunea Hochschild-Mitchell zero dacă $H^1(\boldsymbol{A}, M) = 0$, pentru orice $\boldsymbol{A}$-bimodul M (coomologia Hochschild-Mitchell are coeficienți în categoria abeliană a $\boldsymbol{A}$-bimodulelor). Aceste categorii liniare sunt numite separabile. Primul rezultat important din articol (Teorema 2.3) oferă o caracterizare a categoriilor liniare separabile. Menționăm aici numai o parte din această teoremă, și anume

Teoremă *O categorie k-liniară este separabilă dacă și numai dacă există un idempotent de separabilitate.*

Prin definiție un idempotent de separabilitate este dat de o familie de forma $(a_x^y)_{x,y\in \boldsymbol{A}_0}$ unde $\boldsymbol{A}_0$ este mulțimea obiectelor în $\boldsymbol{A}$, iar elementele $a_x^y \in Hom_{\boldsymbol{A}}(y,x)\otimes_k Hom_{\boldsymbol{A}}(x,y)$ satisfac anumite condiții de normare și de comutare cu morfismele din $\boldsymbol{A}$. Folosind această descriere a categoriilor liniare separabile se demonstrează apoi o proprietate de finitudine a acestora (o teoremă de tip Zelinsky).

Teoremă *O categorie liniară separabilă este local finită, adică spațiul morfismelor este finit dimensional pentru orice două obiecte.*

Existența idempotenților de separabilitate este de asemenea folosită pentru a găsi condiții necesare și suficiente de separabilitate pentru categoriile liniare generate de grupoizi și categorii delta. Mai precis are loc următorul rezultat

Teoremă *Fie k**A** categoria liniară generată de o categorie mică **A**.*

a) *Dacă **A** este un grupoid atunci k**A** este separabilă dacă și numai dacă pentru orice obiecte x și y mulțimea* $\mathbf{A}(x,y)$ *este finită și caracteristica lui k nu divide cardinalul lui* $\mathbf{A}(x,y)$.
b) *Dacă **A** este o categorie delta atunci k**A** este separabilă dacă și numai dacă **A** este discretă.*

Prima parte a teoremei reprezintă o teoremă de tip Maschke pentru grupoizi.

Articolul A3

Produsele tensoriale twistate reprezintă generalizări naturale ale produselor tensoriale de algebre. În geometria necomutativă ele modelează produsul spațiilor necomutative. Dacă A și B sunt două algebre iar $\tau : B\otimes A \to A\otimes B$ este o aplicație liniară care satisface anumite relații de compatibilitate cu multiplicarea și unitatea algebrelor A și B, atunci se poate defini o nouă aplicație liniară

$$m := (m_A \otimes m_B)\circ(A\otimes\tau\otimes B)$$

în raport cu care $A\otimes B$ devine o algebră asociativă și cu unitate, notată cu $A\otimes_\tau B$ și care se numește produsul tensorial twistat (relativ la τ) al algebrelor A și B. Pentru cele mai simple algebre $A = B = k^2$ problema determinării aplicațiilor τ care definesc ca mai sus o structură de algebră asociativă pe $A \otimes B$ a fost abordată în [Ci]. Chiar și în acest caz simplu problema s-a dovedit foarte dificilă, necesitând construcții ingenioase.

În articolul **A3** ne-am propus să atacăm problema clasificării aplicațiilor τ în cazul în care $A = k^n$ și $B = k^m$. Datorită caracterului destul de tehnic al rezultatelor obținute este practic imposibil să le descriem în detaliu. În schimb, vom încerca să facem o prezentare generală, cu trimitere la articol pentru fiecare rezultat discutat.

Un rol central în lucrare este jucat de perechile (Γ, R) formate dintr-un graf orientat Γ și o reprezentare *R* a acestuia care satisface anumite restricții (*R* este unitară, splitată și factorizabilă, a se vedea Definiția 1.7). O astfel de pereche se numește admisibilă. Ca un prim pas se demonstrează Teorema 1.8, în care se arată că există o corespondență biunivocă între mulțimea aplicațiilor de twistare τ dintre *A* și *B* și mulțimea perechilor admisibile (Γ, R). Așadar, acum problema s-a redus la a clasifica perechile admisibile (Γ, R).

Pentru a măsura complexitatea grafului Γ se introduc doi invarianți numerici: rangul și rangul redus al lui Γ, și se folosesc aceste noțiuni pentru a caracteriza componentele conexe ale lui Γ, în cazul în care rangul redus este 1 (a se vedea Propoziția 2.4). În particular, pe această cale se produc noi exemple de aplicații de twistare cu ajutorul extensiilor Hochschild ale unei algebre cu nucleu dat (conform Teorema 2.11). Mai mult, în Teorema 2.13 sunt clasificate perechile admisibile pentru care Γ este de rang redus 1 și nu conține niciun ciclu de lungime 2, adică un subgraf orientat de forma

$$\circ \rightleftarrows \circ$$

Pentru a aborda și cazul în care Γ conține un ciclu de lungime 2, mai întâi se caracterizează reprezentările absolut ireductibile de dimensiune finită ale unei algebre finit dimensionale. Dată o astfel de reprezentare se descrie aplicația care definește acțiunea cu ajutorul unei matrice inversabile normalizate (Teorema 3.10 și Definiția 3.12). Această caracterizare generală este explicitată pentru reprezentările absolut ireductibile de dimensiune 2 în Teorema 3.16. După cum am observat deja că pentru a încheia clasificarea tuturor perechilor admisibile (Γ, R) de rang redus 1 mai avem de descris pe acelea care conțin un ciclu de lungime doi. Un caz particular aparte este cel în care Γ este chiar un ciclu de lungime doi. Această situație se rezolvă asociind perechii (Γ, R) o reprezentare absolut reductibilă de dimensiune 2, și folosind apoi Teorema 3.16. Toate perechile admisibile de acest tip sunt caracterizate în Teorema 4.2. Cazul general, al perechilor (Γ, R) de rang redus unu cu proprietatea că Γ conține un ciclu de lungime 2 este tratat în Teorema 4.6. Concluzionând, rezultatul principal al lucrării oferă o clasificare completă a aplicațiilor de twistare cu proprietatea că perechea admisibilă asociată are rangul redus unu. Menționăm faptul că rezultatele lui Claude Cibils pot fi recuperate din ale noastre, deoarece pentru pentru orice aplicație de twistare $\tau : k^2 \otimes k^2 \to k^2 \otimes k^2$, perechea admisibilă corespunzătoare are rangul redus unu.

[Ci] Claude Cibils, *Non-commutative duplicates of finite sets*. J. Algebra Appl., **5**(3) 361–377, 2006.

Articolul A4

Pentru un grup G și un G-modul A notăm cu $H^n(G,A)$ grupul de coomologie al lui G cu coeficienți în A. Grupurile de coomologie $H^n(G,A)$ au fost introduse de Eilenberg și MacLane în [EM]. O aplicație imediată este descrierea extensiilor de grupuri și a modulelor încrucișate (crossed). De asemenea, grupurile de coomologie sunt folosite în definirea k-invarianților asociați unui spațiu topologic conex prin arce. Coomologia simetrică $HS^n(G,A)$ a lui G cu coeficienți în A a fost introdusă în [St], motivația principală fiind studiul unei structuri algebrice ternare asociate unui spațiu topologic conex prin arce.

Pentru obținerea grupurilor de coomologie simetrică este necesară construirea unei acțiuni a grupului simetric pe complexul din care se obțin grupurile de coomologie $H^n(G,A)$. In particular rezultă că avem un morfism între $HS^n(G,A)$ și $H^n(G,A)$. Rezultatele din acest articol se concentrează pe caracterizarea proprietăților acestui morfism.

Se știe că există o bijecție între clasele de echivalență de extensii de grupuri și elementele celui de al doilea grup de coomologie $H^2(G,A)$. In articol arătăm că morfismul dintre $HS^2(G,A)$ și $H^2(G,A)$ este injectiv. Apoi se dă următoarea caracterizare a extensiilor ce corespund cociclilor simetrici.

Teoremă *Cociclul corespunzător extensiei* $0 \to A \to X \to G \to 1$ *este simetric dacă și numai dacă există o secțiune* $t : G \to X$ *astfel încât* $t(g)^{-1} = t(g^{-1})$.

În particular, dacă grupul G nu are elemente de ordin 2 atunci orice 2-cociclu este echivalent cu un 2-cociclu simetric. Un alt rezultat obținut în articol dă condiții suficiente ca morfismul $HS^n(G,A)$ în $H^n(G,A)$ să fie injectiv.

Teoremă *Fie (A,+) un grup abelian cu proprietatea că* $(n+1)a = 0$ *implică* $a = 0$ *și ecuația* $(n!)x = a$ *are exact o soluție pentru orice a* $\in$ *A. Atunci morfismul dintre* $HS^n(G,A)$ *și* $H^n(G,A)$ *este injectiv.*

[EM] S. Eilenberg and S. MacLane, *Cohomology theory in abstract groups*, I. Ann. Math. **48** (2), 51-78, (1947).

[St] Mihai D. Staic, *From 3-algebras to Delta-groups and symmetric cohomology*, J. Algebra, **322** (4), 1360-1378, (2009).

Articolul A5

În articolul **A4** și în [St] a fost introdusă și studiată coomologia simetrică $HS^n(G,A)$. Motivația principală fiind, după cum am explicat deja, construcția unei anumite structuri ternare asociate unui spațiu topologic. Aceasta se poate face oarecum în paralel cu definiția primului k-invariant asociat unui spațiu topologic. Primul k-invariant k^3 este un element din $H^3(\pi_1(X), \pi_2(X))$ și a fost introdus de Eilenberg și MacLane in [EM]. Invariantul k^3 nu este altceva decât echivalentul algebric al primului invariant Postnikov asociat spațiului X. În literatura de specialitate nu există o exprimare pur algebrică pentru ceilalți invarianți Postnikov. Articolul de față propune un posibil candidat (ce are o exprimare pur algebrică) pentru cel de al doilea invariant Postnikov.

Mai întâi se introduce o nouă teorie de coomologie, asociată unui triplet (G, A, k) format dintr-un grup *G*, un *G*-modul *A* și un 3-cociclu *k*. Pentru orice *G*-modul *B* se definește coomologia secundară ${}_2H^*(G, A, k; B)$ a tripletului (G, A, k) cu coeficienți în *B*. Coomologia secundară generalizează grupurile de coomologie obișnuită $H^n(G, B)$ - mai exact coomologia secundară a tripletului $(G, 1, 0)$ cu coeficienți în *B* este $H^n(G, B)$. Apoi, pentru un spațiu topologic punctat (X, x_0) se definește *k*-invariantul secundar al lui *X* ca fiind un element ${}_2k^4$ al coomologiei secundare asociate tripletului $(\pi_1(X), \pi_2(X), k^3)$ cu coeficienți în $\pi_3(X)$, unde $\pi_i(X)$ sunt grupurile de omotopie ale spațiului *X* și k^3 este primul *k*-invariant al lui *X*. Datorită dificultăților de natură tehnică nu putem da detalii asupra acestei construcții aici, ci ne rezumăm la a menționa că ea este asemănătoare cu aceea a *k*-invariantului k^3, și este în spiritul invarianților Postnikov. Rezultatul principal al acestei lucrări este

Teorema 3.6. *${}_2k^4$ este un invariant topologic în ${}_2H^4(\pi_1(X), \pi_2(X), k; \pi_3(X))$ al spațiului punctat (X, x_0).*

[EM] S. Eilenberg and S. MacLane, *Determination of the Second Homology and Cohomology Groups of a Space by Means of Homotopy Invariants*, Proc. National Academy of Science, **32** (1946), 277-280.

[St] Mihai D. Staic, *From 3-algebras to Delta-groups and symmetric cohomology*, J. Algebra, **322** (2009), 1360-1378.

Prof. Dr. Dragoş ŞTEFAN

București, 02.12.2009