

Sinteza lucrării

Algebre Hopf, omologie ciclică și categorii monoidale

Proiect Idei (Cod 69), contract nr. 560/2009

Director: prof. dr. Dragoș ȘTEFAN (Universitatea București)

Rezultatele obținute în vederea îndeplinirii obiectivelor pentru anul 2011 se găsesc în cele 6 articole elaborate în anul 2011 (la care se adaugă articolul: G. Bohm, **D. Ștefan**, *A categorical approach to cyclic duality*, acceptat pentru publicare în **Journal of Noncommutative Geometry**, raportat în anul 2010). Dintre acestea, două sunt deja acceptate pentru publicare în reviste cotate ISI, trei sunt trimise spre publicare, iar unul este în curs de redactare, după cum urmează:

- A1. Dragoș Ștefan**, Anca Stănescu, *Cleft comodules categories*, va apărea în **Communications in Algebra**.
- A2.** Aura Bârdeș, **Dragoș Ștefan**, *Factorizable enriched categories and applications*, va apărea în **Journal of Algebra**.
- A3. Andrei Chiteș, Mădălin Ciungu, Dragoș Ștefan**, *On De Rham cohomology of linear categories*, preprint.
- A4.** Gabriella Böhm, **Dragoș Ștefan**, *Homologies with Hopf bimodule coefficients*, în curs de redactare.
- A5. Florin Panaite, Mihai D. Staic**, *More examples of pseudosymmetric braided categories*, preprint.
- A6.** Helena Albuquerque, **Florin Panaite**, *Some (Hopf) algebraic properties of circulant matrices*, preprint.

Criteriul minim de performanță așteptat pentru anul 2011 era de două articole acceptate spre publicare în reviste cotate ISI. La articolele A1 și A2 de mai sus se adaugă încă trei articole, care au fost raportate în 2010 ca preprinturi și care între timp au fost acceptate pentru publicare, anume:

- B1. Florin Panaite**, *More examples of invariance under twisting*, va apărea în **Czechoslovak Mathematical Journal**.
- B2. Florin Panaite**, *Invariance under twisting for crossed products*, va apărea în **Proceedings of the American Mathematical Society**.
- B3. Mădălin Ciungu, Florin Panaite**, *L-R-smash products and L-R-twisted tensor products of algebras*, va apărea în **Algebra Colloquium**.

Așadar, considerăm că toate obiectivele au fost îndeplinite integral din punct de vedere științific.

Menționăm că, pe durata celor trei ani ai proiectului, au fost elaborate 20 de articole științifice, dintre care până în prezent au fost publicate sau acceptate pentru publicare 13 articole (în următoarele reviste ISI: Journal of Noncommutative Geometry, Proceedings of the American Mathematical Society, Algebra Colloquium, Journal of Algebra, Communications in Algebra (2), Czechoslovak Mathematical Journal, Algebraic and Geometric Topology, Pacific Journal of Mathematics, Journal of Pure and Applied Algebra, Archiv der Mathematik, Algebras and Representation Theory, Central European Journal of Mathematics), 6 sunt trimise spre publicare și unul este în stadiu final de redactare (lista completă a acestor articole poate fi găsită în Raportul in extenso).

Prezentăm acum cele mai importante rezultate științifice obținute în 2011:

Articolul A1

Categoriile liniare au fost introduse de Barry Mitchell sub numele de algebre cu mai multe obiecte, într-un articol de referință, publicat în 1972 în *Advances in Mathematics*. Definiția categoriilor liniare este foarte asemănătoare cu aceea a categoriilor obișnuite numai că pentru primele mulțimea morfismelor dintre două obiecte arbitrare are o structură de modul peste un inel comutativ dat, iar aplicațiile de compunere sunt biliniare. Proprietățile lor de bază au fost studiate tot de Barry Mitchell în articolul mai sus menționat, unde printre altele se definesc modulele stângi (sau drepte) peste categorii liniare și se arată că acestea păstrează toate caracteristicile modulelor unei algebre asociative.

Categoriile liniare s-au dovedit foarte utile în studiul reprezentărilor unor structuri algebrice, cum ar fi grafurile orientate cu un număr infinit de vârfuri. Pentru un astfel de graf categoria reprezentărilor sale se identifică cu o categorie de module peste o anumită categorie liniară, și nu cu o categorie de module peste o algebră asociativă și unitară. Alte exemple remarcabile de categorii liniare provin din topologia algebrică și din fizică.

În anii '80 Pierre Gabriel, pornind de la studiul reprezentărilor algebrelor asociative, a definit acoperirea Galois a unei categorii liniare. Prin definiție aceasta este tot o categorie liniară pe care un anumit grup, numit Galois, acționează liber. Rezultatele obținute de Gabriel au atras atenția asupra acțiunilor grupurilor pe categorii liniare. Claude Cibils și Andrea Solotar în 2005 au introdus produsul smash dintre o categorie liniară și un grup finit. Ei au arătat de asemenea că o acoperire Galois coincide până la o echivalență Morita cu un astfel de produs smash. Problematika de mai sus a condus de asemenea la apariția categoriilor liniare G -graduate. Legătura acestora cu acoperirile Galois este dată de o generalizare a bine-cunoscutei teoreme de dualitate demonstrată de Cohen și Montgomery.

Mai general, acțiunile și coacțiunile unei algebre Hopf pe o categorie liniară au fost considerate de E. Herscovich și A. Solotar pentru a asocia un șir spectral de tip Lyndon-Hochschild-Serre în coomologia Hochschild-Mitchell a unei categorii liniare. Ingredientul principal folosit în construcția șirului spectral este noțiunea de extindere

Hopf-Galois de categorii liniare.

Rezultatele și aplicațiile prezentate justifică pe deplin interesul crescând pentru studiul acțiunilor și coacțiunilor algebrelor Hopf pe categorii liniare, și în mod special al extinderilor Hopf-Galois de categorii liniare. Scopul articolului pe care îl discutăm este de a construi noi exemple de extinderi H -Galois de categorii liniare (și de a analiza proprietățile lor) folosind tehnici provenind din teoria extinderilor cleft de algebre. Este bineștiut că acestea sunt deformări cu ajutorul unui 2-cociclu ale unui produs smash, deci pot fi privite ca generalizări ale unei clase importante de produse twistate, și anume cele smash.

Fiind dată o categorie liniară \mathcal{D} și o algebră Hopf H se definește o nouă categorie liniară cu ajutorul a două familii de aplicații liniare care joacă rolul de 2-cociclu și respectiv de acțiune slabă a lui H pe \mathcal{D} . Aceasta se numește categoria produs încrucișat $\mathcal{D} \#_{\sigma} H$. Prin construcție orice categorie produs încrucișat este o H -comodul categorie. În Teorema 3.1.9 se arată că o H -comodul categorie este izomorfă cu o categorie produs încrucișat cu 2-cociclu inversabil în convoluție, dacă și numai dacă este cleft, adică admite o integrală totală inversabilă în convoluție. Ca o consecință a acestei caracterizări se deduce că o H -comodul categorie este un produs smash dacă și numai dacă există o integrală totală ale cărei componente sunt morfisme de algebră.

Cu ajutorul H -comodul categoriilor cleft, se demonstrează că o categorie produs încrucișat cu cociclu inversabil este o extindere Hopf-Galois care are o bază normală, și reciproc. Ca și în cazul clasic, modulele Hopf peste o H -comodul categorie \mathcal{C} sunt \mathcal{C} -module drepte pe care H coacționează într-un mod compatibil. Structura modulelor Hopf, în cazul în care \mathcal{C} este o H -comodul categorie cleft, este descrisă în Teorema 3.2.5. Categoria modulelor Hopf este izomorfă cu categoria \mathcal{D} -modulelor drepte, unde \mathcal{D} este subcategoria morfismelor H -coinvariante.

În ultima parte a acestui articol sunt prezentate o serie de exemple, incluzând construcția unei H -comodul categorii cleft universale, pentru orice algebră Hopf cocomutativă H și orice mulțime S .

Articolul A2

Punctul de plecare al acestui articol a fost observația simplă că pentru numeroase structuri algebrice, deși diferite prin natura lor, problema de factorizare corespunzătoare conduce la construcții de produse twistate foarte asemănătoare. Această observație sugerează posibilitatea unei abordări unificatoare, cu ajutorul căreia să se obțină un “produs tensorial twistat generalizat”, și care înglobează “produsele” deja cunoscute. În acest fel s-a ajuns la studiul categoriilor îmbogățite care factorizează prin două subcategorii ale sale. Pentru îndeplinirea obiectivului propus ne-am ales ca instrument de lucru categoriile îmbogățite într-o categorie monoidală dată, și ne-am propus abordarea problemei factorizării unei astfel de categorii.

Categoriile îmbogățite într-o categorie monoidală \mathcal{M} , sau \mathcal{M} -categoriile pe scurt, sunt generalizări ale categoriilor obișnuite în care mulțimea morfismelor dintre două

obiecte date este înlocuită cu un obiect din \mathcal{M} . Pentru a putea formula problema factorizării unei \mathcal{M} -categorii \mathcal{C} prin două \mathcal{M} -subcategorii ale sale \mathcal{A} și \mathcal{B} sunt necesare câteva ipoteze suplimentare pe care fie \mathcal{M} fie \mathcal{C} trebuie să le îndeplinească. Fără a intra în detalii tehnice, dacă în \mathcal{M} există suficiente sume directe și acestea comută cu produsul tensorial, iar \mathcal{C} este mică, atunci \mathcal{M} -subcategoriilor \mathcal{A} și \mathcal{B} li se asociază în mod canonic o familie de morfisme în \mathcal{M} . În cazul în care aceste morfisme sunt toate inversabile se spune că \mathcal{M} -categoria \mathcal{C} factorizează prin \mathcal{A} și \mathcal{B} .

Rezultatele obținute în această direcție sunt următoarele. Prin analogie cu cazul algebrilor asociative factorizabile se arată că orice \mathcal{M} -categorie factorizabilă \mathcal{C} induce un sistem de twistare. În continuare este investigată problema reciprocă: se poate asocia unui sistem de twistare dintre două \mathcal{M} -categorii \mathcal{A} și \mathcal{B} o categorie care să le conțină ca subcategorii și să factorizeze prin acestea? În general, răspunsul este probabil negativ. Totuși pentru o clasă specială de sisteme de twistare, numite sisteme simple, această construcție este posibilă, iar \mathcal{M} -categoria care se obține generalizează produsul tensorial twistat a două algebre. Ca o primă aplicație, sunt caracterizate sistemele twistate simple, precum și categoriile îmbogățite care le corespund, în cazul în care categoria monoidală \mathcal{M} coincide cu categoria de coalgebre într-o categorie braided dată. În această situație sistemele de twistare simple sunt în corespondență bijectivă cu perechile potrivite de \mathcal{M} -categorii. Categoria îmbogățită care corespunde unei perechi potrivite se numește produsul dublu încrucișat. Dacă spre exemplu se lucrează cu \mathcal{M} -categorii cu un singur obiect atunci acestea sunt de fapt bialgebre, iar cu ajutorul rezultatului de mai sus regăsim perechile potrivite de bialgebre și produsul dublu încrucișat al acestora, studiate de S. Majid și de alții.

Particularizând categoria monoidală \mathcal{M} sunt deduse noi aplicații ale construcțiilor precedente. Spre exemplu, dacă se lucrează cu categorii cu un singur obiect, adică cu monoizi într-o categorie monoidală \mathcal{M} , se regăsesc construcții bine-cunoscute, incluzând aplicațiile de twistare între două algebre, legile de distributivitate între două monade, sau legile de distributivitate opmonoidale. Să remarcăm că acestea din urmă conduc la construirea produsului twistat de bimonade.

În sfârșit, dacă \mathcal{M} este categoria mulțimilor, atunci \mathcal{M} -categoriile coincid cu categoriile obișnuite. În acest caz un sistem de twistare simplu se identifică cu o pereche potrivită, deci se poate considera produsul său dublu încrucișat. Acesta este un grupoid atunci când cele două categorii au această proprietate. Pentru anumite tipuri speciale de categorii, cum ar fi cele asociate mulțimilor parțial ordonate, sunt determinate toate sistemele de twistare în funcție de anumite date combinatoriale.

Articolul A3

Trecerea de la geometria comutativă la aceea necomutativă a fost realizată de Alain Connes arătând că numeroase proprietăți geometrice ale unei varietăți pot fi rescrise ca proprietăți algebrice ale inelului de funcții definite pe acea varietate. Unul dintre exemplele cele mai concludente în acest sens îl reprezintă construcția claselor Chern în context necomutativ. Acestea reprezintă importanți invarianți omologici

ce fac legătura între $K_0(A)$, grupul de K -teorie al unei algebre (peste un corp de caracteristică zero \mathbb{k}), și coomologia De Rham $H_{DR}^*(A)$ a acelei algebre.

În acest articol se arată că o construcție asemănătoare poate fi realizată și pentru categorii liniare, care după cum am remarcat deja reprezintă generalizări naturale ale algebrelor. Ca motivație principală se are în vedere faptul că definiția claselor Chern se obține automat pentru toate algebrele neunitare cu suficient de multe elemente idempotente, cum ar fi spre exemplu algebra asociată unui graf orientat cu un număr infinit de vârfuri.

În prima parte a articolului sunt explicate pe scurt rezultatele preliminare necesare privind proprietățile modulelor peste o categorie \mathbb{k} -liniară \mathcal{C} , și în mod special ale celor proiective și finit generate, subliniind importanța bazelor duale în studiul celor din urmă. În partea centrală a articolului se arată mai întâi că, pentru o categorie \mathbb{k} -liniară \mathcal{C} se poate defini o DG -categorie universală $\Omega^*\mathcal{C}$, ale cărei morfisme de grad n pot fi privite ca forme diferențiale de grad n pe \mathcal{C} . Fiind dată o DG -categorie arbitrară Ω^* astfel încât $\Omega^0 = \mathcal{C}$ se definește Ω_{ab}^n ca fiind spațiul cât al sumei directe $\bigoplus_x {}_x\Omega_x^n$ modulo subspațiul generat de comutatorii graduați $\omega_1 \circ \omega_2 - (-1)^{pq}\omega_2 \circ \omega_1$, unde ${}_x\Omega_y^n$ reprezintă spațiul formelor de grad n de la y la x , iar $\omega_1 \in {}_x\Omega_y^p$ și $\omega_2 \in {}_y\Omega_x^q$, cu $p + q = n$. Diferențiala categoriei Ω^* induce morfisme $d_{ab}^n : \Omega_{ab}^n \rightarrow \Omega_{ab}^{n+1}$ astfel încât $(\Omega_{ab}^*, d_{ab}^*)$ este un complex, a cărui coomologie se numește coomologia De Rham a lui \mathcal{C} , și se notează cu $H_{DR}^*(\Omega^*)$.

Fiind dat un \mathcal{C} -modul proiectiv M și o DG -categorie Ω^* ca mai sus, se definește noțiunea de conexiune pe M cu ajutorul unei familii de aplicații \mathbb{k} -liniare $\nabla_x : M_x \rightarrow (M \otimes_{\mathcal{C}} \Omega^*)_x$ care satisfac regula lui Leibniz. În cazul în care M este proiectiv și finit generat se arată folosind existența bazelor duale că pe M există totdeauna cel puțin o conexiune, purtând numele de conexiunea Levi-Civita. De asemenea, sunt descrise toate conexiunile care pot fi definite pe un modul liber finit generat $\bigoplus_{i=1}^n {}_{x_i}\mathcal{C}_{\bullet}$. Orice conexiune poate fi extinsă în mod unic la un endomorfism $\tilde{\nabla}$ omogen de grad 2 al Ω^* -modulului $M \otimes_{\mathcal{C}} \Omega^*$. Se poate acum defini clasa Chern $Ch_q(M, \nabla)$ ca fiind clasa de coomologie De Rham a urmei endomorfismului obținut compunând pe $\tilde{\nabla}$ cu el însuși de q -ori. Prin construcție, $Ch_q(M, \nabla) \in H_{DR}^{2q}(\Omega^*)$.

În cazul conexiunii Levi-Civita, sau al unei conexiuni pe un modul liber, clasele Chern pot fi calculate cu ajutorul bazelor duale pe M . Pentru a arăta că definiția claselor Chern nu depinde de alegerea unei conexiuni pe M , se folosește calculul menționat mai sus, împreună cu o lemă care, într-un anumit sens, ne arată că diferența dintre două elemente ale unei “familii algebrice depinzând de un parametru” de cocicli De Rham este un cobord.

Articolul A4.

În acest articol se continuă studiul omologiei Hopf-ciclice (duale) utilizând ca principal instrument de lucru teoria complexelor mixte. Se știe că oricărui obiect ciclic $Z := (C_*, d_*, s_*, t_*)$ într-o categorie abeliană îi corespunde un anumit complex

mixt $X := (C_*, b_*, B_*)$. Prin definiție, (C_*, b_*) este un complex de lanțuri și (C_*, B_*) este un complex de colanțuri, astfel încât operatorii b_* și B_* comută. Atât omologia Hochschild cât și cea ciclică a obiectului Z pot fi recuperate din omologia complexului (C_*, b_*) și, respectiv, cea a complexului total asociat lui X .

Unul dintre obiectivele principale ale acestui articol este de a descrie complexul mixt care corespunde obiectului ciclic $C_*(H, M)$ construit de Jara și Ștefan pentru orice algebră Hopf H și orice SAYD-modul M . Cu alte cuvinte, în acest caz particular, se urmărește mai întâi calculul operatorilor b_* și B_* . În general, pentru un obiect ciclic arbitrar $Z = (C_*, d_*, s_*, t_*)$, determinarea lui b_* este mai simplă. În schimb, pentru a simplifica formula operatorului B_* , se trece la complexul mixt normalizat \overline{X} , care se obține din X factorizând C_* prin suma imaginilor operatorilor de față s_* . Să observăm că \overline{X} are aceeași omologie Hochschild și aceeași omologie ciclică ca și X , deci implicit ca și Z . În particular, dacă se ia $Z = C_*(H, M)$, atunci descrierea explicită a complexului mixt normalizat corespunzător \overline{X} poate fi utilizată pentru calculul omologiei Hopf-ciclice duale $HC_*(H, M)$.

Factorizând mai departe complexul normalizat prin ultima aplicație de față se obține un nou obiect ciclic, care se numește obiectul ciclic redus. Are deci sens să vorbim de omologia ciclică a acestuia, care poartă numele de omologia ciclică redusă. În particular putem deci considera omologia ciclică redusă a lui $C_*(H, M)$, notată în continuare prin $HC_*^{red}(H, M)$. În cea de a doua parte a articolului sunt investigate proprietățile acestei omologii în următoarea situație particulară. Se fixează o extindere H -Galois $R \subseteq A$ și un modul Hopf N . Este ușor de văzut că $M := N/[R, N]$, spațiul factor al lui N prin comutatorii $[R, N]$ este un AYD-modul. Presupunem că N este astfel ales încât M este și stabil, adică el este chiar un SAYD-modul. În aceste ipoteze se construiește un anumit bimodul diferențial peste o anumită DG-algebră. Cu ajutorul acestora se definește $H_{DR}^*(H, M)$, omologia De Rham a lui H cu coeficienți în M . Se arată apoi că operatorul B_* , calculat în prima parte a articolului, induce o aplicație $B_* : HC_*^{red}(H, M) \rightarrow HH_*(H, M)$. În rezultatul central al lucrării se demonstrează că următorul șir este exact

$$0 \longrightarrow H_{DR}^*(H, M) \longrightarrow HC_*^{red}(H, M) \xrightarrow{B_*} HH_*(H, M),$$

sau altfel spus, nucleul lui B_* este $H_{DR}^*(H, M)$. Un exemplu de bimodul Hopf N care satisface toate proprietățile necesare este A . În acest caz operatorul B_* este definit pe $HC_*^{red}(A)$, omologia ciclică redusă a algebrei A și ia valori în omologia Hochschild a acestei algebre. Deci, ca un corolar, se obține o identificare între omologia De Rham relativă a lui A și $H_{DR}^*(H, A_B)$.

Articolul A5.

Conceptul de braiding pseudosimetric a fost introdus ca o generalizare a braidingurilor simetrice. Un braiding c într-o categorie monoidală este pseudosimetric dacă satisface un fel de relație braid modificată. Există de asemenea un analog

Hopf al acestui concept: o structură quasitriangulară pe o algebră Hopf se numește pseudotriangulară dacă satisface un fel de ecuație Yang-Baxter modificată. În acest articol sunt analizate câteva clase de categorii braided și structuri quasitriangulare cu scopul de a le identifica pe cele care sunt pseudosimetrice (respectiv pseudotriangulare):

(i) Fie H o algebră Hopf cu antipod bijectiv. Un bimodul Yetter-Drinfeld-Long peste H este un spațiu vectorial M înzestrat cu structuri de H -bimodul și H -bicomodul astfel încât M devine un modul Yetter-Drinfeld stânga-stânga și dreapta-dreapta și un modul Long stânga-dreapta și dreapta-stânga. Aceste obiecte formează o categorie, care devine în plus categorie monoidală și care are un braiding canonic. Se demonstrează că acest braiding este pseudosimetric dacă și numai dacă H este comutativă și cocomutativă.

(ii) Fie ν un număr natural impar și presupunem că în corpul de bază k există o rădăcină primitivă de ordin 2ν a unității 1 . Notăm cu H_ν algebra Hopf peste k generată de două elemente g și x cu relațiile $g^{2\nu} = 1$, $gx + xg = 0$ și $x^2 = 0$, și comultiplicarea $\Delta(g) = g \otimes g$ și $\Delta(x) = x \otimes g^\nu + 1 \otimes x$. Această clasă de algebre Hopf a fost introdusă de către Radford. Noi demonstrăm în articol că toate structurile quasitriangulare pe H_ν sunt pseudotriangulare.

(iii) O algebră Hopf H peste corpul \mathbb{C} are o bază pozitivă dacă există o bază în H astfel încât toate constantele de structură ale lui H în baza respectivă sunt numere reale nenegative, iar o structură quasitriangulară pe o astfel de algebră Hopf se numește pozitivă dacă toți coeficienții ei în baza $B \otimes B$ (unde B este o bază pozitivă) sunt numere reale nenegative. Algebrele Hopf finit dimensionale cu baze pozitive și structurile quasitriangulare pozitive pe ele au fost clasificate de către Lu, Yan și Zhu. O astfel de algebră Hopf (notată $H(G; G_+, G_-)$) este construită pornind cu un grup finit G și o factorizare a acestuia $G = G_+G_-$, unde G_+ și G_- sunt subgrupuri ale lui G . O structură quasitriangulară pozitivă pe $H(G; G_+, G_-)$ este dată de două morfisme de grupuri $\xi, \eta : G_+ \rightarrow G_-$ satisfăcând anumite condiții (notăm $R(\xi, \eta)$ structura quasitriangulară corespunzătoare). Lu, Yan și Zhu au demonstrat că $R(\xi, \eta)$ este triangulară dacă și numai dacă $\xi = \eta$. În articol am prezentat o listă de condiții necesare și suficiente pentru ca $R(\xi, \eta)$ să fie pseudotriangulară. Aceste condiții arată destul de complicat în general, dar se simplifică mult într-un caz particular, anume când morfismul ξ este trivial (în aceste condiții structura quasitriangulară $R(\xi, \eta)$ se numește normală). Anume, am demonstrat că o structură quasitriangulară pozitivă normală $R(\xi, \eta)$ este pseudotriangulară dacă și numai dacă $\eta(uv) = \eta(vu)$, pentru orice $u, v \in G_+$.

Articolul A6.

În acest articol sunt analizate anumite proprietăți algebrice și Hopf-algebrice ale matricelor circulante, inspirate de faptul că algebra matricelor circulante de ordin n este izomorfă cu algebra grupală a grupului ciclic cu n elemente.

Fie H o algebră Hopf finit dimensională. Se știe că H^* devine o H -modul algebră,

deci putem considera produsul smash $H^* \# H$, despre care se știe că este izomorf ca algebră cu $End(H^*)$, un izomorfism explicit fiind definit prin $\lambda : H^* \# H \simeq End(H^*)$, $\lambda(\varphi \# h)(\psi) = \varphi * (h \rightharpoonup \psi)$. În particular, restricțiile lui λ la H^* și H definesc scufundări ale lui H^* și H în $End(H^*)$ (ca algebre). Dacă identificăm $End(H^*)$ cu $M_n(\mathbb{K})$, unde $n = dim(H)$ iar \mathbb{K} este corpul de bază, obținem scufundări de algebre ale lui H și H^* în $M_n(\mathbb{K})$. În cazul în care $H = \mathbb{K}\mathbb{Z}_n$, algebra grupală a grupului ciclic cu n elemente, atunci imaginea lui $(\mathbb{K}\mathbb{Z}_n)^*$ în $M_n(\mathbb{K})$ via scufundarea de mai sus este algebra $D_{\mathbb{K}}^n$ a matricelor diagonale de ordin n , iar imaginea lui $\mathbb{K}\mathbb{Z}_n$ în $M_n(\mathbb{K})$ este algebra $C_{\mathbb{K}}^n$ a matricelor circulante de ordin n . În particular, ca o consecință a faptului ca produsul smash este un exemplu de produs tensorial twistat, se obține că algebra matricelor de ordin n factorizează drept $M_n(\mathbb{K}) = D_{\mathbb{K}}^n C_{\mathbb{K}}^n$.

Întrucât algebra grupală $\mathbb{K}\mathbb{Z}_n$ este o algebră Hopf, algebra $C_{\mathbb{K}}^n$ a matricelor circulante de ordin n devine și ea o algebră Hopf via izomorfismul de mai sus. Se analizează structura Hopf indusă, de exemplu antipodul aplicat unei matrice coincide cu transpusa matricei. Comultiplicarea Δ arată mai complicat, totuși se demonstrează că dacă C este o matrice circulantă de ordin n atunci $\Delta(C)$, privită ca o matrice de ordin n^2 , este ceea ce se numește "block circulant with circulant blocks".

În ultima secțiune a articolului se introduce o clasă de matrice circulante generalizate, astfel. Notăm elementele lui \mathbb{Z}_n cu $e_1 = 1, e_2, \dots, e_n$; pentru o aplicație dată $\mu : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}^*$, cu $\mu(e_1) = 1$, notăm $\mu(e_i) = \mu_i$ pentru orice $i \in \{2, \dots, n\}$. Pentru $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, notăm $circ(c_1, \dots, c_n; \mu_2, \dots, \mu_n)$ matricea de ordin n cu c_1, c_2, \dots, c_n în prima linie, c_1 pe diagonala principală și intrare $c_{j-i+1} \frac{\mu_i \mu_{j-i+1}}{\mu_j}$ în orice altă poziție (i, j) . Aceste matrice generalizează atât matricele circulante obișnuite cât și pe cele strâmb circulante: într-adevăr, o matrice strâmb circulantă $scirc(c_1, \dots, c_n)$ se dovedește a fi $circ(c_1, \dots, c_n; \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1})$, unde $\sigma = \cos(\frac{\pi}{n}) + i \sin(\frac{\pi}{n})$. Mai mult, pentru $circ(c_1, \dots, c_n; \mu_2, \dots, \mu_n)$ se pot determina formule explicite pentru valorile și vectorii lor proprii, ce pot fi citite direct din intrările matricei.

Stagii de documentare și cercetare

Dragoș Ștefan: 2 săptămâni la Universitatea din Granada (Spania), 2 săptămâni la Research Institute for Particle and Nuclear Physics (Budapesta, Ungaria) și 2 săptămâni la University College of London (Londra, Marea Britanie)

Florin Panaite: 6 săptămâni la Universitatea din Coimbra, Portugalia

Participări la congrese internaționale

Dragoș Ștefan și **Florin Panaite** au participat, în perioada 25-29 iulie, la congresul internațional "Non-Associative Algebras and Related Topics", desfășurat la Universitatea din Coimbra, Portugalia.

Dragoș Ștefan, Florin Panaite, Andrei Chiteș și **Mădălin Ciungu** au participat, în perioada 24-26 octombrie, la congresul internațional "Algebra, Geometry and Mathematical Physics", desfășurat la Universitatea din Mulhouse, Franța.

Detalii despre aceste activități pot fi găsite în Raportul în extenso.