

SINTEZA LUCRARI I

DENUMIREA PROIECTULUI: Algoritmi si Combinatorica in Algebra si Geometrie

Proiect ID_1903, director : prof.dr. Dorin Mihail Popescu

Perioada raportata : 2009

1. Obiectivele generale ale proiectului

1. studiul unor multimi partial ordonate, prin caracterizarea proprietatii Koszul a inelului graduat asociat algebrei de incidenta, prin reflectarea diferitelor tipuri de conditii de lant si de succesiune la algebrele asociate si prin descrierea combinatoriala a multimilor partial ordonate ale caror inele graduate asociate algebrei de incidenta sunt date de relatii polinomiale omogene de gradul 2, care sa permita abordarea unor probleme de clasificare;
2. descrierea unor clase de ideale monomiale prin intermediul modulelor de omologie Koszul si studiul modulelor de omologie Koszul pentru module Cohen-Macaulay si Gorenstein, care sa permita abordarea problemei independentei numerelor Betti de caracteristica corpului de coeficienti al algebrei polinomiale;
3. calculul efectiv al unor invarianti algebrici si geometrici (regularitate Castelnuovo- Mumford, profunzime etc.), care sa permita abordarea unor probleme de clasificare in algebra comutativa sau in geometria algebrica;
4. identificarea de algoritmi eficienti pentru calcule in clase speciale de ideale monomiale si pentru clase speciale de varietati algebrice proiective, sau pentru factorizarea unor polinoame cu coeficienti intr-un corp comutativ;
5. rezolvarea conjecturii lui Stanley pentru inele de polinoame in 6 variabile si demonstrarea acesteia in alte cazuri particulare, care sa permita dezvoltarea unei strategii ce ar putea duce la demonstrarea cazului general;
6. transpunerea unor rezultate de algebra comutativa sau de algebra necomutativa in alte domenii cum ar fi geometria algebrica sau studiul ecuatiilor cu derivate partiale (de exemplu: ecuatii polinomiale si ideale in inele de polinoame strimbe peste inele particulare, module peste inele de polinoame strimbe, estimari privind dimensiunea algebrelor sau varietatilor algebrice, studierea conditiilor privind finitudinea dimensiunii).

2. Obiectivele specifice fazelor intermediara si finala din anul 2009 si modul de indeplinire

Pentru anul 2009, obiectivele proiectului au fost:

1. Dezvoltarea unor noi directii de cercetare in algebra si geometrie.

Pentru realizarea acestui obiectiv al contractului au fost prevazute patru activitati specifice, si anume:

Experimentarea a cel puțin doi algoritmi de calcul in problematica contractului;

Participarea cu lucrari a membrilor contractului la cel puțin o conferinta;

Efectuarea a cel puțin un stagiul de pregatire in strainatate;

Un articol trimis spre publicare in tematica contractului.

In aceasta directie mentionam lucrarea An inequality between depth and Stanley depth publicata de domnul Dorin Popescu in Bull. SSMR, 52(100), no.3, 2009, 377-383.

In general, algebrele standard graduate reprezinta un obiect de studiu central in domenii importante ale matematicii, cum ar fi algebra comutativa, combinatorica si geometria algebrica proiectiva. Prezentul proiect de cercetare isi propune studierea idealelor monomiale, precum si a modulelor multigraduate finit generate peste inele de polinoame prin mijloace provenind din directii diferite foarte importante in cercetarea matematica actuala, precum: aspecte combinatoriale si computationale ale algebrei comutative, metode de factorizare combinatoric algebrice.

Idealele monomiale sunt ideale omogene in raport cu N^n -graduarea, reprezentand un caz particular de ideale polinomiale omogene. Studiul idealelor polinomiale omogene se reduce prin deformare Groebner la cazul idealelor monomiale, care pastreaza o parte semnificativa a invariantilor numerici ai idealelor initiale, cum ar fi regularitatea, seria Hilbert, dimensiunea proiectiva. Trecerea la ideale monomiale permite studiul acestora prin mijloace specifice combinatoricii precum si ale algebrei computationale. Un caz aparte de ideale monomiale este cel al idealelor Stanley-Reisner, adica idealele monomiale libere de patrate. Studiul acestor ideale este esential, deoarece prin polarizare orice ideal monomial poate fi redus la un ideal monomial liber de patrate, pastrand invarianti algebrici precum numerele Betti, inaltime, dimensiunea proiectiva si regularitatea. Avantajul obtinut cu ajutorul polarizarii este ca pentru studiul idealelor monomiale libere de patrate pot fi utilizate si metode provenind din geometria convexa, topologia algebrica, combinatorica matroizilor si a complexelor simpliciale.

O tematica importanta in cercetarea actuala o reprezinta doua conjecturi ale lui R. Stanley, una cu privire la asa-zisele descompuneri Stanley ale modulelor multigraduate, iar a doua fiind despre complexe simpliciale partitionabile. Prima conjectura a fost formulata de Stanley in 1982, intr-o lucrare aparuta in *Inventiones Math.* si timp de 23 de ani doar cateva cazuri particulare au putut fi aratate. Aceasta conjectura spune ca exista o descompunere Stanley a unui modul multigraduat finit generat al carei "sdepth" este marginit inferior de depth-ul modulului. In 2006, J. Herzog si D. Popescu au reusit o munca de pionierat in directia rezolvarii acestor conjecturi, aratand ca orice modul "pretty clean" satisface conjectura lui Stanley. Aceasta clasa de module a fost introdusa de autori ca o generalizare a conceptului de modul "clean" introdus de Dress. Avand la baza aceasta lucrare, o serie de articole recent aparute descriu diverse clase de module "pretty clean", rezolvand astfel conjectura in cazuri particulare. Merita mentionat faptul ca Dorin Popescu si Imran Anwar au reusit sa demonstreze conjectura in cazul inelelor de polinoame in 4 nedeterminate. Ulterior, in ianuarie 2008, Dorin Popescu a reusit sa demonstreze conjectura si in cazul inelelor de polinoame in 5 nedeterminate. Cu toate acestea, conjectura este inca larg deschisa deoarece metodele de rezolvare au depins de particularitatea cazurilor considerate. Insa, in decembrie 2007 J. Herzog, M. Vladoiu si X. Zheng au reusit sa dea o strategie generala pentru aceasta problema furnizand un algoritm de calcul pentru sdepth-ul unui modul de forma J/I , unde J si I sunt ideale monomiale oarecare in inele de polinoame cu n nedeterminate. Aceasta noua abordare a permis obtinerea unor cazuri noi unde conjectura este verificata, in afara clasei modulelor pretty clean. Mai mult, au putut fi redemonstrate mult mai usor cazuri cunoscute anterior, dar avand demonstratii complicate, cateodata inaccesibile datorita tehnicilor neunitare de demonstratie.

O clasa speciala de ideale monomiale este cea a idealelor de tip Borel. Structura acestor ideale este extrem de complicata, descrierea proprietatilor idealelor p-Borel principale prin intermediul regularitatii Castelnuovo - Mumford fiind realizata recent de Herzog, Popescu si Vladoiu (cu ajutorul modulelor Ext) si Caviglia si Sbarra care au gasit margini superioare pentru valoarea regularitatii. Herzog si Popescu au aratat ca algebrele factor prin ideale de tip Borel sunt de tip pretty clean (in particular secvential Cohen - Macaulay) si ca pentru cazul in care acestea sunt pretty clean graduate, conjectura lui Stanley este adevarata. Ulterior Herzog, Vladoiu si Zheng au aratat ca si in cazul idealelor de tip Borel conjectura lui Stanley este verificata.

Lucrarea mai sus mentionata (D. Popescu, An inequality between depth and Stanley depth) se inscrie in acesta directie generala.

Fie $S=K[x_1, \dots, x_n]$ algebra polinoamelor in n variabile peste un corp K si M un S -modul multigradat, adica Z^n -graduat, finit generat. Dat $m \in M$ un element omogen si $Z \subset \{x_1, \dots, x_n\}$ atunci spatiul K -linear $mK[Z]$ se numeste spatiu Stanley de dimensiune $|Z|$ daca $\text{Ann}_S/m=0$. O descompunere Stanley a lui M este o prezentare a K -spatiului M ca o suma directa finita de spatii Stanley D : $M = \bigoplus_{i=1}^r m_i K[Z_i]$. Notam $\text{sdepth } D = \min_i |Z_i|$ si numim $\text{sdepth } M = \max\{\text{sdepth } D : D \text{ fiind o descompunere Stanley a lui } M\}$, depth-ul Stanley al lui M .

Conjectura Stanley deschisa din 1982 spune ca $\text{sdepth } M \geq \text{depth } M$, ultimul fiind depth-ul clasic al lui M . Intr-o lucrare precedenta [J. of Algebra 321 (2009), 2782-2797], autorul D. Popescu arata valabilitatea conjecturii Stanley pentru modulele M cu $\dim M \leq 2$ si pentru S -modulele ciclice de forma S/I cand $n \leq 5$ si I este ideal monomial. Scopul lucrarii este stabilirea conjecturii Stanley pentru idealele monomiale reduse ale lui S cand $n \leq 5$. Cu aceasta ocazie se dau o serie de leme valabile in cazul general. Obstructia principala la stabilirea rezultatului pentru $n=6$ il constituie faptul ca nu se cunoaste inca valabilitatea conjecturii pentru M cu $\dim M=3$. Pentru a intelege limitele rezultatelor expuse se dau diferite exemple utile.

Este interesant de observat ca valabilitatea conjecturii Stanley pentru ideale in cazul $n \leq 5$ ar iesi din rezultatul obtinut in lucrarea citata mai sus pentru module ciclice daca conjectura pusa de Asia Rauf ar fi valabila, adica daca $\text{sdepth}(I) \geq 1 + \text{sdepth}(S/I)$ pentru orice ideal monomial al lui S .

In prezent aceasta conjectura este deschisa chiar si in cazul $n=5$.

2. Dezvoltarea cadrului de informare si documentare a membrilor contractului

Pentru realizarea acestui obiectiv, au fost prevazute activitatile:

Efectuarea de stagii de perfectionare si cercetare in diverse universitati din tara si din strainatate ;

Organizarea si desfasurarea unor cercuri stiintifice pentru cadre didactice, cercetatori si studenti.

A continuat desfasurarea seminarului de Algebra Locala "N. Radu", organizat saptaminal in cadrul Facultatii de Matematica si Informatica din Bucuresti, care este un loc de intilnire a specialistilor din domeniul algebrei comutative.

Patru dintre membrii grantului (Dorin Popescu, Marius Vladoiu, Mihai Epure si Dumitru Stamate) participa constant la lucrarile acestui seminar si sustin prezentari. Acestora li se alatura alti profesori din Universitatea Bucuresti, din Ploiesti, Pitesti, Constanta sau cercetatori de la Institutul de Matematica al Academiei Romane.

Activitatile seminarului imbina prezentarea de rezultate recente cu studiul unor lucrari fundamentale de referinta, necesare acumularii unui bagaj de cunostinte suficient pentru abordarea problemelor actuale de cercetare.

Pentru perioada ultimei faze (oct-dec 2009) evidentiem seria de prezentari tinute de Dorin Popescu referitoare la progrese recente in rezolvarea Conjecturii Stanley si de Marius Vladoiu pe teme de teoria politopurilor.

Un alt membru al contractului (Cristian Voica) participa la seminarul de Geometrie Algebrica din cadrul IMAR, Bucuresti. In cadrul acestui seminar, a fost facuta o serie de prezentari privind geometria tropicala, care are importante aplicatii in geometria enumerative.

3. Publicarea unor rezultate in domeniile tematicii contractului
Una din activitatile prevazute in contract pentru realizarea acestui obiectiv este participarea membrilor contractului la conferinte nationale si internationale

Conf. Dr. Cristian Voica, membru al contractului, a participat in perioada 19-24 iulie 2009 la 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), care a avut loc la Salonic, Grecia. PME este un subgrup al International Commission for Mathematical Instruction, comisie al carei prim presedinte a fost Felix Klein. Educatia matematica prezinta interes pentru proiectul nostru din doua perspective. Pe de o parte, unul dintre obiectivele proiectului vizeaza organizarea si desfasurarea unor cercuri stiintifice pentru studenti, precum si organizarea unor scoli de vara la care sa participe studentii interesati de tematica contractului. Este evident deci ca pentru participantii la aceste cercuri sau scoli de vara sunt utile studii de educatie matematica. Pe de alta parte, educatia matematica are legatura cu inteligenta artificiala, domeniu care este conectat cu programele de calculator.

La conferinta mai sus mentionata, C.Voica a prezentat lucrările: The problem solving process between static and dynamic (co-autori: I.Pelczer, M.Singer) si When the infinite sets uncover structures: An analysis of student's reasoning on infinity (co-autor: M.Singer). De asemenea, în colaborare cu alti 6 specialisti din diverse țări, a fost co-organizator al unei sesiuni de lucru (working session) cu titlul: Problem posing in mathematics learning: establishing a theoretical base for research.

Director de contract,

Prof.dr. Dorin Popescu