

RAPORT IN EXTENSO
LA CONTRACTUL 542/2009/13.01.2009 CU TITLUL
ALGORITMI SI COMBINATORICA IN ALGEBRA SI GEOMETREI,
COD PROIECT 1903, DIRECTOR DORIN POPESCU

Pentru anul 2011, obiectivele contractului au fost urmatoarele:

Obiectivul 1. *Diseminarea rezultatelor obtinute in cadrul programelor de doctorat ale doctoranzilor cuprinsi in echipa proiectului sau obtinute de membrii contractului in lucrarile trimise spre publicare.*

Obiectivul 2. *Dezvoltarea bazei materiale in vederea unei mai bune coordonari intre membrii echipei de cercetare.*

Obiectivul 3. *Dezvoltarea colaborarii intre specialisti care lucreaza in domenii diferite, in vederea obtinerii unor rezultate cu caracter integrator.*

Pentru fiecare dintre aceste obiective, am avut prevazute mai multe activitati. Detaliem in continuare modul in care au fost realizate fiecare dintre activitatile contractului.

Obiectivul 1. *Diseminarea rezultatelor obtinute in cadrul programelor de doctorat ale doctoranzilor cuprinsi in echipa proiectului sau obtinute de membrii contractului in lucrarile trimise spre publicare.*

Initial, in echipa proiectului au fost inclusi doi doctoranzi (Dumitru Stamate si Mihai Epure). Pe parcursul desfasurarii proiectului, primul dintre acestia si-a finalizat programul de doctorat. O parte din rezultatele din lucrarea sa de doctorat au fost prezentate la Scoala Nationala de Algebra (septembrie 2011) si la universitatile din Minneapolis si Davis (SUA). De asemenea, Dumitru Stamate si Mihai Epure au tinut diverse prelegeri in cadrul seminarului de algebra locala.

Acest obiectiv a avut prevazute 3 activitati si anume:

Activitatea 1. *Participarea la conferinte, scoli de vara, workshop-uri nationale si internationale (din Romania, Germania, Austria, Franta, Italia, Marea Britanie, Cehia, Belgia, Spania, Turcia, Grecia, Ucraina, SUA) .*

Au fost tinute comunicari la urmatoarele conferinte:

- Conferinta Algebraic versus Analytic Geometry 19 nov. – 13 dec. 2011, ESI - Vienna, Austria, la care la sectiunea "Arcs Spaces and Artin Approximation" D. Popescu a prezentat 6 lectii, care se gasesc la adresa http://www.xxyyzz.cc/lectures_ATA.html);

- Congresul Matematicienilor romani de pretutindeni - The Seventh Congress of Romanian Mathematicians June 29 - July 5, 2011, Brasov, Romania, la care au fost prezentate comunicările:

(<http://imar.ro/organization/activities/standalone/congmatro2011/conf.php>)

- Dorin Popescu: Recent results on Stanley's conjecture
- Cristian Voica: Pre-service teacher training: new understandings of the teaching profession;

- Conferinta MONomial Ideals, Computations and Applications. CIEM Castro Urdiales (Cantabria, Spain), July 11-13, 2011, la care Marius Vladioiu a tinut o comunicare despre Stanley depth and size of a monomial ideal (vezi http://monica.unirioja.es/conference/monica_program.html);

- Conferinta 5th World Conference on 21st Century Mathematics 2011, February 9-13, 2011, Lahore, Pakistan, (<http://wc2011.sms.edu.pk/doku.php?id=programme>), la care Marius Vladioiu a tinut o comunicare despre Stanley depth and size of a monomial ideal;

- Conferinta PME 35, la care Cristian Voica a prezentat lucrarea In-service and pre-service teachers's strategies of task adaptation.

- Scoala Nationala de Algebra Computer Algebra and Combinatorics (Bucharest, Romania, September 18 - September 24, 2011), la care trei membri ai contractului au tinut urmatoarele comunicari:

- Dorin Popescu - Depth, graphs and minimal number of generators of a square free monomial ideal

- Dumitru Stamate - The Koszul property for numerical semigroups

- Marius Vladioiu - Affine monoids and Hilbert bases I, Affine monoids and Hilbert bases II, Computing convex hulls and triangulations. (vezi http://math.univ-ovidius.ro/sna/19/PDF/19_Program.pdf).

Consideram ca aceasta activitate a fost realizata cu succes.

Activitatea 2: Publicarea unui curs universitar in tematica contractului.

Suntem in etapa de finalizare a unui curs cu titlul "Metode computationale in algebra si geometrie", adresat studentilor din anul III si studentilor de la master. Cursul este inclus in planul editorial al Universitatii Bucuresti pentru anul 2012.

Am preferat sa testam materialele scrise prin oferirea acestora studentilor de la master, pentru a putea imbunatati cursul scris prin exemple, comentarii sau noi sectiuni si aplicatii. In acest mod credem ca feedback-ul oferit de studenti ne ajuta pentru a scrie un curs de calitate. Am preferat acest lucru finalizarii rapide a cursului, chiar daca in acest fel am indeplinit doar partial obiectivul propus.

Obiectivul 2. *Dezvoltarea bazei materiale in vederea unei mai bune coordonari intre membrii echipei de cercetare.*

In mare, am realizat planul de achizitii propus. In plus, datorita plafonarii impuse de MECTS privind achizitiile publice, am reusit sa achizitionam din banii ramasi si o imprimanta, extrem de necesara pentru activitatea de cercetare cat si pentru cea didactica, desfasurata in paralele de membrii echipei de cercetare.

Acest obiectiv a avut prevazute doua activitati si anume:

Activitatea 1. *Achizitionarea a 6 laptopuri (cu rezolutie de minim 1680x1050, DDR3, cu placa video cu RAM dedicat, minim 512 MB) si a unor programe de calculator cu tematica contractului.*

Am achizitionat 6 laptopuri Acer Aspire 5951G, Intel Core 17-26300QM RAM 8 GB, HDD 700 GB. Aceste calculatoare au fost livrate impreuna cu programele necesare.

Consideram ca aceasta activitate s-a desfasurat in conditii bune.

Activitatea 2. *Cumpararea unor carti sau reviste de specialitate, sau a unor abonamente pentru accesul la baze de date on-line cu articole stiintifice. Cumpararea de consumabile.*

Datorita restrictiilor legale impuse nu am reusit sa gasim la distribuitorii din Romania carti in tematica contractului. De aceea, am indeplinit aceasta activitate doar partial, alocand toti banii corespunzatori cumpararii de consumabile.

Obiectivul 3. *Dezvoltarea colaborarii intre specialisti care lucreaza in domenii diferite, in vederea obtinerii unor rezultate cu caracter integrator*

Activitatea 1. *Efectuarea de stagii de perfectionare si cercetare in diverse universitati din tara si din strainatate (in Germania, Grecia, Italia, SUA), in vederea colaborarii cu specialisti din alte domenii.*

Dumitru Stamate a avut doua stagii de pregatire la universitatile din Minneapolis (Minnesota) si Davis (California) USA, unde a lucrat la dezvoltarea unor programe de software pentru calculul rezolutiilor pure ale unor clase de module, respectiv la studiul proprietatii Koszul a algebrelor monoidale. Software-ul elaborat de d-l Stamate in colaborare cu David Eisenbud, Daniel Erman si Gregory Smith poate fi consultat la adresa <svn://svn.macaulay2.com/Macaulay2/workshops/IMA-2011/TensorComplexes/TensorComplexes.m2>.

Dorin Popescu a avut un stagiu de cooperare stiintifica la Universitatea din Kaiserslautern (Germania), unde a lucrat impreuna cu Prof. Dr. Gerhard Pfister la conjectura Stanley.

Activitatea 2. *Prezentarea unor conferinte adresate unor specialisti din diverse domenii.*

Unele dintre conferintele sau congresele la care au participat membri ai contractului au avut caracter general. La aceste conferinte au participat specialisti din diverse domenii, iar comunicările noastre au urmarit evidentierea unor legaturi intre algebra comutativa si

combinatorica, teoria grafurilor, geometrie algebrică, topologie algebrică, algebra computațională.

Activitatea 3. *Extinderea colaborării, în cadrul unor seminarii/ cercuri științifice, cu specialiști din alte domenii.*

Seminarul științific de algebra locală, ținut săptămânal, a fost deschis tuturor doritorilor. La acest seminar participă uzual specialiști din geometrie algebrică, topologie și combinatorică. Am urmărit și realizat dezvoltarea colaborării cu specialiști din afara proiectului.

În concluzie privitor la obiectivele și activitățile asumate considerăm că am îndeplinit cu succes toate obligațiile contractuale.

Pentru această fază am avut prevăzute următoarele rezultate așteptate:

Două articole publicate (sau acceptate spre publicare) în reviste cotate ISI; două articole publicate (sau acceptate spre publicare) în reviste indexate BDI; lucrări prezentate la cel puțin 3 conferințe naționale/internationale; efectuarea a două stagii de pregătire în universități din străinătate; un curs pentru uzul studenților; o conferință de popularizare în facultate.

Detaliem în continuare modul de realizare.

- S-au elaborat în cadrul tematicii grantului următoarele lucrări:

1. Lucrarea *Graph and depth of a monomial squarefree ideal*, autor D. Popescu, a fost acceptată spre publicare în Proceedings American Mathematical Society (disponibilă online pe pagina de web a jurnalului). Menționăm că această revistă este cotată ISI.

2. Lucrarea *Stanley's conjecture on intersection of four monomial prime ideals*, autor D. Popescu, a fost trimisă spre publicare în Communications in Algebra. Menționăm că această revistă este cotată ISI.

3. Lucrarea *Stanley depth and size of a monomial ideal*, autori J. Herzog, D. Popescu și M. Vlădoiu, Proceedings American Mathematical Society, 140(2012), 493-504. Menționăm că această revistă este cotată ISI.

4. Lucrarea *Bounds of Stanley depth*, autor Dorin Popescu, a fost publicată în Analele Științifice ale Universității Ovidius Constanța, Vol. 19 (2011), Fascicula 2, 187-194. Menționăm că această revistă este indexată ISI și BDI.

5. Lucrarea *In-service and pre-service teacher's strategies of task adaptation*, autori C. Voica, I. Pelczer, M. Singer, a fost acceptată spre publicare în revista Proceedings PME 35. Revista este indexată ISI și BDI.

- Rezultatele cuprinse în aceste lucrări au fost prezentate la conferințe naționale/internationale. Lucrarea 1 a fost prezentată în cadrul Scolii Naționale de

Algebra „Computer Algebra and Combinatorics”, Bucuresti, Romania, Septembrie 18 - Septembrie 24, 2011. Lucrarea 3 a fost prezentata la conferinta internationala MONomial Ideals, Computations and Applications, CIEM Castro Urdiales (Cantabria, Spain), iulie 11-13, 2011, respectiv la Conferinta 5th World Conference on 21st Century Mathematics 2011, Februarie 9-13, 2011, Lahore, Pakistan. Lucrarea 5 a fost prezentata la conferinta internationala PME 35, iulie 10-15, 2011, Ankara, Turcia. In plus, ca urmare a diseminarii rezultatelor au fost continuate expunerile la seminarul stiintific *Algebra Locala* care se desfasoara saptamanal, martea, 12-14, sala 120, Facultatea de Matematica si Informatica. Seminarul este coordonat de catre Prof.dr. Dorin Popescu.

Prezentam in continuare contextul lucrarilor realizate si principalele rezultate obtinute.

Un subiect de actualitate il constituie doua conjecturi formulate de Richard Stanley. In prima conjectura Stanley se refera la asa numitele descompuneri Stanley ale modulelor multigraduate finit generate peste inele de polinoame in n variabile standard graduate, iar a doua se refera la complexe simpliciale partitionabile. Prima conjectura a fost lansata de Stanley in 1982 intr-un articol aparut in prestigioasa revista *Inventiones Mathematicae* si timp de 23 de ani a fost validata doar in citeva cazuri izolate. Aceasta conjectura afirma ca orice modul multigraduat finit generat peste inelul de polinoame intr-o multime finita de variabile, standard graduat, admite o descompunere Stanley al carei Stanley depth (sdepth) este marginit inferior de depth-ul modulului. Recent a fost demonstrat ca prima conjectura mentionata o implica de fapt pe a doua. Articolele a caror descriere stiintifica o vom face in cele ce urmeaza au ca studiu de cercetare aceasta conjectura a lui Stanley. Inainte de a incepe descrierea propriu-zisa a acestor lucrari vom prezenta aceasta conjectura cu definitiile necesare intelegerii enuntului.

Fie $S = K[x_1, \dots, x_n]$ un inel de polinoame in n variabile peste un corp K si M un S -modul finit generat multigraduat (adica S^n -graduate). Fie u un element omogen din M si Z o submultime (posibil vida) a multimii de variabile $\{x_1, \dots, x_n\}$. Vom nota cu $uK[Z]$ K -subspatiul vectorial al lui M generat de toate elementele de forma uv , cu v un monom din $K[Z]$. Un astfel de spatiu vectorial de forma $uK[Z]$ il vom numi *spatiu Stanley* de dimensiune $|Z|$, daca $uK[Z]$ este un $K[Z]$ -modul liber. O *descompunere Stanley* a lui M este o prezentare a K -spatiului vectorial M ca o suma directa finita de spatii Stanley in categoria K -spatiilor vectoriale multigraduate. Cu alte cuvinte, fiecare din sumanzii directe ai lui M este un K -subspatiu vectorial multigraduat al lui M si descompunerea este compatibila cu multigraduarea. Numarul $\text{sdepth} D = \min\{|Z_i| : i = 1, \dots, m\}$, unde m este numarul spatiilor Stanley din descompunerea D a lui M , se numeste *Stanley depth-ul* lui D . *Profunzimea Stanley* (Stanley depth-ul) lui M se defineste ca fiind

$$\text{sdepth} M := \max\{\text{sdepth} D : D \text{ este o descompunere Stanley a lui } M\}.$$

Prima conjectura mai sus mentionata poate fi scrisa acum

$$\text{depth} M / \leq \text{sdepth} M, \text{ pentru orice } S\text{-modul } M \text{ multigraduat.}$$

Conjectura este deschisa in cazul general, dificultatea venind din faptul ca trebuie comparati doi invarianti: unul combinatorial cu unul omologic. Cu toate acestea in situatia speciala a modulelor de forma I/J , unde I si J sunt ideale monomiale au fost facute progrese remarcabile in ultimii 5 ani. De exemplu s-a aratat ca daca aceasta conjectura este valabila pentru toate idealele monomiale I astfel incat S/I este Cohen-Macaulay, atunci este valabila in general pentru orice modul de tipul S/I unde I este un ideal monomial. In cazul idealelor monomiale libere de patrate Dorin Popescu a demonstrat in lucrarea *An inequality between depth and Stanley depth*, publicata in 2009, ca aceasta conjectura a lui Stanley este adevarata daca $n \leq 5$.

De ce este important cazul idealelor monomiale libere de patrate? Pentru ca prin polarizare orice ideal monomial poate fi transformat intr-un ideal monomial liber de patrate. Prin acest functor polarizare, depth-ul unui ideal monomial creste cu unu la fiecare pas al polarizarii. Cu toate ca inca nu a fost inca demonstrate, totul conduce la convingerea ca si sdepth-ul unui ideal monomial se comporta in acelasi mod. Asta ar insemna ca demonstrarea conjecturii lui Stanley pentru ideale monomiale libere de patrate ar implica demonstrarea conjecturii lui Stanley in cazul general al idealelor monomiale

In lucrarea *Graph and depth of a monomial squarefree ideal*, acceptata spre publicare in Proceedings American Mathematical Society, autorul *Dorin Popescu* verifica Conjectura Stanley pentru clasa idealelor monomiale I libere de patrate ce au proprietatea ca suma oricaror trei prime minimale distincte este idealul maximal m sau, mai general, un ideal fixat.

Aceasta conditie corespunde la $\text{bigsize}(I)=2$ si $\text{size}(I)=1$.

Este introdus un graf ale carui virfuri sunt primele minimale din S/I . Se demonstreaza ca unele proprietati algebrice ale lui S/I pot fi deduse din proprietati combinatoriale ale acestui graf. In particular este calculat $\text{depth } I$ si se arata ca acesta nu depinde de caracteristica corpului de coeficienti.

In lucrarea *Stanley conjecture on intersections of four monomial prime ideals*, trimisa spre publicare la Communications in Algebra, Dorin Popescu extinde tehnica folosirii "descompunerilor Stanley speciale" introdusa de A. Popescu. O posibila modalitate de demonstrare a conjecturii Stanley in cazul idealelor monomiale libere de patrate ar fi prin inductie dupa numarul de ideale prime monomiale care apar in descompunerea primara a idealului. In acest sens Adrian Popescu a demonstrat in lucrarea *Special Stanley decompositions* publicata in 2010, ca idealele monomiale libere de patrate care se scriu ca intersectie de 3 ideale monomiale prime satisfac conjectura lui Stanley. In acest context vom prezenta rezultatele propriu zis ale lucrarilor realizate de membrii echipei de cercetare in cadrul proiectului.

In cazul in care I este ideal monomial liber de patrate, aceasta tehnica permite gasirea de minoranti pentru $\text{sdepth } I$ in functie de sdepth pentru alte ideale monomiale, dar in mai

putine variabile. In acest articol sunt gasiti minoranti mai buni atunci cand idealul I se scrie ca intersectie de patru ideale prime monomiale, ori ca intersectie de ideale prime monomiale cu proprietatea ca nici unul dintre acestea nu este inclus in suma celorlalte. Aceste rezultate duc la verificarea conjecturii Stanley pentru idealul I de forma mentionata.

Lucrarea *Bounds of Stanley Depth*, autor Dorin Popescu si publicata in Analele Univ. Ovidius, seria matematica, determina minoranti pentru s -depth. Pentru a solutiona Conjectura Stanley este nevoie sa intelegem mai bine comportamentul s -depth. O serie de rezultate clasice sau foarte recente legate de comportamentul profunzimii (depth) isi gasesc analogul pentru s -depth. Astfel, s -depth S/I este majorat de $\dim S/P$, pentru oricare P ideal prim asociat lui I . De asemenea (Teorema 2), in cazul in care I ideal monomial, s -depth($I:v$) $\geq s$ -depth I , pentru orice monom v care nu este in idealul I . Rezultatul analog pentru depth a fost recent aratat de A. Rauf (2010). Este evidentiat rolul primelor asociate in marginirea s -depth. Pe cazuri particulare importante, rezultate recente ale lui Herzog, Ishaq, A.Popescu, D. Popescu, Qureshi, Vladioiu propun margini tot mai bune pentru s -depth. Ar fi util de stiut o relatie cit mai exacta intre s -depth I si s -depth S/I . Si aici rezultatele se obtin foarte greu. Teorema 20 trateaza cazul I ideal monomial intersectie de trei ideale prime generate de multiplu variabile care nu se suprapun. Atunci, s -depth $I \geq s$ -depth S/I . Mai mult, cu exceptia unor cazuri determinate complet de autor aici, are loc inegalitatea mai tare: s -depth $I \geq 1 + s$ -depth S/I .

Pachetul software *TensorComplexes* pentru Macaulay2, implementat de David Eisenbud, Daniel Erman, Gregory G. Smith si Dumitru Stamate, disponibil la adresa <svn://svn.macaulay2.com/Macaulay2/workshops/IMA-2011/TensorComplexes/TensorComplexes.m2>, implementeaza un algoritm care produce module cu rezolutii pure, conform unei metode propuse de Berkesch-Erman-Kummini-Sam. Rezolutiile acestor module sunt foarte importante deoarece sunt razele extremale (generatorii) in evantaiul Boij-Soederberg. Sunt cunoscute foarte putine metode de a construi astfel de rezolutii (Koszul, Eagon-Northcott). Software-ul dezvoltat implementeaza convenabil operatiile din algebra tensoriala si exteriora pentru a obtine rezolutii pure plecind de la parametri fixati de utilizator.

In lucrarea *In-service and pre-service teachers' strategies of task adaptation*, co-autor Cristian Voica, lucrare prezentata la Conferinta PME 35, este prezentat un studiu privind strategiile detectate la diferite persoane care adapteaza o problema pentru situatia concreta. Aceste strategii pot fi: pastrarea continutului matematic; focusarea pe un aspect specific; creare unui context, prin adresarea de intrebari specific pentru obtinerea solutiei; manipularea/ modificarea conditiilor problemei; adaptarea textului la situatia data. In lucrare se arata ca exista diferente intre preferintele persoanelor in-service si pre-service, privitoare la tipul strategiilor alese.

Lucrarea *Stanley depth and size of a monomial ideal*, scrisa in colaborare de Jurgen Herzog, Dorin Popescu si Marius Vladoiu, a fost acceptata spre publicare in revista *Proceedings of the American Mathematical Society*. Rezultatul de la care a fost initiata aceasta lucrare este o inegalitate a lui Lyubeznik aparuta in *Journal of Algebra* in 1988, care spune ca $\text{depth } I \leq 1 + \text{size } I$, unde size -ul unui ideal este un invariant combinatorial care se defineste in functie de idealele prime asociate idealului. Aceste prime asociate se pot determina dintr-o descompunere primara a idealului I . Mai precis, conform lui Lyubeznik, in cazul in care I este un ideal monomial liber de patrate intr-un inel de polinoame in n variabile, avand idealele prime minimale P_1, \dots, P_s , $\text{size}(I)$ reprezinta numarul $v + (n - h) - 1$, unde h reprezinta inaltimea idealului care se obtine prin suma tuturor idealelor prime minimale, iar v este cel mai mic numar natural t pentru care exista intregii $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ astfel incat suma tuturor idealelor prime minimale sa fie egala cu suma idealelor din multimea $P_{\{i_1\}}, \dots, P_{\{i_t\}}$. Intr-o alta lucrare, autorii prezinta aceasta definitie in cadrul mai general al oricarui ideal monomial, inlocuind corespunzator in definitie, multimea primelor minimale cu cea a primelor asociate. In cazul in care conjectura lui Stanley ar fi adevarata atunci, tinand cont de inegalitatea lui Lyubeznik ar trebui sa avem si $\text{sdepth } I \geq 1 + \text{size } I$. Intr-adevar, autorii demonstreaza in sectiunea 3 a articolului aceasta inegalitate in baza unor tehnici dezvoltate in sectiunile 1 si 2. Pentru demonstrarea acestei inegalitati autorii au trebuit sa introduca tehnici noi de algebra omologica si combinatoriala. In Sectiunea 1, este introdus un cocomplex G care este asociat unei multimi J_1, \dots, J_s de ideale monomiale din inelul S/I , unde S reprezinta ca de obicei inelul de polinoame in n variabile peste un corp K , iar I reprezinta un ideal monomial din S . Se demonstreaza ca acest complex de module introdus este aciclic, iar in cazul particular in care $I=0$ si idealele J_1, \dots, J_s sunt ideale monomiale ireductibile, G poate fi vazut ca dualul Alexander al complexului Taylor. Cu toate acestea principala aplicatie a acestui complex este calculul, respectiv estimarea in anumite situatii, a depth -ului intersectiei tuturor idealelor J_1, \dots, J_s . In termeni legati de acest complex introdus autorii dau in Teorema 1.2. un criteriu pentru un ideal monomial de a avea depth -ul minimal, adica $\text{depth } I = 1 + \text{size } I$. In particular se arata ca depth -ul minimal se atinge atunci $\text{depth } I = 1 + \text{bigsize } I$, unde $\text{bigsize } I$ reprezinta un invariant introdus de Dorin Popescu.

De asemenea, pe baza aceluiasi complex, sunt date margini superioare pentru regularitatea unui ideal monomial liber de patrate I , in functie de $\text{cosize } I$, un invariant introdus de autori, cu ajutorul dualitatii Alexander.

- In stransa legatura cu activitatea de cercetare, membrii echipei contractului au propus teme de licenta/dizertatie studentilor din facultate. A fost deja aleasa o tema de licenta in tematica contractului ("Aplicatii ale bazelor Grobner in combinatorica", conducator stiintific M. Vladoiu) si exista discutii preliminare (la acest moment) pentru alte doua lucrari de dizertatie.

- Atragem atentia asupra faptului ca numarul lucrarilor elaborate/ publicate in reviste cotate ISI este mai mare decat cel din angajamentul asumat.