

Sinteza lucrării

Program PN II-IDEI, Cod ID8, contract nr. 525/08.01.2009

SUBMERSII ȘI SUBVARIETĂȚI ÎN GEOMETRII DE TIP CUATERNIONIC

Director: prof. dr. Liviu Ornea

1. ARTICOLE ȘTIINȚIFICE PUBLICATE, ACCEPTATE SAU TRIMISE SPRE EVALUARE ÎN 2010

Articole publicate în reviste cotate ISI

[1] Stere Ianuș, Stefano Marchiafava, Gabriel Eduard Vîlcu, *Paraquaternionic CR-submanifolds of paraquaternionic Kähler manifolds and semi-Riemannian submersions*, Central European Journal of Mathematics 8 (2010), 735–753.

[2] S. Ianuș, M. Visinescu, G.E. Vîlcu, *Hidden symmetries and Killing tensors on curved spaces*, Physics of Atomic Nuclei 73 (2010), No. 11, 1925–1930.

[3] Gabriel Eduard Vîlcu, *3-submersions from QR-hypersurfaces of quaternionic Kähler manifolds*, Annales Polonici Mathematici 98 (2010), No. 3, 301–309.

Articole acceptate spre publicare în reviste cotate ISI

[4] Stere Ianuș, Liviu Ornea, Gabriel Eduard Vîlcu, *Submanifolds in manifolds with metric mixed 3-structures*, Mediterranean Journal of Mathematics 9 (2012), No. 2.

[5] Florin Belgun, Andrei Moroianu, Liviu Ornea, *Essential points of conformal vector fields*, Journal of Geometry and Physics.

Articole acceptate spre publicare în volumele unor conferințe indexate ISI Proceedings

[6] Rodica Cristina Voicu, *Ricci curvature properties and stability on 3-dimensional Kenmotsu manifolds*, Contemporary Mathematics, A Harmonic Map Fest, Volume Editors: E. Loubeau and S. Montaldo (2011).

Articole trimise spre publicare

[7] Liviu Ornea, Misha Verbitsky, *Oeljeklaus-Toma manifolds admitting no complex subvarieties*, 2010.

[8] Stere Ianuș, Gabriel Eduard Vîlcu, Rodica Crisitina Voicu, *Harmonic maps and Riemannian submersions between manifolds endowed with special structures*, 2010.

[9] Rodica Crisitina Voicu, *Conformal submersions of locally hyper-Kähler manifolds*, 2010.

2. ÎNDEPLINIREA CRITERIILOR DE PERFORMANȚĂ

Conform Anexei IIb din actul adițional nr. 1/2010 la contractul de finanțare nr. 525/08.01.2009, în anul 2010 trebuiau publicate două articole în reviste cotate ISI. Având în vedere că în această etapă:

- 3 articole au fost deja publicate în reviste cotate ISI [1,2,3]
- 2 articole au fost acceptate spre publicare în reviste cotate ISI [4,5]
- 1 articol a fost acceptat spre publicare în volumul unei conferințe indexate ISI Proceedings [7]
- 3 lucrări au fost trimise spre publicare [7,8,9]

criteriile de performanță așteptate au fost îndeplinite.

În perioada de raportare, deși am fost nevoiți să renunțăm la bugetul de mobilități, am acordat totuși o atenție deosebită participărilor la conferințe internaționale, acestea fiind esențiale pentru diseminarea rezultatelor și, mai ales la tineri, pentru acumularea de experiență și asimilarea unor rezultate și tehnici noi. Astfel:

- Prof. dr. Liviu Ornea a participat la conferințele:
 - *The 5th Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference*, Graduate School of Mathematics, Nagoya University (*invited speaker, Transformation groups of locally conformal Kaehler manifolds*)-fără finanțare din grant;
 - *A Geometry Workshop in Bucharest in honour of Vasile Brînzanescu (On the Occasion of his 65th Anniversary)* (*invited speaker, Locally conformally Kähler geometry: recent results*)-fără finanțare din grant;
- Conf. dr. Gabriel Eduard Vîlcu va participa în luna decembrie la:
 - *Conference in Geometry and Global Analysis (Celebrating P. Gilkey's 65th birthday)*, Santiago de Compostela (cu lucrarea *Slant immersions of quaternionic space forms*);
- Drd. Rodica Cristina Voicu a participat la conferința:
 - *Differential Geometry and its Applications*, Brno (cu lucrarea *Submersions and curvature properties on remarkable manifolds*).

3. DETALIEREA REZULTATELOR OBȚINUTE

În lucrarea [1] s-a introdus conceptul de CR-subvarietate în context paracuaternionic, precum și noțiunea de CR-submersie paracuaternionică (în sensul lui Kobayashi). S-a arătat ca pentru orice CR-subvarietate paracuaternionică într-o varietate paracuaternionică Kähler, distribuția total reală \mathcal{D}^\perp este integrabilă, iar distribuția cuaternionică \mathcal{D} este minimală. În plus, dacă subvarietatea este total geodezică, atunci ea este riglată total real. De asemenea s-a demonstrat că clasa de coomologie de Rham canonică este netrivială dacă \mathcal{D} este integrabilă și \mathcal{D}^\perp este minimală. Au fost obținute proprietăți de curbură ale CR-submersiilor paracuaternionice și s-au construit exemple netriviale. Un alt rezultat obținut în [1] este următorul:

Teorema 1. Fie N o CR-subvarietate paracuaternionică mixt foliată a unei varietăți paracuaternionice Kähler (M, σ, g) și fie (M', σ', g') o varietate aproape paracuaternionică hermitiană. Dacă $\pi : N \rightarrow M'$ este o CR-submersie paracuaternionică, atunci N este local un produs semi-Riemannian dintre o subvarietate paracuaternionică și o subvarietate total reală a lui M . În particular, dacă N este completă și simplu conexă, atunci ea este un produs semi-Riemannian global.

În lucrarea [2] au fost investigate simetriile de ordin superior corespunzătoare tensorilor Killing, punctându-se relația dintre tensorii Killing-Yano de pe spațiile mixt 3-Sasaki și supersimetriile nestandard.

În lucrarea [3] s-a remarcat că orice QR-hipersuprafața a unei varietăți cuaternionice Kähler posedă o 3-structură aproape de contact canonică. Acest lucru permite definirea conceptului de QR 3-submersie (în sensul lui B. Watson). Sunt studiate aceste submersii, determinându-se structura geometrică indusă pe baza submersiei. Un alt rezultat obținut în [3] este următorul:

Teorema 2. Fie M o QR-hipersuprafața total geodezică a unei varietăți cuaternionice Kähler $(\bar{M}, \bar{\sigma}, \bar{g})$ și fie (M', σ', g') o varietate aproape cuaternionică hermitiană. Dacă $\pi : M \rightarrow M'$ este o QR 3-submersie astfel încât câmpurile vectoriale de structură ξ_1, ξ_2 and ξ_3 sunt paralele în M , atunci M' este local hiper-Kähler.

S-a demonstrat de asemenea că nu există submersii cuaternionice între varietăți cuaternionice Kähler care nu sunt local hiper-Kähler.

Chestiunea tratată în lucrarea [5] se încadrează în domeniul geometriei riemanniene și conforme. E vorba despre relația dintre câmpuri vectoriale conforme (al căror flux e format din transformări conforme) și câmpuri Killing (al căror flux e format din izometrii).

Un punct se numește *esențial* pentru un câmp conform ξ dacă, în jurul aceluși punct, metrica dată nu poate fi transformată conform în așa fel încât ξ să devină Killing față de noua metrică. Se știe că orice câmp conform se anulează în orice punct esențial al său (punctele acestea sunt deci staționare pentru flux). Rezultatul principal al acestei note arată că punctele esențiale sunt puține:

Teorema 3. Punctele esențiale ale unui câmp conform pe o varietate riemanniană de dimensiune cel puțin 2 se află printre zerourile izolate ale câmpului.

În dimensiune 2, rezultatul e echivalent cu faptul că zerourile funcțiilor olomorfe neconstante sunt izolate, enunțul nostru putând fi văzut ca o extensie a acestuia.

Rezultatul este important în sine, dar am prezentat și o aplicație interesantă, la nivelul subvarietăților - problemă de la care am plecat, de fapt, în studiul nostru. Anume, se știe încă din 1958 (S. Kobayashi, Nagoya Math. J.) că zerourile unui câmp Killing formează subvarietăți total geodezice. Era natural să se presupună că zerourile câmpurilor conforme vor genera subvarietăți total ombilicale - corepondentul celor total geodezice în context conform. Într-adevăr, rezultatul a fost demonstrat în 1974 (D.E. Blair, același jurnal), dar cu presupunerea, extrem de restrictivă, că varietatea e compactă. Cum rezultatul lui Kobayashi e local, ipoteza lui Blair (cerută de metoda lui de demonstrație) era clar nenaturală. Folosind teorema noastră, rezultatul lui Blair decurge imediat, fără ipoteza de compacitate.

În lucrarea [6] s-a studiat curbura Ricci a aplicațiilor orizontal conforme de la varietăți Kenmotsu 3-dimensionale și s-a obținut o caracterizare a stabilității aplicațiilor armonice de la domenii compacte ale unor astfel de varietăți. Astfel, s-a demonstrat:

Teorema 4. Fie M^3 o varietate Kenmotsu 3-dimensională, (N^2, h, J) o varietate Kähler 2-dimensională și $D \subset M^3$ un domeniu compact. Dacă $\psi : (M^3, g) \rightarrow (N^2, h, J)$ este un morfism armonic submersiv astfel încât dilatarea λ satisface inegalitatea $\lambda^2 K^N + \Delta \ln \lambda \leq 1$, atunci ψ

este o aplicație armonică stabilă pe D .

În [7] sunt studiate varietățile introduse în 2005 de Oeljeklaus și Toma (Annales de l'Inst. Fourier, 2005); acestea sunt un exemplu important de varietăți compacte care, din rațiuni topologice, nu admit metrici Kähler. Construcția lor e ingenioasă și combină în mod neașteptat geometria diferențială cu teoria numerelor. În speță, o asemenea varietate e asociată unui corp de numere (extindere a lui \mathbb{Q}). Pentru anumite extinderi, care au numărul minim de scufundări complexe, varietatea rezultată e local conform Kähler (LCK). Mai mult, în dimensiune complexă minimă, anume 2, construcția conduce la suprafețe Inoue, exemple binecunoscute de varietăți LCK care nu admit metrici Vaisman (cu forma Lee paralelă). În articolul [7], rezultatul principal demonstrat este:

Teorema 5. Varietățile Oeljeklaus-Toma local conform Kähler nu admit subvarietăți complexe.

Este un rezultat nebanal, deoarece nu se cunosc multe exemple de varietăți complexe compacte care să nu aibă deloc subvarietăți. Și e important că tocmai geometria LCK furnizează astfel de exemple.

De asemenea, o consecință aproape directă a teoremei este următorul:

Corolar 1. Varietățile Oeljeklaus-Toma local conform Kähler nu admit funcții meromorfe neconstante.

Rezultatele demonstrate ridică o serie de întrebări despre varietățile Oeljeklaus-Toma care nu sunt Kähler și pot constitui punctul de plecare pentru alte investigații.

În lucrarea [8] au fost studiate submersiile semi-Riemann între varietăți înzestrate cu 3-structuri mixte metrice. S-a demonstrat în particular următorul rezultat:

Teorema 6. Fie $\pi : M \rightarrow N$ o 3-submersie mixtă. Atunci:

- (i) Distribuțiile orizontală și verticală induse de π sunt invariante prin φ_α , $\alpha \in \{1, 2, 3\}$.
- (ii) Fibrele submersiei sunt varietăți aproape para-hiperhermitiene.
- (iii) Dacă M este o varietate mixt 3-cosimplectică, atunci spațiul bază N este de asemenea o varietate mixt 3-cosimplectică. În plus, fibrele sunt subvarietăți para-hiper-Kähler total geodezice.

(iv) Dacă M este o varietate mixt 3-Sasaki, atunci π este o aplicație de acoperire semi-Riemann.

S-a demonstrat de asemenea că orice aplicație olomorfă între două varietăți mixt 3-cosimplete este armonică.

În lucrarea [9] au fost studiate submersiile Riemann de la varietăți înzestrate cu structuri local conform hiper-Kähler, determinându-se structura geometrică indusă pe baza submersiei și geometria fibrelor. Dintre rezultatele obținute amintim determinarea condițiilor necesare și suficiente pentru ca aceste submersii să fie aplicații armonice.

Teorema 7. Fie $\pi : (M, g, J_1, J_2, J_3) \rightarrow (M', g', J'_1, J'_2, J'_3)$ o submersie local conform hiper-Kähler τ -conforma. Atunci π este aplicație armonică dacă și numai dacă gradientul funcției τ este vertical. Mai mult, dacă π este aplicație armonică atunci π este un morfism armonic orizontal omotetic.

Director de proiect,

Data: 18.11.2010

prof. dr. Liviu Ornea