21.11.2011

TEMA 2

PENTRU CURSUL DE ALGEBRĂ, SERIA 10

Rezolvă problemele următoare, apoi încearcă să le redactezi cât mai explicit. În acordarea punctajului, vor conta atât corectitudinea rezolvării, cât şi calitatea redactării. Include ***obligatoriu*** *în tema predată şi ciornele pe care încerci să faci rezolvarea.*
Pentru a înțelege problemele, citeşte cu atenție notițele de la curs, dar şi alte materiale indicate.
Aceasta este o temă ***individuală****: copierea soluțiilor de la alți colegi poate fi penalizată.*

Termen limită de predare: luni, 12.12.2011, ora 9:00.

1. a) Dă un exemplu de **R** – spațiu vectorial de dimensiune 1, apoi un exemplu de **R** – spațiu vectorial de dimensiune doi. Justifică exemplele date.

b) Dă un exemplu de **R** – spațiu vectorial de dimensiune infinită. Justifică exemplul dat.

2. a) *Rezolvă problema!* Fie V= $\{(a,b,c)|a+2b+3c=0\}\subset \mathbf{R}^3$. Demonstrează că V este un subspațiu vectorial în **R** – spațiul vectorial $\mathbf{R}^3$. Determină o bază a acestui spațiu.

b) Propune şi rezolvă o problemă de acelaşi fel.

3. a) Fie V mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2 cu elemente numere reale, pentru care suma elementelor de pe prima linie este egală cu 0. Arată că (V, +) este un **R** – spațiu vectorial şi că următoarele matrice formează o bază în V: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Scrie coordonatele vectorului $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ în această bază.

b) Propune şi rezolvă un exercițiu de acelaşi tip cu cel de la a).

4. a) Fie W spațiul vectorial al polinoamelor în variabila X, cu coeficienți reali, de grad ≤ 2. Considerăm aplicația *f:* W → W, care duce un polinom P în polinomul derivat P'. Demonstrează că *f* este endomorfism de spații vectoriale. Calculează Ker(*f*) şi Im(*f*).

b) Scrie mai întâi matricea lui *f* în baza $B_1=\{1, X, X^2\}$, apoi scrie matricea lui *f* în baza $B_2=\{X+2, X-1, X^2+X\}$.

c) Verifică rezultatul obținut, folosind matricea de trecere între cele două baze.

5. Fie (V,+) **R** – spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad ≤ 2 (operațiile fiind cele uzuale).

a) Arată că F = { $(X-1)(X-2)$; $(X-1)(X-3)$; $(X-2)(X-3)$} este o bază în V.
b) Folosind baza de mai sus şi proprietăţile spaţiilor vectoriale, demonstrează *formula de descompunere în fracţii simple*: Dacă *P(X)* este un polinom de grad ≤ 2 cu coeficienţi reali, există numerele *a, b, c* $\in$ **R**, unic determinate, astfel ca

$$\frac{P(X)}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$$

c) Scrie cum se descompune în fracţii simple o fracţie raţională cu numitorul

$$(X-1)(X^2+2X+5).$$

Explică apoi (folosind teoria spaţiilor vectoriale) *de ce* o astfel de descompunere există şi este unică.