CERCETARE GENERALĂ ASUPRA SUPRAFEŢELOR CURBE

KARL FRIEDRICH GAUSS

I.

Cercetările în care se studiază direcţiile a diferite drepte din spaţiu ating, de cele mai multe ori, un foarte înalt grad de simplitate şi claritate dacă se recurge la folosirea unei suprafeţe sferice descrise cu o rază egală cu 1 în jurul unui centru arbitrar şi ale cărei puncte sînt ţinute săreprezinte direcţiile dreptelor paralele cu razele care au capetele în aceste puncte. Şi cum poziţia tuturor punctelor din spaţiu se determină prin trei coordonate care reprezintă distanţele la trei plane fixe, perpendiculare între ele, trebuie să considerăm, mai întîi de toate, direcţiile axelor perpendiculare pe aceste plane. Astfel, vom nota (1), (2), (3) punctele de pe suprafaţa sferică ce reprezintă aceste direcţii: e clar că distanţa dintre aceste puncte, două cîte două, va fi un sfert de cerc. Vom presupune, de altfel, că direcţiile despre care e vorba sînt cele care se referă la coordonatele pozitive.

II.

Nu e de prisos să reamintim aici unele propoziţii care se folosesc frecvent în chestiuni de acest tip.

1. Unghiul a două drepte care se taie are drept măsură arcul cuprins între punctele corespunzătoare direcţiilor lor pe suprafaţa sferică.

2. Orientarea unui plan dat din spaţiu se poate reprezenta printr-un cerc mare al suprafeţei sferice, situat într-un plan paralel cu cel dat.

3. Unghiul a două plane este echivalent cu unghiul sferic determinat de cercurile mari care reprezintă planele şi are, în consecinţă, măsura arcului cuprins între polii acestor cercuri mari. De aici urmează că înclinarea unei drepte pe un plan este măsurată de arcul de cerc mare dus perpendicular, din punctul corespunzător direcţiei dreptei, pe cercul mare care reprezintă orientarea planului.

4. Fie x, y, z, x', y', z' coordonatele a două puncte, r distanţa dintre ele şi L punctul care, pe suprafaţa sferică, reprezintă direcţia dreptei duse din primul punct spre cel de al doilea. VSe va avea:

$$x' = x + r\cos(1)L,$$
$$y' = y + r\cos(2)L,$$
$$z' = z + r\cos(3)L.$$

5. Rezultă de aici imediat că, în general:

$$\cos^2(1)L + \cos^2(2)L + \cos^2(3)L = 1,$$

şi, de asemenea, considerînd un alt punct oarecare L' pe suprafaţa sferică,

$$\cos(1)L \cdot cos(1)L' + \cos(2)L \cdot \cos(2)L' + \cos(3)L \cdot \cos(3)L' = \cos LL'.$$

6. **Teoremă** *Fie L, L', L'', L''' patru puncte pe suprafaţa sferică şi A unghiul pe care arcele de cerc mare LL', $L''L'''$ îl formează în punctul lor de intersecţie. Are loc:*

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cos A.$$

Demonstraţie. Să numim tot A şi punctul de intersecţie însuşi şi să punem

$$AL = t, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t''';$$

Vom avea

$$\begin{aligned}
\cos LL' &= \cos t \cdot \cos t'' + \sin t \cdot \sin t'' \cdot \cos A, \\
\cos L'L''' &= \cos t' \cdot \cos t''' + \sin t' \cdot \sin t''' \cdot \cos A, \\
\cos LL''' &= \cos t \cdot \cos t''' + \sin t \cdot \sin t''' \cdot \cos A, \\
\cos L'L'' &= \cos t' \cdot \cos t'' + \sin t' \cdot \sin t'' \cdot \cos A;
\end{aligned}$$

şi, în consecinţă

$$\begin{aligned}
&\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' \\
&\quad = \cos A(\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t'' \\
&\quad - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''') \\
&\quad = \cos A(\cos t \sin t' - \sin t \cos t')(\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''') \\
&\quad = \cos A \sin(t' - tt) \sin(t''' - t'') \\
&\quad = \cos A \sin LL' \sin L''L'''.
\end{aligned}$$

În afară de asta, cum pentru fiecare cerc mare există două ramuri care pleacă din punctul A, aceste două ramuri formează în acest punct două unghiuri a căror sumă este 180°; dar analiza noastră arată că trebuie să considerăm ramurile care corespund sensului direcţiilor LL' şi $L''L'''$ şi, cum cele două cercuri mari se taie în două puncte, se vede uşor că nu contează pe care dintre aceste puncte îl alegem. De asemenea, în locul unghiului A, putem folosi arcul cuprins între polii cercurilor mari din care fac parte arcele LL', LL''. dar e clar că aceşti poli trebuie să aibă, respectiv, aceeaşi situaţie relativ la arcele lor; altfel spus, în timp ce ne deplasăm de la L către L' sau de la L'' către L''', fiecare dintre cei doi poli trebuie să fie de aceeaşi parte, fie la dreapta, fie la stînga. 7. Fie L, L', L'' trei puncte pe suprafaţa sferică şi să punem, pentru a scurta,

$$\begin{aligned}
&\cos(1)L = x, \quad \cos(2)L = y, \quad \cos(3)L = z, \\
&\cos(1)L' = x', \quad \cos(2)L' = y', \quad \cos(3)L' = z', \\
&\cos(1)L'' = x'', \quad \cos(2)L'' = y'', \quad \cos(3)L'' = z'';
\end{aligned}$$

să punem, de asemenea

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta.$$

Să notăm cu λ unul dintre polii cercului mare din care face parte arcul LL', cel care se găseşte, faţă de acest arc, la fel ca punctul (1) faţă de arcul (2)(3). Vom avea atunci, conform teoremei precedente,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda \cdot \sin(2)(3) \cdot \sin LL',$$

sau, deoarece (2)(3)=90°,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda \cdot \sin LL'$$

şi la fel

$$zx' - z'x = \cos(2)\lambda \cdot \sin LL',$$
$$xy' - x'y = \cos(3)\lambda \cdot \sin LL'.$$

Înmulţind aceste ecuaţii cu x'', respectiv y'', z'' şi adunînd, obţinem (folosind a doua dintre teoremele amintite la nr. 5),

$$\Delta = \cos \lambda L'' \cdot \sin LL'.$$

Aici trebuie distinse trei cazuri. *Primul*, cînd L'' se află pe cercul mare din care face parte LL'; avem $\lambda L'' = 90°$ şi, ca urmare, $\Delta = 0$. Dacă L'' se află în afara acestui cerc mare, *al doilea* caz va fi cel în care L'' este de aceeaşi parte cu λ, iar *al treilea* cel în care L'' este de partea opusă: în aceste două cazuri, punctele L, L', L'' vor forma un triunghi sferic. Aşezarea lor va fi analoagă celei a punctelor (1), (2), (3) în cazul al doilea, inversă în cazul al treilea. Numind simplu L, L', L'' unghiurile acestui triunghi, p perpendiculara dusă pe suprafaţa sferică din punctul L'' pe latura LL', vom avea

$$\sin p = \sin L \cdot \sin LL'' = \sin L' \cdot \sin L'L'' \text{ şi } \lambda L'' = 90° \mp p,$$

semnul superior referindu-se la cel de-al doilea caz, semnul superior, la cel de-al treilea. De aici conchidem

$$\pm\Delta = \sin L \cdot \sin LL' \cdot \sin LL'' = \sin L' \cdot \sin LL'' \cdot \sin L'L'' = \sin L'' \cdot \sin LL'' \cdot \sin L'L'.$$

În plus, e clar că primul caz poate fi privit ca fiind cuprins în al doilea sau în al treilea şi se poate vedea fără dificultate că expresia $\pm\Delta$ reprezintă sextuplul volumului piramidei formate de punctele L, L', L'' şi centrul sferei şi, asemănător, $\frac{1}{6}\Delta$ reprezintă, în general, volumul unei piramide oarecare cuprinse între originea coordonatelor şi punctele ale căror coordonate sînt x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''.

III.

Se spune că o suprafaţă curbă are curbură continuă în jurul unui punct al său A, dacă direcţiile tuturor dreptelor care se pot duce din acel punct la toate punctele infinit apropiate de el se depărtează infinit de puţin de un acelaşi şi unic plan care trece prin punctul A. În acest caz, acesta este planul care se numeşte *planul tangent* la suprafaţă în punctul A. Dacă această condiţie nu este satisfăcută într-un punct dat A, continuitatea curburii suprafeţei se zice întreruptă în acel punct, aşa cum se întîmplă, de exemplu, în vîrful unui con. Cercetările de faţă se vor limita numai la suprafeţe sau la porţiuni de suprafeţe pentru care continuitatea curburii nu este întreruptă în nici un punct. Vom face, aici, doar observaţia că metodele care servesc la determinarea poziţiei planului tangent nu se aplică punctelor singulare în care continuitatea curburii este întreruptă, şi trebuie să conducă la soluţii nedeterminate.

IV.

Poziţia planului tangent se poate reprezenta foarte comod cu ajutorul poziţiei dreptei care îi este normală în punctul A, dreaptă despre care se mai spune că este normală la suprafaţa însăşi. Vom reprezenta direcţia acestei normale printr-un punct L al suprafeţei sferice auxiliare şi vom pune

$$\cos(1)L = X, \quad \cos(2)L = Y, \quad \cos(3)L = Z.$$

Vom desemna coordonatele punctului A prin x, y, z. Fie, de asemenea, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ coordonatele unui alt punct A' de pe suprafaţa curbă, ds distanţa infinit de mică AA'. În fine, fie λ punctul care, pe suprafaţa sferică, reprezintă direcţia elementului AA'. Vom avea:

$$dx = ds \cdot \cos(1)\lambda, \quad dy = ds \cdot \cos(2)\lambda, \quad dz = ds \cdot \cos(3)\lambda,$$

şi de asemenea, deoarece trebuie să avem $\lambda L = 90°$,

$$X \cos(1)\lambda + Y \cos(2)\lambda + Z \cos(3)\lambda = 0.$$

Combinînd aceste ecuaţii obţinem

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Există două metode generale pentru studierea proprietăţilor unei suprafeţe curbe. În *prima*, se foloseşte ecuaţia care leagă coordonatele x, y, z, pe care o vom presupune adusă la forma $W = 0$, unde W va fi funcţie de nedeterminatele x, y, z. Fie diferenţiala completă afuncţiei W,

$$dW = P dx + Q dy + R dz.$$

Vom avea, pe suprafaţa curbă

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

şi, în consecinţă,

$$P \cdot \cos(1)\lambda + Q \cdot \cos(2)\lambda + R \cdot \cos(3)\lambda = 0.$$

Cum această ecuaţie, aşa cum am convenit mai sus, trebuie să aibă loc pentru direcţiile tuturor elementelor ds de pe suprafaţa curbă, se vede uşor că X, Y, Z trebuie să fie, respectiv, proporţionale cu P, Q, R şi că, drept urmare, datorită condiţiei $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, vom avea fie

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Z = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$

fie

$$X = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Z = \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

În *a doua metodă*, se exprimă coordonatele ca funcţii de două variabile p, q. Să presupunem că prin diferenţierea acestor funcţii se găseşte

$$dx = a dp + a' dq, \quad dy = b dp + b' dq, \quad dz = c dp + c' dq;$$

Înlocuind aceste valori într-o formulă pe care am dat-o mai sus, obţinem

$$(aX + bY + cZ) dp + (a'X + b'Y + c'Z) dq = 0.$$

Cum această ecuaţie trebuie să aibă loc independent de valorile diferenţialelor dp, dq, vom avea în mod evident

$$aX + bY + cZ = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0,$$

de unde conchidem că X, Y, Z trebuie să fie, respectiv, proporţionale cu cantităţile

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'.$$

Punînd deci, pentru a scurta,

$$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \Delta,$$

vom avea, fie

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta},$$

fie

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}.$$

Acestor două metode generale li se adaugă o *a treia* metodă, în care una dintre coordonate, de exemplu z, este exprimată în funcţie de celelalte două, x, y. Evident, această metodă nu e altceva decît un caz particular, fie al primei metode, fie al celei de-a doua. Pentru că dacă se pune

$$dz = tdx + udy,$$

se va avea, fie

$$X = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}},$$

fie

$$X = \frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}.$$

V.

Cele două soluţii pe care le-am întîlnit în paragraful precedent se referă, evident, la puncte opuse ale suprafeţei sferice, sau la direcţii opuse, ceea ce se potriveşte cu natura lucrurilor, avînd în vedere faptul că normala la o suprafaţă curbă poate fi dusă într-un sens sau în celălalt, în funcţie de faţa care se consideră. Dacă vrem să distingem între ele cele două feţe contigui ale unei suprafeţe, numind-o pe una exterioară şi pe cealaltă interioară, vom putea atunci atribui şi fiecărei normale soluţia convenabilă, cu ajutorul teoremei dezvoltate în §II (7), unde s-a stabilit, de asemenea, un *criteriu* sau mijloc de a distinge o faţă de alta.

Cu prima metodă, acest criteriu derivă din semnul valorii cantităţii W. Într-adevăr, în general suprafaţa $W = 0$ va separa regiunile spaţiului pentru care W ia o valoare pozitivă de cele pentru care W devine negativă. Din teorema pe care tocmai am amintit-o rezultă acum uşor că, dacă W are o valoare pozitivă de partea feţei exterioare şi înţelegem normala ca dusă către exterior, va trebui să adoptăm prima soluţie. De altfel, va fi uşor, în fiecare caz, să decidem dacă aceeaşi regulă se aplică pe întreaga suprafaţă relativ la semnul lui W, sau dacă regula de urmat trebuie să se schimbe de la o regiune a suprafeţei la o alta. Legea de continuitate nu va permite, de altfel, nici o schimbare atîta vreme cît coeficienţii P, Q, R au valori finite sau nu se anulează toţi laolaltă.

Dacă urmăm a doua metodă, putem imagina pe suprafaţa curbă două sisteme de linii curbe: unul pentru care p este variabil, q constant; altul pentru care q e variabil, p constant. Respectiva poziţie a acestor două linii relativ la faţa exterioară trebuie să decidă care dintre cele două soluţii trebuie adoptată. Altfel spus, de fiecare dată cind următoarele trei linii: ramura liniei din primul sistem care, plecînd din A, corespunde unei creşteri a lui p, ramura liniei din al doilea sistem care, plecînd din acelaşi punct A, corespunde unei creşteri a lui q şi normala dusă de partea feţei exterioare, de fiecare dată, să spunem, cind aceste trei linii sînt plasate în acelaşi fel în care sînt poziţionate axele x, y, z plecînd din originea coordonatelor (de exemplu, dacă pentru unul sau altul dintre aceste grupuri de linii, putem imagina prima linie la stînga, a doua la dreapta, a treia în sus), atunci trebuie adoptată prima soluţie. De fiecare dată, însă, cînd poziţia relativă a celor trei linii va fi inversă faţă de poziţia relativă axelor x, y, z, se va aplica a doua soluţie.

Cu a treia metodă, va trebui examinat dacă, în timp ce z primeşte o creştere pozitivă, x şi y rămînînd invariante, se avansează de partea feţei exterioare ori de a celei interioare. În primul caz, pentru o normală îndreptată către exterior, trebuie adoptată prima soluţie; în celălalt caz, a doua.

VI.

La fel cum, imaginînd prin centrul sferei noastre auxiliare drepte respectiv paralele cu fiecare dintre normalele unei suprafeţe curbe, fiecarui punct determinat de pe a doua suprafaţă îi corespunde un punct determinat al primeia; în acelaşi fel, fiecare linie sau fiecare figură trasată pe suprafaţa curbă va fi reprezentată de o linie sau figură trasată pe suprafaţa sferică. În compararea celor două figuri care se corespund în felul acesta, şi dintre care una va fi ca şi imaginea celeilalte, putem adopta două puncte de vedere: ne pot interesa doar cantităţile; sau ne putem ocupa doar de relaţiile de poziţie, făcînd abstracţie de relaţiile de cantitate.

Pentru studiul relaţiilor de cantitate, ni se pare util să introducem, în teoria suprafeţelor curbe, cîteva noţiuni noi. Dată o porţiune de suprafaţă curbă, cuprinsă într-un perimetru determinat, vom spune că are drept *curbură totală* sau *integrală* aria figurii care îi corespunde pe suprafaţa sferică auxiliară. E bine să facem distincţie între această curbură integrală şi curbura, oarecum specifică, pe care o vom numi *măsură a curburii* şi care înseamnă cîtul obţinut prin împărţirea curburii integrale a elementului de suprafaţă adiacent acelui punct la aria respectivului element şi care, deci, indicăraportul ariilor infinit de mici care se corespund pe suprafaţa curbă şi pe suprafaţa sferică. Utilitatea acestor inovaţii va reieşi suficient, sperăm, din consideraţiile pe care le vom expune. În ceea ce priveşte terminologia, ne-am gîndit că trebuie în primul rînd să ne străduim să evităm orice obscuritate; de aceea, nu am crezut că trebuie să adoptăm o terminologie asemănătoare celei general admise (chiar dacă e criticată de diverşi geometri) în teoria curbelor plane, potrivit căreia măsura curburii ar fi trebuit numită simplu curbură, şi curbura totală, amplitudine. Dar de ce nu am avea posibilitatea unei anume flexibilităţi la nivelul cuvintelor, atîta vreme cît lucrurile în sine nu sînt vide, iar discursul este la adăpost de orice interpretare eronată?

Poziţia figurii trasate pe suprafaţa sferică poate fi asemenea sau opusă (inversă) celei a figurii care îi corespunde pe suprafaţa curbă. Primul caz are loc atunci cînd două linii de pe suprafaţa curbă care pleacă din acelaşi punct în două direcţii diferite, dar nu opuse, sînt reprezentate pe suprafaţa sferică de două linii plasate la fel, adică atunci cînd imaginii liniei din dreapta este, de asemenea, la dreapta. Al doilea caz, atunci cînd are loc contrariul. Vom distinge aceste două cazuri prin *semnul* pozitiv sau negativ al măsurii curburii. Dar este evident că această distincţie nu poate avea loc decît alegînd pe fiecare dintre suprafeţe o faţă determinată pe care trebuie să ne imaginăm că este trasată figura. Pe suprafaţa sferică auxiliară, vom folosi întotdeauna, drept faţă exterioară, cea care este opusă centrului. Pe suprafaţa curbă, se poate lua drept faţă exterioară, fie cea care este privită de obicei ca fiint într-adevăr faţa exterioară, fie, mai curînd, chiar faţa pe care se ridică normala. E, în fond, evident că nu se schimbă nimic în ce priveşte asemănarea figurilor dacă se transportă de pe o faţă pe alta şi figura trasată şi normala, avînd numai grijă ca imaginea acestei figuri să fie mereu trasată pe aceeaşi faţă a suprafeţei sferice.

Vom extind e semnul pozitiv sau negativ cu care afectăm *măsura* curburii unei figuri infinit de mici conform poziţiei acesteia, la curbura integrală a unei figuri finite pe o suprafaţă curbă. Totuşi, dacă am vrea să cuprindem acest subiect în toată generalitatea, cîteva lămuriri ar fi necesare: ne vom mulţumi aici cu cîteva explicaţii scurte. Dacă o figură trasată pe o suprafaţă curbă este astfel încît tuturor punctelor ei îi corespund, pe suprafaţa sferică auxiliară, puncte *diferite*, atunci nu e nici o ambiguitate. Dar dacă această condiţie nu e satisfăcută, va trebui să ţinem seama de două sau mai multe ori de unele porţiuni ale suprafeţei sferice şi de aici, după cum asemănarea va fi directă sau inversă, vor apărea termeni care se vor adăuga laolaltă sau se vor anihila partial. Ceea ce va fi cel mai simplu, într-un asemenea caz, va fi să ne închipuim că am împărţit figura trasată pe suprafaţa curbă în porţiuni care, fiecare, considerată izolat, satisface condiţia enunţată mai devreme; să-i atribuim fiecărei porţiuni curbura convenabilă, a cărei mărime va fi dată de aria figurii care îi corespunde pe suprafaţa sferică şi al cărei semn depinde de chiar poziţia figurii; în fine, să luăm drept curbură totală a figurii întregi cantitatea care se obţine adunînd laolaltă curburile integrale tuturor părţilor figurii. În felul acesta, curbura integrală a unei figuri va fi, în general, egală cu $\int K d\sigma$, $d\sigma$ reprezemntînd elementul de suprafaţă al figurii, K măsura curburii în fiecare punct. Iar în ceea ce priveşte reprezentarea geometrică a acestei integrale, principalele consideraţii care ar trebui prezentate revin la ceea ce urmează. Parametrul figurii trasate pe o suprafaţă curbă (sub restricţiile indicate la §III) va corespunde întotdeauna, pe suprafaţa sferică ajutătoare, unei linii închise. Dacă această linie nu se taie ea însăşi în nici un punct, atunci va împărţi suprafaţa în două părţi, dintre care una corespunde figurii trasate pe suprafaţa curbă. Curbura integrală a figurii va fi dată de aria acestei părţi, această arie fiind pozitivă sau negativă după cum, relativ la perimetrul său, ea va avea o poziţie asemenea sau inversă celei pe acre o are figura însăşi relativ la perimetrul ei. Dar atunci cînd această linie se va tăia pe sine o dată sau de mai multe ori, ea va produce o figură complicată căreia, totuşi, i se poate atribui în mod legitim o arie determinată, ca şi cum ar fi vorba de o figură fără noduri. Şi această arie, înţeleasă convenabil, va fi întotdeauna valoarea exactă a curburii integrale. Mai mult, credem că trebuie să lăsăm pentru altă dată explicaţii dezvoltate mai pe larg despre figurile la care ne putem referi din punctul de vedere cel mai general.

VII.

Să căutăm acum o formulă cu care să exprimăm măsura curburii în fiecare punct al unei suprafeţe curbe. Numind $d\sigma$ aria unui element de suprafaţă, $Zd\sigma$ va fi aria proiecţiei acelui element pe planul de coordonate x, y. La fel, dacă $d\Sigma$ este aria elementului corespunzător pe suprafaţa sferică auxiliară, $Zd\Sigma$ va fi aria proiecţiei acestui element sferic pe acelaşi plan. E clar că aceste proiecţii vor fi în aceleaşi relaţii de mărime şi de poziţie ca şi elementele însele. Să considerăm acum un element triunghiular pe suprafaţa curbă şi să presupunem coordonatele celor trei puncte care formează proiecţia acestui element sînt

$$\begin{array}{ll} x, & y, \\ x + dx, & y + dy, \\ x + \delta x, & y + \delta y \end{array}$$

Dublul ariei acestui triunghi se va exprima prin formula

$$dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x,$$

expresie pozitivă sau negativă după cum poziţia laturii îndreptată dinspre primul punct către al treilea, comparată cu a celei orientate dinspre primul punct către al doilea este la fel sau opusă poziţiei axei coordonatelor y faţă de axa coordonatelor x.

La fel, dacă coordonatele a trei puncte care formează proiecţia elementului corespunzător de pe suprafaţa sferică, numărate pornind din centru, sînt

$$\begin{array}{ll} X, & Y, \\ X + dX, & Y + dY, \\ X + \delta X, & Y + \delta Y, \end{array}$$

dublul ariei acestei proiecţii se exprimă prin

$$dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X,$$

formulă al cărei semn se stabileşte conform celor spuse mai devreme. Măsura curburii va fi, deci, în acest punct al suprafeţei curbe,

$$k = \frac{dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X}{dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x}.$$

Dacă presupunem acum că natura suprafeţei este definită conform celei de a treia metode considerate în §IV, atunci X şi Y se exprimă în funcţie de cantităţile x şi y şi vom avea:

$$\begin{aligned} dX &= \frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}dy, \\ \delta X &= \frac{dX}{dx}\delta x + \frac{dX}{dy}\delta y, \\ dY &= \frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy, \\ \delta Y &= \frac{dY}{dx}\delta x + \frac{dY}{dy}\delta y. \end{aligned}$$

În urma înlocuirii acestor valori, expresia precedentă devine:

$$k = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy} \cdot \frac{dY}{dx}.$$

Punînd, ca mai sus

$$\frac{dz}{dx} = t, \quad \frac{dz}{dy} = u,$$

şi de asemenea

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = T, \quad \frac{d^2 z}{dxdy} = U, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = V,$$

ceea ce e echivalent cu

$$dt = T dx + U dy, \quad du = U dx + V dy,$$

vom avea, conform formulelor precedente,

$$X = -tZ, \quad Y = -uZ, \quad (1 + t^2 + u^2)Z^2 = 1.$$

În consecinţă:

$$\begin{aligned} dX &= -Zdt - tdZ,\\ dY &= -Zdu - udZ,\\ (1+t^2+u^2)dZ + Z(tdt+udu) &= 0, \end{aligned}$$

sau încă,

$$\begin{aligned} dZ &= -\ Z^3(tdt+udu),\\ dX &= -\ Z^3(1+u^2)dt + Z^3tudu,\\ dY &= Z^3tudt - Z^3(1+t^2)du, \end{aligned}$$

şi de aici obţinem:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= Z^3[-(1+u^2)T + tuU],\\ \frac{dX}{dy} &= Z^3[-(1+u^2)U + tuV],\\ \frac{dY}{dx} &= Z^3[tuT - (1+t^2)U],\\ \frac{dY}{dy} &= Z^3[tuU - (1+t^2)V]. \end{aligned}$$

Înlocuind aceste valori în expresia precedentă găsim

$$k = Z^6(TV-U^2)(1+t^2+u^2) = Z^4(TV-U^2) = \frac{TV-U^2}{(1+t^2+u^2)^2}.$$

VIII.

Alegînd convenabil originea axelor de coordonate, putem face, fără dificultate, să dispară, pentru un punct dat A, valorile cantităţilor t, u, U. Într-adevăr, primele două condiţii vor fi deja satisfăcute dacă adoptăm drept plan al coordonatelor x, y planul tangent în acest punct. Dacă, în plus, alegem originea coordonatelor chiar în punctul A, e clar că expresia coordonatelor z va căpăta forma următoare:

$$z = \frac{1}{2}T^0x^2 + U^0xy + \frac{1}{2}V^0y^2 + \Omega,$$

unde Ω va fi de un ordin superior lui 2. Schimbînd apoi orientarea axelor x, y cu un unghi M, în aşa fel ca să avem

$$\mathrm{tg}2M = \frac{2U^0}{T^0 - U^0},$$

va fi uşor de văzut că se obţine o ecuaţie de forma aceasta:

$$z = \frac{1}{2}Tx^2 + \frac{1}{2}Vy^2 + \Omega.$$

Rezultă de aici următoarele:

1. Dacă suprafaţa curbă este tăiată de un plan normal trecînd prin axa de coordonate x, secţiunea va fi o curbă plană a cărei rază de curbură în punctul A va fi $\frac{1}{T}$, semnul pozitiv sau negativ al acestei raze de curbură indicînd concavitatea sau convexitatea feţei de partea căreia coordonatele z sînt pozitive.

2. La fel, $\frac{1}{V}$ va reprezenta în, punctul A, raza de curbură a curbei plane care se obţine tăind suprafaţa curbă cu un plan care trece prin axele y, z.

3. Punînd $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, avem

$$z = \frac{1}{2}(T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi)r^2 + \Omega.$$

De aici rezultă că dacă se taie suprafaţa cu un plan normal în A care face cu axa x un unghi φ, se obţine o curbă plană a cărei rază de curbură în punctul A este

$$\frac{1}{T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi}.$$

4. Dacă $T = V$, razele de curbură ale tuturor secţiunilor normale sînt egale. Dacă, din contra, T şi V sînt diferite, e evident, deoarece $T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi$ va fi, pentru fiece valoare a unghiului φ, între T şi V, că razele de curbură ale secţiunilor principale considerate la 1. şi 2. se vor raporta la curburile extreme: adică una la curbura maximă, cealaltă la curbura minimă, dacă T şi V au acelaşi semn. Şi, dimpotrivă, una la convexitatea maximă, cealaltă la concavitatea maximă dacă T şi V au semne contrare. Aceste concluzii conţin aproape tot ceea ce ilustrul Euler ne-a învăţat, primul, despre curbura suprafeţelor.

5. Măsura curburii unei suprafeţe curbe într-un punct A ia forma foarte simplă $K = TV$, de unde teorema

Măsura curburii în fiecare punct al unei suprafeţe este egală cu o fracţie al cărei numărător este unitatea şi al cărei numitor este produsul celor două raze de curbură extreme în secţiunile prin plane normale.

În acelaşi timp, se vede că măsura curburii va fi pozitivă pentru suprafeţele concavo-concave sau convexo-convexe (distincţie care nu conţine nimic esenţial), negativă pentru suprafeţele concavo-convexe. Dacă suprafaţa se compune din două părţi aparţinînd acestor două genuri, măsura curburii se va anula în punctele unde se face tranziţia. Vom reveni imediat în detaliu asupra proprietăctilor acestor suprafeţe pentru care măsura curburii dispare pe alocuri.

IX.

Formula dată la sfîrşitul §VII pentru măsura curburii este cea mai simplă dintre toate formulele generale, ea neconţinînd decît cinci elemente. Vom ajunge la o formulă mai complicată, utilizînd nouă elemente, dacă vom vrea să utilizăm a doua dintre metodele despre care am spus că sînt potrivite pentru studiul caracteristicilor suprafeţelor. Reluînd notaţiile din $ IV vom pune, de asemenea,

$$\frac{d^2W}{dx^2} = P', \qquad \frac{d^2W}{dy^2} = Q', \qquad \frac{d^2W}{dz^2} = R',$$
$$\frac{d^2W}{dydz} = P'', \qquad \frac{d^2W}{dxdz} = Q'', \qquad \frac{d^2W}{dxdy} = R'',$$

astfel că vom avea

$$dP = P'dz + R''dy + Q''dz,$$
$$dQ = R''dx + Q'dy + P''dz,$$
$$dR = Q''dx + P''dy + R'dz.$$

Acum, deoarece avem $t = -\frac{P}{R'}$, obţinem, prin diferenţiere,

$$R^2dt = RdP + PdR = (PQ'' - RP)dx + (PP'' - RR'')dy + (PR' - RQ'')dz,$$

sau încă, eliminîndu-l pe dz cu ajutorul ecuaţiei $Pdx + Qdy + Rdz = 0$,

$$\begin{aligned} R^3 dt = (&-R^2P' + 2PRQ'' - P^2R')dx \\ &+ (-PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')dy. \end{aligned}$$

Avem, de asemenea

$$\begin{aligned} R^3 du = (&-PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')dx \\ &+ (-R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R')dy. \end{aligned}$$

Şi de aici conchidem

$$\begin{aligned} R^3T &= -R^2P' + 2PRQ'' - P^2R', \\ R^3U &= PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'', \\ R^3V &= -R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R'. \end{aligned}$$

Înlocuind aceste valori în formula din §VII, obţinem următoarea formulă simetrică pentru măsura curburii k:

$$\begin{aligned} (P^2 + Q^2 + R^2)^2 k = {} & P^2(Q'R' - P''^2) + Q^2(P'R' - Q''^2) \\ & + R^2(P'Q' - R''^2) + 2QR(Q''R'' - P'P'') \\ & + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R''). \end{aligned}$$

X.

Vom obţine o formulă încă mai complicată, conţinînd cincisprezece termeni, dacă vom urma a doua dintre metodele potrivite studiului suprafeţelor. Este, totuşi, foarte important să ajungem la această formulă. Pentru aceasta, reluăm notaţiile din §IV şi punem, de asemenea:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dp^2} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{dpdq} = \alpha', \qquad \frac{d^2x}{dq^2} = \alpha'', \\ &\frac{d^2y}{dp^2} = \beta, \qquad \frac{d^2y}{dpdq} = \beta', \qquad \frac{d^2y}{dq^2} = \beta'', \\ &\frac{d^2z}{dp^2} = \gamma, \qquad \frac{d^2z}{dpdq} = \gamma', \qquad \frac{d^2z}{dq^2} = \gamma''. \end{aligned}$$

Vom mai nota, pentru a prescurta:

$$\begin{aligned} bc' - cb' &= A, \\ ca' - ac' &= B, \\ ab' - ba' &= C. \end{aligned}$$

Cu aceste notaţii, observăm întîi că avem

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

sau, echivalent

$$dz = -\frac{A}{C}dx - \frac{B}{C}dy;$$

astfel că, privind z ca funcţie de x şi y, trebuie să avem:

$$\frac{dz}{dx} = t = -\frac{A}{C}$$
$$\frac{dz}{dy} = u = -\frac{B}{C}$$

Dar, din ecuaţiile $dx = adp + a'dq$, $dy = bdp + b'dq$, deducem

$$Cdp = b'dx - a'dy,$$
$$Cdq = -bdx + ady.$$

De aici obţinem diferenţialele complete ale lui t şi u:

$$C^3dt = \left(A\frac{dC}{dp} - C\frac{dA}{dp}\right)(b'dx - a'dy) + \left(C\frac{dA}{dq} - A\frac{dC}{dq}\right)(bdx - ady),$$
$$C^3du = \left(B\frac{dC}{dp} - C\frac{dB}{dp}\right)(b'dx - a'dy) + \left(C\frac{dB}{dq} - B\frac{dC}{dq}\right)(bdx - ady).$$

Acum, dacă în aceste formule introducem următoarele valori:

$$\frac{dA}{dp} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma,$$
$$\frac{dA}{dq} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma',$$
$$\frac{dB}{dp} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha,$$
$$\frac{dB}{dq} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha',$$
$$\frac{dC}{dp} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta,$$
$$\frac{dC}{dq} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta',$$

şi observăm că valorile diferenţialelor dt, du, astfel obţinute, trebuie să fie egale cu cantităţile $Tdx + Udy$, respectiv $Udx + Vdy$, independent de diferenţialele dx, dy, găsim, după cîteva transformări destul de la îndemînnă,

$$\begin{aligned} C^3T = {} & \alpha Ab'^2 + \beta b'^2 + \gamma Cb'^2 - 2\alpha' Abb' - 2\beta' Bbb' - 2\gamma' Cbb' \\ & + \alpha'' Ab^2 + \beta'' Bb^2 + \gamma'' Cb^2, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} C^3U = {} & -\alpha Aa'b' - \beta Ba'b' - \gamma Ca'b' + \alpha' A'(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\ & - \alpha'' Aab - \beta'' Bab - \gamma'' Cab, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} C^3V = {} & \alpha Aa'^2 + \beta Ba'^2 + \gamma Ca'^2 - 2\alpha' Aaa' - 2\beta' Baa' - 2\gamma' Caa' \\ & + \alpha'' Aa^2 + \beta'' Ba^2 + \gamma'' Ca^2. \end{aligned}$$

Dacă punem acum, pentru a scurta,

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D, \tag{1}$$
$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D', \tag{2}$$
$$A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'', \tag{3}$$

va rezulta

$$C^3T = Db'^2 - 2D'bb' + D''b^2,$$
$$C^3U = -Da'b' + D'(ab' + ba') - D''ab,$$
$$C^3V = Da'^2 - 2D'aa' + D''a^2.$$

De aici, după ce facem toate calculele, obţinem

$$C^6(TV - U^2) = (DD'' - D'^2)(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'^2)C^2,$$

de unde rezultă următoarea expresie pentru măsura curburii:

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

XI.

Cu ajutorul formulei de mai sus, o sa obţinem acum o alta care poate fi considerată printre teoremele cele mai fecunde din teoria suprafeţelor curbe. Să introducem următoarele notaţii:

$$a^2 + b^2 + c^2 = E,$$
$$aa' + bb' + cc' = F,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = G.$$
$$(4) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = m,$$
$$(5) \qquad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m',$$
$$(6) \qquad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'',$$
$$(7) \qquad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n,$$
$$(8) \qquad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n',$$
$$(9) \qquad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n''$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \Delta.$$

Să eliminăm cantităţile β, γ din ecuaţiile (1), (4), (7); aceasta se face multiplicînd ecuaţiile cu $bc' - cb'$, $b'c - c'B$, $cB - bC$ şi adunînd. Vom avea

$$[A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC)]\alpha$$
$$= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC),$$

ecuaţie pe care o transformăm uşor în aceasta:

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE).$$

La fel, eliminînd între aceleaşi ecuaţii, fie α şi γ, fie α şi β, se obţine:

$$BD = \beta\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE),$$
$$CD = \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE).$$

Înmulţind aceste trei ecuaţii cu α'', β'', γ'' respectiv şi adunînd, avem:

$$(10) \qquad DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE).$$

Dacă tratăm de aceeaşi manieră ecuaţiile (2), (5), (8), găsim

$$\begin{aligned} AD' &= \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E), \\ BD' &= \beta'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E), \\ CD' &= \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E). \end{aligned}$$

Multiplicînd aceste ecuaţii cu α', β', γ' respectiv şi adunînd, obţinem:

$$D'^2 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E).$$

Combinaţia dintre această ecuaţie şi ecuaţia (10) ne dă

$$\begin{aligned} DD'' - D'^2 &= (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\Delta \\ &\quad + E(n'^2 - nn'') + F(nm'' - 2m'n'_m n'') + G(m'^2 - mm''). \end{aligned}$$

Este acum evident că avem:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dp} &= 2m, & \frac{dE}{dq} &= 2m', \\ \frac{dF}{dp} &= m' + n, & \frac{dF}{dq} &= m'' + n', \\ \frac{dG}{dp} &= 2n', & \frac{dE}{dq} &= 2n'', \end{aligned}$$

altfel spus:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}\frac{dE}{dp}, & m' &= \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}, & m'' &= \frac{dF}{dq} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}, \\ n &= \frac{1}{2}\frac{dF}{dp} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} & n' &= \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}, & n'' &= \frac{1}{2}\frac{dG}{dq}. \end{aligned}$$

În plus, e uşor de verificat că

$$\begin{aligned} &\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 \\ &\qquad = \frac{dn}{dq} - \frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp} - \frac{dm'}{dq} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2E}{dq^2} + \frac{d^2F}{dpdq} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2G}{dp^2}. \end{aligned}$$

Dacă, acum, înlocuim aceste formule în formula stabilită la finele paragrafului precedent pentru măsura curburii, ajungem la următoarea formulă care nu conţine decît cantităţile E, F, G, cu rapoartele lor diferenţiale de primul şi al doilea ordin:

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)k = E &\left[\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right] \\ &+ F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right) \\ &+ G\left[\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right] \\ &- 2(EG - F^2)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\frac{d^2F}{dpdq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right). \end{aligned}$$

XII.

Dacă observăm că întotdeauna avem

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2,$$

vedem imediat că $\sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$ este expresia generală a unui element liniar pe o suprafaţă curbă. Aşa fiind, analiza expusă în paragraful precedent ne spune că, pentru a găsi măsura curburii, nu e nevoie de formule finite care să exprime coordonatele x, y, z în funcţie de nedeterminatele p şi q; este suficient să avem expresia generală a mărimii fiecărui element liniar. Să trecem la cîteva aplicaţii ale acestei importante teoreme.

Să presupunem că suprafaţa noastră se poate aplica pe o altă suprafaţă, curbă sau plană, în aşa fel încît fiecărui punct al primei suprafeţe, determinat de coordonatele x, y, z, să-i corespundă un punct determinat de pe a doua suprafaţă, ale cărui coordonate să fie x', y', z'. E evident că x', y', z' pot fi, şi ele, considerate ca funcţii de p şi q, de unde obţinem

$$\sqrt{E'dp^2 + 2F'dp \cdot dq + G'dq^2},$$

E', F', G' fiind, de asemenea, funcţii de p şi q. Dar prin însăşi noţiunea de *aplicare* despre care este vorba aici, elementele care se corespund pe fiecare dintre suprafeţe vor fi în mod necesar egale şi vom avea identităţile

$$E = E', \qquad F = F', \qquad G = G'.$$

Astfel că formula din paragraful precedent conduce direct la această teoremă remarcabilă:

Dacă o suprafaţă curbă este aplicată pe o altă suprafaţă curbă oarecare, măsura curburii în fiecare punct rămîne invariabilă.

Prin urmare, *curbura integrală a unei porţiuni finite oarecare de suprafaţă nu se va schimba.*

Un caz particular asupra căruia geometrii îşi limitaseră pînă acum cercetările, este cel al suprafeţelor desfăşurabile, sau susceptibile de a fi aplicate pe un plan. Teoria noastră ne spune direct că, pentru asemenea suprafeţe, măsura curburii în fiecare punct va fi egală cu 0. Este motivul pentru care, dacă definim analitic aceste suprafeţe urmînd a treioa metodă, vom avea în fiecare punct

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 0,$$

ecuaţie caracteristică de mult timp cunoscută, dar care, după părerea noastră, nu e de obicei demonstrată cu toată rigoarea de dorit.

XIII.

Consideraţiile pe care tocmai le-am expus sînt legate de un fel particular de a privi suprafeţele, care ni se pare demn în cel mai înalt grad să reţină atenţia geometrilor. Într-adevăr, dacă se consideră o suprafaţă nu ca limita unui solid, ci mai curînd ca un solid flexibil şi inextensibil a cărui una dintre dimensiuni este considerată ca redusă la zero, proprietăţile suprafeţei vor depinde în parte de forma particulară pe care ea o poate lua în urma unei îndoiri a ei; dar vor fi, în parte, absolute şi invariabile, oricare ar fi această formă. Tocmai acest ultim tip de proprietăţi care se raportează la măsura curburii şi la curbura integrală, în sensul pe care îl dăm noi acestor expresii, deschide geometriei un un cîmp de studiu nou şi extrem de vast. Se pot privi din acelaşi unghi teoria liniilor geodezice şi alte subiecte pe care le vom trata mai tîrziu. În această ordine de idei, o suprafaţă plană sau o suprafaţă desfăşurabilă, fie ea cilindrică sau conică, etc., sînt privite ca fiind esenţialmente identice şi găsim un mod generic de a caracteriza aceste suprafeţe constînd în utilizarea expresiei $\sqrt{Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2}$ care leagă un element liniar oarecare de nedeterminatele p şi q. Dar înainte de a dezvolta mai mult acest subiect, trebuie să prezentăm principiile teoriei liniilor geodezice pe o suprafaţă curbă dată.

XIV.

În general, o linie curbă în spaţiu este caracterizată considerînd coordonatele tuturor punctelor ca anumite funcţii de o singură variabilă pe care o vom numi w. Lungimea unei asemenea linii, de la dintr-un punct iniţial arbitrar pînă la punctul ale cărui coordonate sînt x, y, z, se exprimă prin integrala

$$\int dw \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2}.$$

Dacă presupunem că poziţia acestei curbe suportă o variaţie infinit de mică, astfel încît coordonatele fiecărui punct sînt afectate de variaţiile δx, δy, δz, variaţia lungimii totale va fi egală cu

$$\int \frac{dx \cdot d\delta x + dy \cdot d\delta y + dz \cdot d\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

expresie care se mai poate pune sub forma

$$\frac{dx \cdot d\delta x + dy \cdot d\delta y + dz \cdot d\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} - \int \Bigg(\delta x \cdot d\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \delta y \cdot d\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} + \delta z \cdot d\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\Bigg).$$

În cazul în care linia trebuie să fie cea mai scurtă posibil între extremităţile sale, e clar că acele cantităţi care stau sub semnul $\int$ trebuie să dispară. Dacă linia trebuie să se afle pe o suprafaţă dată, caracterizată de ecuaţia

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

variaţiile δx, δy, δz vor trebui şi ele să satisfacă ecuaţia

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0.$$

De aici, conform principiilor binecunoscute, se deduce uşor că diferenţialele

$$d \cdot \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad d \cdot \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad d \cdot \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

trebuie să fie, respectiv, proporţionale cu cantităţile P, Q, R. Fie acum dr elementul liniei curbe, λ punctul suprafeţei sferice auxiliare care reprezintă direcţia acestui element, L punctul aceleiaşi suprafeţe sferice care reprezintă direcţia normalei la suprafaţa curbă; în fine, fie ξ, η, ζ coordonatele punctului λ şi X, Y, Z coordonatele punctului L relativ la centrul sferei. Vom avea

$$dx = \xi dr, \qquad dy = \eta dr, \qquad dz = \zeta dr,$$

de unde conchidem că diferenţialele de mai sus vor fi reprezentate de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Şi cum cantităţile P, Q, R sînt, ele însele, proporţionale cu X, Y, Z, linia cea mai scurtă va fi reprezentată prin ecuaţiile

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z}.$$

De altfel, este uşor de văzut că $\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$ reprezintă arcul suprafeţei sferice care măsoară unghiul dintre direcţiile tangentelor la începutul şi la sfîrşitul elementului dr, şi a cărui valoare este $\frac{dr}{\rho}$, unde ρ reprezintă raza de curbură a geodezicei în acel punct. Ca urmare, vom avea

$$\rho d\xi = X dr, \qquad \rho d\eta = Y dr, \qquad \rho d\zeta = Z dr.$$

XV.

Să considerăm, pentru o suprafaţă dată, o infinitate de geodezice plecînd dintr-un acelaşi punct dat A şi să distingem aceste linii între ele prin unghiul făcut de primul element al fiecăreia cu primul element al uneia dintre ele luată drept termen de comparaţie. Fie φ acest unghi sau, mai general, o funcţie de acest unghi şi fie r lungimea cuprinsă între punctul A şi punctul ale cărui coordonate sînt x, y, z pe linia geodezică corespunzătoare unghiului φ. Deoarece unor valori determinate pentru r şi φ corespund puncte determinate pe suprafaţă, putem privi x, y, z ca funcţii de variabilele r şi φ. Să păstrăm, pe de altă parte, notaţiile λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z în sensul definiţiilor de mai sus, raportîndu-le la un punct oarecare de pe o linie geodezică arbitrară.

Toate liniile geodezice de acceeaşi lungime r se vor termina pe o altă linie a cărei lungime o vom reprezenta prin v, plecînd din unul dintre punctele sale, arbitrar ales.Putem considera v ca o funcţie de nedeterminatele r şi φ şi, dacă desemnăm cu λ' punctul suprafeţei sferice auxiliare care reprezintă direcţia elementului dv şi prin ξ', η', ζ' coordonatele acestui punct faţă de ecntrul sferei, avem:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \xi' \cdot \frac{dv}{d\varphi}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \eta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \zeta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}.$$

De aici şi din ecuaţiile

$$\frac{dx}{dr} = \xi, \quad \frac{dy}{dr} = \eta, \quad \frac{dz}{dr} = \zeta,$$

rezultă că avem:

$$\frac{dx}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\frac{dv}{d\varphi} = \cos\lambda\lambda' \cdot \frac{dv}{d\varphi}.$$

Vom desemna cu S primul membru al acestei ecuaţii. S va fi o funcţie de variabilele r şi φ care ne va da, prin diferenţiere în raport cu r:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dr} &= \frac{d^2x}{dr^2} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dr^2} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dr^2} \cdot \frac{dz}{d\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{d\left[\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]}{d\varphi} \\ &= \frac{d\xi}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d\eta}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} + \frac{1}{2}\frac{d(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{d\varphi}.\end{aligned}$$

Dar $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ şi, ca urmare, diferenţiala acestei cantităţi este egală cu zero. Pe de altă parte, conform paragrafului precedent avem, notînd acum cu ρ raza de curbură a liniei geodezice la extremitatea sa

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{X}{\rho}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{Y}{\rho}, \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{Z}{\rho}.$$

Obţinem astfel:

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\rho} \cdot (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{dv}{d\varphi} = 0,$$

deoarece punctul λ' aparţine, evident, cercului mare de pol L. Tragem, de aici, concluzia că S nu depinde de r şi este doar funcţie de φ. Dar, pentru $r = 0$, avem evident $v = 0$, în consecinţă şi $\frac{dv}{d\varphi} = 0$, cu $S = 0$ independent de φ. Vom avea deci, în general, cu necesitate, $S = 0$ şi drept urmare, $\cos \lambda\lambda' = 0$, adică $\lambda\lambda' = 90°$. De unde rezultă:

Teoremă. *Dacă, pe o suprafaţă curbă, se trasează o infinitate de linii geodezice de aceeaşi lungime plecînd din acelaşi punct, linia care uneşte extremităţile acestor linii le va tăia pe toate sub un unghi drept.*

Ni s-a părut important să deducem această deoremă din proprietatea fundamentală a liniilor geodezice, dar o putem demonstra fără nici un calcul prin raţionamentul următor. Fie AB, AB' două linii geodezice de aceeaşi lungime, făcînd în A un unghi infinit de mic. Să presupunem că unul sau celălalt dintre cele două unghiuri pe care le face elementul BB' cu liniile BA, $B'A$ diferă printr-un unghi drept de o cantitate finită. Atunci, prin legea continuităţii, unul dintre aceste unghiuri va fi mai mare, celălalt mai mic de decît un unghi drept. Să presupunem că unghiul din B este egal cu $90° - \omega$ şi să luăm pe linia BA un punct C astfel încît

$$BC = BB' \cdot \operatorname{cosec} \omega.$$

Vom putea trata triunghiul infinit de mic $BB'C$ ca fiind plan şi vom avea

$$CB' = BC \cdot \cos \omega,$$

în consecinţă

$$AC + CB' = AC + BC \cdot \cos \omega = AB - BC(1 - \cos \omega) = AB' - BC(1 - \cos \omega),$$

adică drumul de la A la B' prin punctul C ar fi mai scurt decît linia cea mai scurtă, ceea ce este absurd.

XVI.

Teoremei precedente o alăturăm pe aceasta:

Dacă, pe o suprafaţă curbă, imaginăm o linie oarecare, din fiecare punct al căreia pleacă sub unghi drept şi de aceeaşi parte a suprafeţei o infinitate de linii geodezice de aceeaşi lungime, curba care uneşte extremităţile acestor linii le va tăia pe toate sub un unghi drept.

Pentru demonstrarea acestei teoreme nu avem nimic de schimbat în analiza precedentă, în afara faptului că φ trebuie să desemneze lungimea curbei *date*, socotită cu începere de la un punct arbitrar sau, dacă preferaţi, o funcţie de această lungime. Vom aplica, astfel, aceleaşi raţionamente, cu modificarea că ecuaţia $S = 0$ pentru $r = 0$ este acum conţinută în chiar ipoteza. De altfel, această nouă teoremă nu e altceva decît teorema precedentă generalizată. Deoarece se poate deduce aceasta din urmă luînd drept linie dată un cerc infinit de mic descris în jurul punctului A

ca centru. În fine, atragem atenţia că se poate înlocui şi aici, ca mai înainte, analiza cu consideraţii geometrice care sînt, de altfel, atît de uşor de descoperit, încît ni se pare inutil să mai zăbovim asupra lor.

XVII.

Vom căuta acum condiţia ca această linie să fie geodezică. Deoarece lungimea s se exprimă prin integrala

$$s = \int Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2,$$

condiţia de minimalitate impune ca variaţia acestei integrale să fie nulă pentru modificări infinit de mici în traseul liniei. Sîntem conduşi la un calcul pe care îl putem simplifica mult considerînd p ca funcţie de q. Vom avea atunci, reprezentînd variaţia fiecărei cantităţi prin caracteristica δ:

$$\begin{aligned}\delta s &= \int \frac{\left(\frac{dE}{dp} \cdot dp^2 + 2\frac{dF}{dp} \cdot dpdq + \frac{dG}{dp} \cdot dq^2\right)\delta p + (2Edp + 2Fdq)d\delta p}{2ds} \\ &= \frac{Edp + Fdq}{ds} \cdot \delta p + \int \delta p \left(\frac{\frac{dE}{dp} \cdot dp^2 + 2\frac{dF}{dp} \cdot dpdq + \frac{dG}{dp} \cdot dq^2}{ds} - d\frac{Edp + Fdq}{ds}\right).\end{aligned}$$

Pentru ca δs să fie constant trebuie să se anuleze cantităţile de sub semnul integralei. Deci vom avea:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dp} \cdot dp^2 + 2\frac{dF}{dp} \cdot dpdq + \frac{dG}{dp} \cdot dq^2 &= 2ds \cdot \frac{Edp + Fdq}{ds} \\ &= 2ds \cdot d\sqrt{E}\cos\theta = \frac{ds \cdot dE \cdot \cos\theta}{\sqrt{E}} - 2ds \cdot d\theta\sqrt{E}\sin\theta \\ &= \frac{(Edp + Fdq)dE}{E} - 2\sqrt{EG - F^2}dq \cdot d\theta \\ &= \left(\frac{(Edp + Fdq)}{E}\right) \cdot \left(\frac{dE}{dp} \cdot dp + \frac{dE}{dq} \cdot dq\right) - 2\sqrt{EG - F^2}dq \cdot d\theta.\end{aligned}$$

De aici găsim, pentru linia geodezică, următoarea ecuaţie definitorie:

$$\sqrt{EG - F^2}dq \cdot d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E} \cdot \frac{dE}{dp} \cdot dp + \frac{F}{E} \cdot \frac{dE}{dq} \cdot dp - \frac{dF}{dp} \cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq,$$

pe care o mai putem scrie sub forma:

$$\sqrt{EG - F^2}dq \cdot d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E} \cdot dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} \cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq.$$

În plus, folosind şi ecuaţia

$$\mathrm{ctg}\theta = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{dp}{dq} + \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}},$$

se poate elimina θ din ecuaţia de mai sus şi obţine astfel o ecuaţie diferenţială între p şi q. Dar ar fi mai complicat şi mai puţin util pentru aplicaţii.

XIX.

Formulele generale, potrivite pentru a reprezenta măsura curburii şi variaţia direcţiei geodezicei, la care am ajuns în paragrafele XI şi XVIII, devin mult mai simple dacă alegem cantităţile p şi q astfel încît liniile primului sistem să taie peste tot ortogonal liniile celui de-al doilea, adică în aşa fel ca să avem $\omega = 90°$ sau $F = 0$. Într-adevăr, atunci găsim pentru măsura curburii:

$$4E^2G^2k = E \cdot \frac{dE}{dq} \cdot \frac{dG}{dq} + E\left(\frac{dG}{dp}\right)^2 + G \cdot \frac{dE}{dp} \cdot \frac{dG}{dp} + G\left(\frac{dE}{dq}\right)^2 - 2EG\left(\frac{d^2E}{dq^2} + \frac{d^2G}{dp^2}\right)$$

şi pentru variaţia unghiului θ:

$$\sqrt{EG} \cdot d\theta = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq} \cdot dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq.$$

Printre diferitele cazuri în care este satisfăcută această condiţie, trebuie să remarcăm în primul rînd pe cel în care toate liniile unuia sau altuia dintre sisteme, de exemplu ale primului, sînt geodezice. Atunci, pentru o valoare constantă a lui q, unghiul θ devine egal cu 0; prin urmare, ecuaţia de mai sus care ne dă variaţia unghiului θ, arată că trebuie să avem $\frac{dE}{dq} = 0$. Astfel, coeficientul E va fi independent de q, deci va fi ori constant, ori funcţie numai de nedeterminata p. De altfel, vom putea considera totdeauna că p reprezintă, pur şi simplu, lungimea însăşi a fiecărei linii din primul sistem calculată - dacă toate liniile primului sistem sînt concurente într-un punct - din acel punct, iar dacă nu, începînd de la o linie oarecare a celui de-al doilea sistem. Acestea fiind zise, e clar că nedeterminatele p şi q nu sînt altceva decît cantităţile pe care le-am desemnat prin r şi φ în paragrafele XV şi XVI. În acest fe formulele precedente devin:

$$4G^2k = \left(\frac{dG}{dp}\right)^2 - 2G\frac{d^2G}{dp^2},$$

$$\sqrt{G} \cdot d\theta = -\frac{1}{2}\frac{dG}{dp} \cdot dq,$$

În general, m va fi o funcţie de p şi de q, iar mdq expresia unui element oarecare al unei linii din al doilea sistem. Dar în cazul particular în care toate liniile p pleacă dintr-un acelaşi punct, vom avea evident $m = 0$ pentru $p = 0$. Deci, dacă în acest caz, luăm drept q chiar unghiul pe care îl face primul element al unei linii oarecare din primul sistem cu elementul uneia dintre ele alese ca termen de comparaţie şi, dacă remarcăm că, pentru o valoare infinit mică a lui p, elementul unei linii din al doilea sistem (pe care îl putem considera ca fiind un cerc descris de o rază p), va fi egal cu pdq, va rezulta $p = m$ pentru o valoare infinit mică a lui p şi, prin urmare, pentru $p = 0$ vom avea simultan $m = 0$ şi $\frac{dm}{dp} = 0$.

XX.

Să ne mai oprim o clipă asupra acestei presupuneri, anume că p desemnează lungimea oarecare a unei linii geodezice duse dintr-un punct determinat A la un punct oarecare al suprafeţei şi q notează unghiul pe care primul element al acestei linii îl face cu primul element al unei linii geodezice date, plecînd din punctul A. Fie B un punct determinat pe această linie, pentru care $q = 0$ şi C un alt punct determinat pe suprafaţă, pentru care q are o valoare pe care o notăm simplu A. Să presupunem că punctele B şi C sînt unite de o linie geodezică a cărei lungime măsurată din punctul B va fi notată, ca în paragraful XVIII, cu s. De asemenea, vom nota cu δ unghiul pe care fiecare element ds îl face, într-un punct oarecare, cu elementul dp; în fine, cu θ^0, θ' notăm valorile unghiului θ în punctele B şi C. Vom avea astfel, pe suprafaţa curbă, un triunghi cuprins între trei linii geodezice ale cărui unghiuri din B şi C, pe care le vom desemna simplu cu aceleaşi litere, vor fi egale, primul cu complementul unghiului θ^0 faţă 180°, celălalt chiar cu unghiul θ'. Dar deoarec, în analiza noastră, după cum e uşor de văzut, toate unghiurile trebuie să se exprime prin numere, nu prin grade, astfel ca unghiul de $57°17'45''$ căruia îi corespunde un arc egal cu raza, să fie luat drept unitate, trebuie să punem, numind 2π circumferinţa cercului:

$$\theta^0 = \pi - B, \qquad \theta' = C.$$

Să vedem acum care este curbura integrală a acestui triunghi. Curbura este, într-un punct dat, egală cu $kd\sigma$, $d\sigma$ reprezentînd un element de suprafaţă. Şi cum acest element se exprimă prin $mdp \cdot dq$, se vede că trebuie să calculăm integrala $\int\int kmdp \cdot dq$ pe toată suprafaţa triunghiului. Să începem cu integrarea după p care, deoarece $k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{d^2m}{dp^2}$, ne dă $dq \cdot (const. - \frac{dm}{dp})$ pentru curbura integrală a ariei cuprinse între liniile primului sistem cărora le corespund valorile celei de-a doua nedetrminate q, $q + dq$. Cum această curbură integrală trebuie să se anuleze pentru $p = 0$, cantitatea constantă introdusă de integrare trebuie să fie egală cu însăşi valoarea lui $\frac{dm}{dp}$ pentru $p = 0$, adică egală cu unitatea. Avem astfel $dq \cdot (1 - \frac{dm}{dp})$, expresie în care trebuie să-i dăm lui $\frac{dm}{dp}$ valoarea pe care o ia această funcţie în punctul în care elementul de suprafaţă considerat întîlneşte linia CB. Dar, conform paragrafului precedent, pe această linie avem $\frac{dm}{dp}dq = -d\theta$, astfel că expresia noastră devine $dq + d\theta$. Integrînd acum între limitele $q = 0$ şi $q = A$, obţinem pentru curbura integrală a triunghiului, $A + \theta' - \theta^0 = A + B + C - \pi$.

Curbura integrală nu e altceva decît aria acestei porţiuni de pe suprafaţa sferică auxiliară care corespunde triunghiului, afectată de semnul pozitiv sau negativ după cum suprafaţa curbă pe care e trasat este concavo-concavă sau concavo-convexă. De altfel, trebuie să luăm drept unitate de suprafaţă pătratul de latură unitatea (raza sferei), ceea ce dă 4π pentru aria totală a sferei. Aşa fiind, porţiunea de suprafaţă sferică care corespunde triunghiului este faţă de întreaga suprafaţă a sferei ca şi $(A + B + C - \pi)$ faţă de 4π. Această teoremă despre care nu credem că abuzăm numărînd-o printre cele mai elegante din teoria suprafeţelor curbe, se mai poate enunţa în felul următor:

Suma unghiurilor unui triunghi format de linii geodezice pe o suprafaţă curbă oarecare este superioară lui 180° *dacă această suprafaţă este concavo-concavă şi inferioară lui* 180° *dacă ea este concavo-convexă, cu o cantitate care are drept măsură aria triunghiului sferic care-i corespunde după direcţiile normalelor, considerînd suprafaţa totală a sferei drept* 720°.

Mai general, într-un poligon cu n laturi formate de linii geodezice, diferenţa (în plus sau în minus după natura suprafeţei) dintre suma unghiurilor şi $2n$- 4 unghiuri drepte este egală cu aria poligonului corespunzător pe suprafaţa sferică, cu condiţia ca suprafaţa sferei să fie 720°. Este ceea ce rezultă imediat din teorema precedentă imaginîndu-ne că am împărţit poligonul dat în triunghiuri.

XXI.

Să restituim simbolurilor p, q, E, F, G, ω semnificaţiile generale care le fuseseră atribuite înainte şi să presupunem că natura suprafeţei curbe considerate este definită şi cu ajutorul a două variabile de acelaşi gen, dar diferite, p' şi q'; astfel că expresia unui element liniar oarecare este

$$\sqrt{E'dp'^2 + 2F'dp' \cdot dq' + G'dq'^2}.$$

În felul acesta, fiecărui punct al suprafeţei definit de valori determinate ale ale variabilelor p şi q, îi vor corespunde valori determinate ale variabilelor p' şi q' care vor fi funcţii de p şi de q. Vom presupune că diferenţierea acestor funcţii ne dă

$$dp' = \alpha dp + \beta dq,$$
$$dq' = \gamma dp + \delta dq.$$

Ne propunem acum să descoperim semnificaţia geometrică a coeficienţilor α, β, γ, δ.

Conform celor de mai sus, putem imagina pe suprafaţa curbă patru sisteme de linii pentru care p, q, p', q' vor fi, respectiv, constante. Dacă, prin punctul determinat căruia-i corespund valorile p, q, p', q', presupunem trasate cele patru linii ale acestui sistem, elementele acestor linii care vor corespunde variaţiilor pozitive dp, dq, dp', dq' vor fi:

$$\sqrt{E} \cdot dp, \quad \sqrt{G} \cdot dq, \cdot\sqrt{E'} \cdot dp', \cdot\sqrt{E'} \cdot dq'.$$

Vom nota M, N, M', N' unghiurile pe care direcţiile acestor elemente le fac cu o direcţie fixă arbitrară, socotindu-le în sensul în care a doua linie este plasată faţă de a doua în aşa fel încît $\sin(N - M)$ să fie o cantitate pozitivă. Vom mai presupune (ceea ce este permis) că a patra linie e astfel plasată faţă de a doua încît $\sin(N' - M')$ să fie de asemenea pozitivă. Cu acestea, dacă vom considera un alt punct, infinit de puţin depărtat de primul, căruia îi corespund valorile $p + dp$, $q + dq$, $p' + dp'$, $q' + dq'$, ne va fi suficientă doar puţină atenţie pentru a vedea că, în general (adică independent de valorile variaţiilor dp, dq, dp', dq', vom avea:

$$\sqrt{E} \cdot dp \cdot \sin M + \sqrt{G} \cdot dq \cdot \sin N = \sqrt{E'} \cdot dp' \cdot \sin M' + \sqrt{G'} \cdot dq' \cdot \sin N',$$

deoarece fiecare dintre aceste expresii nu e altceva decît distanţa de la noul punct la linia de la care măsurăm unghiurile direcţiilor. Dar, conform unei notaţii deja introduse, avem $N - M = \omega$. Vom pune, prin analogie $N' - M' = \omega'$. Vom pune, de asemenea, $N - M' = \psi$. Astfel, ecuaţia pe care o tocmai am găsit-o ia următoarea formă:

$$\sqrt{E}\cdot dp\cdot\sin(M' - \omega + \psi) + \sqrt{G}\cdot dq\cdot\sin(M' + \psi) = \sqrt{E'}\cdot dp'\cdot\sin M' + \sqrt{G'}\cdot dq'\cdot\sin(M' + \omega'),$$

sau pe aceasta:

$$\begin{aligned}\sqrt{E} \cdot dp \cdot \sin(N' - \omega - \omega' + \psi) + \sqrt{G} \cdot dq \cdot \sin(N' - \omega' + \psi)\\ = \sqrt{E'} \cdot dp' \cdot \sin(N' - \omega') + \sqrt{G'} \cdot dq' \cdot \sin N'.\end{aligned}$$

Şi cum, evident, ecuaţia care ne-a condus la aceste două formule trebuie să existe independent de direcţia iniţială, putem alege arbitrar această direcţie. Facem deci

$N' = 0$ în a doua formulă şi $M' = 0$ în prima; obţinem următoarele ecuaţii:

$$\sqrt{E'} \cdot \sin\omega' \cdot dp' = \sqrt{E} \cdot \sin(\omega + \omega' - \psi) \cdot dp + \sqrt{G} \cdot \sin(\omega' - \psi) \cdot dq,$$
$$\sqrt{G'} \cdot \sin\omega' \cdot dq' = \sqrt{E} \cdot \sin(\psi - \omega) \cdot dp + \sqrt{G} \cdot \sin(\psi) \cdot dq.$$

Aceste ecuaţii trebuie să fie identice cu:

$$dp' = \alpha dp + \beta dq,$$
$$dq' = \gamma dp + \delta dq;$$

ca urmare, vom putea determina valorile coeficienţilor α, β, γ, δ. Acestea vor fi:

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{E}{E'}} \cdot \tfrac{\sin(\omega+\omega'-\psi)}{\sin\omega'}, \qquad \beta = \sqrt{\tfrac{G}{E'}} \cdot \tfrac{\sin(\omega'-\psi)}{\sin\omega'},$$
$$\gamma = \sqrt{\tfrac{E}{G'}} \cdot \tfrac{\sin(\psi-\omega)}{\sin\omega'}, \qquad \delta = \sqrt{\tfrac{G}{G'}} \cdot \tfrac{\sin\psi}{\sin\omega'}.$$

Lor trebuie să le adăugăm ecuaţiile:

$$\cos\omega = \tfrac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \cos\omega' = \tfrac{F'}{\sqrt{E'G'}},$$
$$\sin\omega = \sqrt{\tfrac{EG-F^2}{EG}}, \qquad \sin\omega' = \sqrt{\tfrac{E'G'-F'^2}{E'G'}},$$

cu ajutorul cărora le putem scrie pe cele patru precedente după cum urmează:

$$\alpha\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EG'} \cdot \sin(\omega + \omega' - \psi),$$
$$\beta\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GG'} \cdot \sin(\omega' - \psi),$$
$$\gamma\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EE'} \cdot \sin(\psi - \omega),$$
$$\delta\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GE'} \cdot \sin\psi.$$

Cum prin substituţiile $dp' = \alpha dp + \beta dq$, $dq' = \gamma dp + \delta dq$, trinomul

$$E'dp'^2 + 2F'dp' \cdot dq' + G'dq'^2$$

trebuie să treacă în $Edp^2 + 2Fdp \cdot dq + Gdq^2$, obţinem uşor:

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Şi cum, reciproc, al doilea trinom trebuie să se schimbe în primul prin substituţiile:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)dp = \delta dp' - \beta dq', \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)dq = -\gamma dp' + \alpha dq',$$

găsim, de asemenea:

$$E\delta^2 - 2F\gamma\delta + G\gamma^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot E',$$
$$E\beta\delta - F(\alpha\delta + \beta\gamma) + G\alpha\gamma = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot F',$$
$$E\beta^2 - 2F\alpha\beta + G\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot G'.$$

XXII.

De la cercetările extrem de generale expuse în paragraful precedent, vom coborî la o aplicaţie foarte întinsă în care, păstrînd pentru p şi q semnificaţiile cele mai generale, vom lua drept p' şi q cantităţile pe care le numisem r şi φ în paragraful al XV-lea, servindu-ne în continuare de aceleaşi caractere, în aş fel încît, pentru fiecare punct al suprafeţei, r va fi cea mai scurtă distanţă de la acest punct la un punct luat drept origine şi φ unghiul din origine, cuprins între primul element şi o direcţie considerată fixă. Astfel vom avea $E' = 1$, $F' = 0$, $\omega' = 90°$. Vom pune, de asemenea, $\sqrt{G'} = m$ astfel că un element oarecare va deveni egal cu $\sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2}$. În felul acesta, cele patru ecuaţii care exprimă α, β, γ, δ, la care am ajuns în paragraful precedent, ne dau:

$$\sqrt{E} \cdot \cos(\omega - \psi) = \frac{dr}{dp}, \tag{11}$$

$$\sqrt{G} \cdot \cos\psi = \frac{dr}{dq}, \tag{12}$$

$$\sqrt{E} \cdot \sin(\omega - \psi) = m \cdot \frac{d\varphi}{dp}, \tag{13}$$

$$\sqrt{G} \cdot \sin\psi = m \cdot \frac{d\varphi}{dq}. \tag{14}$$

În plus, ultimele două ecuaţii din paragraful precedent devin:

$$EG - F^2 = E\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 - 2F \cdot \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dr}{dq} + G\left(\frac{dr}{dp}\right)^2, \tag{15}$$

$$\left(E \cdot \frac{dr}{dq} - F\frac{dr}{dp}\right)\frac{d\varphi}{dq} = \left(F \cdot \frac{dr}{dq} - G \cdot \frac{dr}{dp}\right)\frac{d\varphi}{dp}. \tag{16}$$

De aceste ecuaţii trebuie să ne folosim pentru determinarea cantităţilor r, φ, ψ şi (dacă este nevoie) m în funcţie de p şi q. Integrarea ecuaţiei (15) ni-l va da pe r. Odată găsit r, integrarea ecuaţiei (16) ni-l dă pe φ. Mai departe, una sau cealaltă dintre ecuaţiile (11), (12) ni-l va face cunoscut pe ψ. În fine, m se obţine cu ajutorul uneia dintre ecuaţiile (13), (14).

Integrarea generală a ecuaţiilor (15), (16) trebuie, în mod necesar, să introducă două funcţii arbitrare a căror semnificaţie o vom înţelege uşor dacă ne vom gîndi că aceste ecuaţii nu sînt limitate la cazul pe care îl considerăm, ci că ele sînt valabile chiar cînd atribuim lui r ı φ semnificaţia mai generală pe care le-am dat-o în paragraful al XVI-lea: r era lungimea liniei geodezice măsurate de la o curbă arbitrară pe care o întîlneşte normal, iar φ o funcţie oarecare de lungimea porţiunii acestei din urmă curbe cuprinse între geodezică şi un punct ales la întîmplare. Soluţia generală trebuie să îmbrăţişeze toate aceste lucruri în generalitatea lor. Dar funcţiile arbitrare devin funcţii determinate cînd se dă linia arbitrară şi funcţia pe care trebuie s-o reprezinte φ. În cazul în care ne-am plasat, putem considera un cerc infinit de mic avînd centrul în chiar punctul din care măsurăm distanţele r, iar φ va reprezenta porţiunile în care este împărţit acest cerc de de diferitele raze. Se deduce de aici uşor că ecuaţiile (15) şi (16) sînt perfect suficiente pentru acest caz, cu condiţia ca funcţiile pe care ele le lasă arbitrare să fie determinate de condiţia de a exprima convenabil r şi φ, fie în punctul iniţial, fie pentru punctele care sînt infinit de puţin depărtate de acesta.

De altfel, în ceea ce priveşte integrarea ecuaţiilor (15) şi (16), ea se poate reduce la integrarea unor ecuaţii diferenţiale ordinare, dar atît de complicate încît nu ar fi de nici un folos. Dimpotrivă, dezvoltarea în serie, care este suficientă pentru aplicaţiile practice de cîte ori este vorba de porţiuni restrînse de suprafaţă, nu prezintă nici o dificultate. Din formulele la care se paoate ajunge în felul acesta derivă, ca dintr-un izvor fecund, soluţia unui mare număr de probleme extrem de importante. Ne vom mulţumi să tratăm aici un exemplu particular, pentru a evidenţia tipul metodei.

XXIII.

Considerăm cazul în care toate liniile pentru care p este constant sînt linii geodezice care taie normal linia pentru care $\varphi = 0$, linie pe care o vom putea privi ca pe o axă a absciselor. Fie A punctul pentru care $r = 0$, D un punct oarecare pe axa absciselor, $AD = p$, B un punct oarecare pe linia geodezică normală la AD în D şi $BD = q$, în aşa fel ca p să poată fi considerat ca ordonata punctului B. Luăm abscisele pozitive pe acea ramură a axei absciselor pentru care $\varphi = 0$, r fiind pentru noi, totdeauna, o cantitate pozitivă. Cît priveşte ordonatele, le vom considera pozitive pe cele care se raportează la acea regiune a suprafeţei unde unghiul φ are valori cuprinse între $0°$ şi $180°$.

Conform teoremei din paragraful al XVI-lea, vom avea $\omega = 90°$, $F = 0$ şi, de asemenea, $G = 1$. Vom mai pune $\sqrt{E} = n$; n va fi o anume funcţie de p şi q a cărei valoare, pentru $q = 0$, va fi egală cu 1. Aplicarea formulei date în paragraful al XVIII-lea la cazul actual arată că, pe o geodezică oarecare, trebuie să avem $d\theta = -\frac{dn}{dq} \cdot dp$, θ reprezentînd unghiul cuprins între un element al acestei linii şi un element al liniei pentru care q este constant. Şi cum linia absciselor este ea însăşi, aici, o geodezică şi deoarece, pentru toate punctele sale, are loc $\theta = 0$, e clar că, pentru $q = 0$, vom avea peste tot $\frac{dn}{dq} = 0$. Tragem de aici cpncluzia că, dacă n se dezvoltă în serie după puterile crescătoare ale lui q, această serie va avea următoarea formă:

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + etc.,$$

f, g, h, etc., fiind funcţii de p. Să punem, pe de altă parte:

$$\begin{aligned} f &= f^0 + f'p + f''p^2 + etc., \\ g &= g^0 + g'p + g''p^2 + etc., \\ h &= h^0 + h'p + h''p^2 + etc. \end{aligned}$$

Astfel că vom avea:

$$\begin{aligned} n = 1 + f^0q^2 + f'pq^2 &+ f''p^2q^2 + etc., \\ &+ g^0q^3 + g'pq^3 + etc., \\ &+ h^0q^4 + etc. \end{aligned}$$

XXIV.

Ecuaţiile din paragraful al XXII-lea ne dau acum:

$$n \sin\psi = \frac{dr}{dp}, \quad \cos\psi = \frac{dr}{dq}, \quad -n\cos\psi = m \cdot \frac{d\varphi}{dp}, \quad \sin\psi = m \cdot \frac{d\varphi}{dq},$$

$$n^2 = n^2 \left(\frac{dr}{dq}\right)^2, \qquad n^2 \cdot \frac{dr}{dq} \cdot \frac{d\varphi}{dq} + \frac{dr}{dp} \cdot d\varphi dp = 0.$$

Cu ajutorul acestor ecuaţii dintre care a cincea şi a şasea sînt, acum, conţinute în celelalte, vom putea dezvolta în serie r, φ, ψ m sau orice alte funcţii de aceste cantităţi. Le vom stabili aici pe acelea dintre ele care sînt mai demne de atenţie.

Deoarece, pentru valori infinit de mici ale lui p şi q, trebuie să avem $r^2 = p^2 + q^2$, seria care ni-l dă pe r^2 trebuie să înceapă cu termenii $p^2 + q^2$: vom obţine termenii de ordin superior prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi[1], folosind ecuaţia

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{dr^2}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dr^2}{dq}\right) = 4r^2,$$

adică

$$\begin{aligned} r^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f^0 p^2 q^2 + \frac{1}{2} f' p^3 q^2 + \left(\frac{2}{5} f'' - \frac{4}{45} f^{0^2}\right) p^4 q^2 + etc. \\ + g^0 p^2 q^3 + \frac{2}{5} g' p^3 q^3 \\ + \left(\frac{2}{5} h^0 - \frac{7}{45} f^{0^2}\right) p^2 q^4. \end{aligned} \tag{17}$$

De aici, ajutîndu-ne de formula $r \sin\psi = \frac{1}{2n} \cdot \frac{dr^2}{dp}$, obţinem:

$$\begin{aligned} r \sin\psi = p - \frac{1}{3} f^0 p q^2 - \frac{1}{4} f' p^2 q^2 - \left(\frac{1}{5} f'' + \frac{8}{45} f^{0^2}\right) p^3 q^2 + ... \\ - \frac{1}{2} g^0 p q^3 - \frac{2}{5} g' p^2 q^3 \\ - \left(\frac{3}{5} h^0 - \frac{8}{45} f^{0^2}\right) p q^4; \end{aligned} \tag{18}$$

La fel, cu ajutorul formulei $r \cos\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{dr^2}{dq}$, găsim:

$$\begin{aligned} r \cos\psi = q + \frac{2}{3} f^0 p^2 q + \frac{1}{2} f' p^3 q + \left(\frac{2}{5} f'' - \frac{4}{45} f^{0^2}\right) p^4 q + ... \\ + \frac{3}{4} g^0 p^2 q^2 + \frac{3}{5} g' p^3 q^2 \\ + \left(\frac{4}{5} h^0 - \frac{14}{45} f^{0^2}\right) p^2 q^3, \end{aligned} \tag{19}$$

ecuaţii din a căror combinare rezultă unghiul ψ. Unghiul φ se va obţine la fel, sub forma cea mai convenabilă, folosind seriile în care se dezvoltă $r \cos\varphi$ şi $r \sin\varphi$.

[1]Ni s-a părut inutil să prezentăm aici acest calcul care se poate, de altfel, scurta cu ajutorul cîtorva artificii.

Pentru aceasta, trebuie să ne servim de ecuaţiile cu diferenţiale parţiale:

$$\begin{aligned}
\frac{dr\cos\varphi}{dp} &= n\cos\varphi\cdot\sin\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dp},\\
\frac{dr\cos\varphi}{dq} &= \cos\varphi\cdot\cos\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dq},\\
\frac{dr\sin\varphi}{dp} &= n\sin\varphi\cdot\sin\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dp},\\
\frac{dr\sin\varphi}{dq} &= \sin\varphi\cdot\cos\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dq},
\end{aligned}$$

$$n\cos\psi\cdot\frac{d\varphi}{dq} + \sin\psi\cdot\frac{d\varphi}{dp} = 0,$$

a căror combinare ne dă:

$$\begin{aligned}
\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{dr\cos\varphi}{dp} + r\cos\psi\cdot\frac{dr\cos\varphi}{dq} &= r\cos\varphi,\\
\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{dr\sin\varphi}{dp} + r\cos\psi\cdot\frac{dr\sin\varphi}{dq} &= r\sin\varphi,
\end{aligned}$$

De aici se deduc uşor seriile care îi dau pe $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$. Aceste serii, ale căror primi termeni trebuie să fie p şi q, sînt următoarele:

$$\begin{aligned}
r\cos\varphi = p &+ \frac{2}{3}f^0pq^2 + \frac{5}{12}f'p^2q^2 + \left(\frac{3}{10}f'' - \frac{8}{45}f^{0\,2}\right)p^3q^2 + \ldots\\
&+ \frac{1}{2}g^0pq^3 + \frac{7}{20}g'p^2q^3\\
&+ \left(\frac{2}{5}h^0 - \frac{7}{45}f^{0\,2}\right)pq^4,
\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}
r\sin\varphi = q &- \frac{1}{3}f^0p^2q - \frac{1}{6}f'p^3q - \left(\frac{1}{10}f'' - \frac{7}{90}f^{0\,2}\right)p^4q - \ldots\\
&- \frac{1}{4}g^0p^2q^2 - \frac{3}{20}g'p^3q^2\\
&- \left(\frac{1}{5}h^0 + \frac{13}{90}f^{0\,2}\right)p^2q^3.
\end{aligned}\tag{21}$$

Din combinarea ecuaţiilor (18), (19), (20), (21), s-ar putea obţine o serie pentru $r^2\cos(\psi+\varphi)$ şi, de aici, împărţind cu seria (17), o serie pentru $\cos(\psi+\varphi)$, cu ajutorul căreia s-ar putea ajunge la o serie care să dea chiar unghiul $\psi+\varphi$. Dar acest rezultat se obţine într-o manieră mai elegantă după cum urmează. Diferenţiind prima şi a doua ecuaţie pe care le-am scris la începutul acestui paragraf, obţinem:

$$\sin\psi\cdot\frac{dn}{dq} + n\cos\psi\cdot\frac{d\psi}{dq} + \sin\psi\cdot\frac{d\psi}{dp} = 0.$$

ecuaţie care, combinată cu aceasta:

$$n\cos\psi\cdot\frac{d\varphi}{dq} + \sin\psi\cdot\frac{d\varphi}{dp} = 0,$$

ne va da:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot dndq + \frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{d(\psi+\varphi)}{dp} + r\cos\psi\cdot\frac{d(\psi+\varphi)}{dp} = 0.$$

Din această ecuaţie vom scoate uşor, prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi, o serie pentru $\psi + \varphi$. Aceasta, al cărei prim termen trebuie să fie $\frac{1}{2}\pi$ (raza fiind considerată unitatea şi 2π fiind circumferinţa cercului) va fi:

$$\begin{aligned}\psi + \varphi = \frac{1}{2}\pi - f^0 pq - \frac{2}{3} f' p^2 q - \left(\frac{1}{2} f'' - \frac{1}{6} f^{0\,2}\right) p^3 q - \dots \\ - g^0 pq^2 - \frac{3}{4} g' p^2 q^2 \\ - \left(h^0 - \frac{1}{3} f^{0\,2}\right) pq^3.\end{aligned} \tag{22}$$

Ni se pare util să dezvoltăm în serie şi aria triunghiului ABD. Pentru această dezvoltare, ne vom servi de ecuaţia următoare care se deduce din condiţii geometrice uşor de descoperit şi în care S este aria căutată:

$$\frac{r \sin \psi}{n} \cdot \frac{dS}{dp} + r \cos \psi \cdot \frac{dS}{dq} = \frac{r \sin \psi}{n} \int n dq,$$

integrarea avînd drept punct de plecare valoarea $q = 0$. Şi de aici obţinem, prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi:

$$\begin{aligned}S = \frac{1}{2} pq - \frac{1}{12} f^0 p^2 q - \frac{1}{20} f' p^4 q - \left(\frac{1}{30} f'' - \frac{1}{60} f^{0\,2}\right) p^5 q - \dots \\ - \frac{1}{12} f^0 pq^3 - \frac{3}{40} g^0 p^3 q^2 - \frac{1}{20} g' p^4 q^2 \\ - \frac{7}{120} f' p^2 q^3 - \left(\frac{1}{15} h^0 + \frac{2}{45} f' + \frac{1}{60} f^{0\,2}\right) p^3 q^5 \\ - \frac{1}{10} g^0 pq^4 - \frac{3}{40} g' p^2 q^4 \\ - \left(\frac{1}{10} h^0 - \frac{1}{30} f^{0\,2}\right) pq^5.\end{aligned} \tag{23}$$

XXV.

De la formulele paragrafului precedent care se raportau la un triunghi dreptunghic format de linii geodezice, ne vom ridica la formule cît se poate de generale. Fie C un alt punct pe linia geodezică DB pentru care, p rămînînd acelaşi, caracterele q', r', φ', ψ', S' vor desemna aceleaşi lucruri ca şi q, r, φ, ψ, S pentru punctul B. Obţinem astfel un triunghi ABC ale cărui unghiuri le reprezentăm prin A, B, C, laturile opuse acestor unghiuri prin a, b, c, iar aria o notăm σ. Vom exprima prin α, β, γ măsura curburii în punctele A, B, C. De altfel, presupunînd (ceea ce ne este permis) cantităţile p, q, $q - q'$ pozitive, avem:

$$\begin{aligned}&A = \varphi - \varphi', \qquad B = \psi, \qquad C = \pi - \psi', \\ &a = q - q', \qquad b = r', \qquad c = r, \quad \sigma = S - S'.\end{aligned}$$

Înainte de toate, vom dezvolta σ în serie. Schimbînd, în formula (23), fiecare dintre cantităţile care se referă la B, cu cele care se referă la C, obţinem S şi, de aici, ducînd calculul pînă la cantităţile de ordinul al şaselea,

$$\sigma = \frac{1}{2}p(q-q')\left\{1 - \frac{1}{6}f^0(p^2+q^2+qq'+q'^2)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{60}f'p(6p^2+7q^2+7qq'+7q'^2) - \frac{1}{20}g^0(q+q')(3p^2+4q^2+4qq'+4q'^2)\right\}$$

Cu ajutorul seriei (18), anume:

$$c\sin B = p(1 - \frac{1}{3}f^0q^2 - \frac{1}{4}f'pq^2 - \frac{1}{2}g^0q^3 - ...),$$

formula anterioară devine

$$\sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\left\{1 - \frac{1}{6}f^0(p^2-q^2+qq'+q'^2) - \frac{1}{60}f'p(6p^2-8q^2+7qq'+7q'^2)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{20}g^0(3p^2q+3p^2q'-6q^3+4q^2q'+4qq'^2+4q'^3)\right\}$$

Pentru un punct oarecare al suprafeţei, măsura curburii este (conform paragrafului al XIX-lea, în care m, n, p aveau, respectiv, semnificaţiile pe care le atribuim acum lui n, q, p):

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{d^2n}{dq^2} = -\frac{2f+6gq+12hq^2+...}{1+fq^2+...} = -2f - 6gq - (12h-2f^2)q^2...$$

De unde rezultă că, dacă p şi q se referă la punctul B, avem:

$$\beta = -2f^0 - 2f'p - 6g^0q - 2f''p^2 - 6g'pq - (12h^0 - 2f^{02})q^2 - ...$$

şi, la fel, pentru punctele C şi A,

$$\gamma = -2f^0 - 2f'p - 6g^0q' - 2f''p^2 - 6g'pq' - (12h^0 - 2f^{02})q'^2 - ...$$
$$\alpha = -2f^0.$$

Introducem aceste cantităţi în seria care îl dă pe σ şi obţinem următoarea expresie care e riguros exactă pînă la cantităţile de ordinul al şaselea (exclusiv):

$$\sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\left\{1 + \frac{1}{120}\alpha(4p^2-2q^2+3qq'+3q'^2)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{120}\beta(3p^2-6q^2+6qq'+3q'^2) + \frac{1}{120}\beta(3p^2-2q^2+qq'+4q'^2)\right\}.$$

Putem, fără a ieşi din aceleaşi limite de aproximaţie, să înlocuim p, q şi q' respectiv cu $c\sin B$, $c\cos B$, $c\cos B - a$ şi să găsim astfel:

$$(24)\quad \sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\left\{1 + \frac{1}{120}\alpha(3a^1+4c^2-9ac\cos B)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{120}\beta(3a^2+3c^2-12ac\cos B) + \frac{1}{120}\gamma(4a^2+3c^2-9ac\cos B)\right\}.$$

Şi cum tot ce se referă la linia AD, perpendiculară pe BC, a dispărut din această formulă, putem permuta punctele A, B, C pentru a obţine, în aceleaşi limite de aproximaţie,

$$(25)\quad \sigma = \frac{1}{2}bc\sin A\left\{1+\frac{1}{120}\alpha(3b^1+3c^2-12bc\cos A)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{120}\beta(3b^2+4c^2-9bc\cos A)+\frac{1}{120}\gamma(4b^2+3c^2-9bc\cos A)\right\}.$$

$$(26)\quad \sigma = \frac{1}{2}ab\sin C\left\{1+\frac{1}{120}\alpha(3a^1+4b^2-9ab\cos C)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{120}\beta(4a^2+3b^2-9ab\cos C)+\frac{1}{120}\gamma(3a^2+3b^2-12ab\cos C)\right\}.$$

XXVI.

E util să introducem aici discuţia triunghiului plan rectiliniu ale cărui laturi sînt a, b, c. Unghiurile acestui triunghi, pe care le vom desemna A^*, B^*, C^*, diferă de unghiurile triunghiului pe suprafaţa curbă, adică de A, B, C, prin cantităţi de ordinul al doilea şi nu e lipsit de interes să dezvoltăm cu grijă aceste diferenţe. Ne vom mărgini în cele ce urmează să punem bazele calculelor la care sîntem conduşi, calcule mai curînd prolixe decît dificile.

Schimbînd în formulele (17), (20) şi (21) cantităţile care se referă la B cu cele care se referă la C, vom găsi formulele care ne dau $r^{'2}$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Atunci dezvoltarea expresiei

$$r^2+r'^2-(q-q')^2-2r\cos\varphi\cdot r'\cos\varphi'-2r\sin\varphi\cdot r'\sin\varphi'$$

care este egală cu

$$b^2+c^2-a^2-2bc(\cos A^*-\cos A),$$

combinată cu dezvoltarea expresiei

$$r\sin\varphi\cdot r'\cos\varphi'-r\cos\varphi\cdot r'\sin\varphi'$$

care este egală cu $bc\sin A$, furnizează următoarea formulă:

$$\cos A^*-\cos A = -(q-q')p\sin A\left\{\frac{1}{3}f^0+\frac{1}{6}f'p+\frac{1}{4}g^0(q+q')\right.$$
$$\left.+\ (\frac{1}{10}f''-\frac{1}{45}f^{0^2})p^2+\frac{3}{20}g'p(q+q')+(\frac{1}{5}h^0-\frac{1}{90}f^{0^2})(q^2+qq'+q'^2)+\ldots\right\}.$$

De unde scoatem, pînnă la cantităţile de ordinul al cincilea,

$$A^*-A=-(q-q')p\left\{\frac{1}{3}f^0+\frac{1}{6}f'p+\frac{1}{4}g^0(q+q')+\frac{1}{10}f''p^2\right.$$
$$\left.+\frac{3}{20}g'p(q+q')+\frac{1}{5}h^0(q^2+qq'+q'^2)-\frac{1}{90}f^{0^2}(7p^2+7q^2+12qq'+7q'^2)\right\}.$$

Combinînd această formulă cu următoarea:

$$2\sigma = ap\left[1-\frac{1}{6}f^0(p^2+q^2+qq'+q'^2-\ldots)\right]$$

şi cu valorile cantităţior α, β, γ gă site în paragraful precedent, obţinem, pînnă la cantităţi de ordinul al cincilea,

$$
\begin{aligned}
A^* = A - \sigma \Big\{ &\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{2}{15}f''p^2 + \frac{1}{5}g'p(p+q') \\
&+ \frac{1}{5}h^0(3q^2 - 2qq' + 3q'^2) + \frac{1}{90}f^{0^2}(4p^2 - 11q^2 + 14qq' - 11q'^2) \Big\}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

În urma unor operaţiuni asemănătoare, vom găsi:

$$
\begin{aligned}
B^* = B - \sigma \Big\{ &\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{1}{10}f''p^2 + \frac{1}{10}g'p(2q+q') + \\
&+ \frac{1}{5}h^0(4q^2 - 4qq' + 3q'^2) - \frac{1}{90}f^{0^2}(2p^2 + 8q^2 - 8qq' + 11q'^2) \Big\},
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
C^* = C - \sigma \Big\{ &\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{10}f''p^2 \frac{1}{10}g'p(2q+q') + \\
&+ \frac{1}{5}h^0(3q^2 - 4qq' + 4q'^2) - \frac{1}{90}f^{0^2}(2p^2 + 11q^2 - 8qq' + 8q'^2) \Big\}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Punînd laolaltă aceste rezultate şi observînd că suma $A^* + B^* + C^*$ este egală cu două unghiuri drepte, conchidem că excesul sumei $A+B+C$ faţă de două unghiuri drepte este:

$$
\begin{aligned}
A + B + C = \pi + \sigma \Big\{ &\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3}f''p^2 + \frac{1}{2}g'p(q+q') + \\
&+ (2h^0 - \frac{1}{3}f^{0^2})(q^2 - qq' - q'^2) \Big\}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

De altfel, am fi putut deduce această ecuaţie şi din formula (22).

XXVII.

Dacă suprafaţa curbă este o sferă de rază R, vom avea

$$\alpha = \beta = \gamma = -2f^0 = \frac{1}{R^2}, f'' = 0, g' = 0, gh^0 - f^{0^2} = 0,$$

de unde

$$h^0 = \frac{1}{24R^2}.$$

În consecinţă, formula (30) devine

$$A + B + C = \pi + \frac{sigma}{R^2}$$

care se bucură de o exactitate absolută. Pe de altă parte, formulele (27), (28), (29) ne dau:

$$
\begin{aligned}
A^* &= A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(2p^2 - q^2 + 4qq' - q'^2), \\
B^* &= B - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(p^2 - 2q^2 + 2qq' + q'^2), \\
C^* &= C - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(p^2 + q^2 + 2qq' - 2q'^2);
\end{aligned}
$$

sau, între aceleaşi limite de aproximaţie,

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(b^2 + c^2 - 2a^a),$$
$$B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2 + c^2 - 2b^2),$$
$$C^* = C - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2 + b^2 - 2c^2).$$

Neglijînd în aceste formule cantităţile de ordinul al patrulea, obţinem imediat binecunoscuta teoremă datorată ilustrului Legendre.

XXVIII.

Formulele noastre generale devin extrem de simple cînd renunţăm la termenii de ordinul al patrulea, anume:

$$A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma),$$
$$B^* = B - \frac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma),$$
$$C^* = C - \frac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma).$$

Astfel, pe o suprafaţă nesferică, unghiurile A, B, C trebuie să sufere reduceri inegale pentru ca sinusurile lor să devină proporţionale cu laturile opuse. Inegalitatea, vorbind în general, va fi de ordinul al treilea. Dar dacă suprafaţa diferă puţin de una sferică, atunci inegalitatea atinge un ordin mai ridicat: pe suprafaţa pămîntului, chiar în triunghiurile cele mai întinse cărora le putem măsura unghiurile, putem considera diferenţa ca fiind insensibilă. De exemplu, în cel mai mare triunghi pe care am avut ocazia să-l măsurăm acum cînţiva ani, cel cuprins între punctele Hohehagen, Brocken, Inselsberg, pentru care excesul sumei unghiurilor s-a găsit a fi de $14'', 85348$, calculul n-a dat, pentru reducerile aplicabile fiecărui unghi:

Hohehagen................ $-\,4'', 95113$,

Brocken.................. $-\,4'', 95104$,

Inselsberg................ $-\,4'', 95131$.

XXIX.

În încheierea acestor cercetări, vom adăuga şi compararea ariei unui triunghi pe o suprafaţă curbă cu aria unui triunghi rectiliniu avînd laturile a, b, c. Vom desemna aria acestui triunghi rectiliniu cu σ^*. Aceasta va fi:

$$\sigma^* = \frac{1}{2}bc\sin A^* = \frac{1}{2}ac\sin B^* = \frac{1}{2}\sin C^*.$$

Avem, pînnă la cantităţi de al patrulea ordin,

$$\sin A^* = \sin A - \frac{1}{12}\sigma\cos A\cdot(2\alpha + \beta + \gamma),$$

sau, între aceleaşi limite de aproximaţie,

$$\sin A = \sin A^*\left[1 + \frac{1}{24}bc\cos A\cdot(2\alpha + \beta + \gamma)\right].$$

Înlocuind această valoare în formula (25) vom avea, pînă la cantităţi de ordinul al şaselea,

$$\sigma = \frac{1}{2} bc \sin A^* \left\{ 1 + \frac{1}{120}\alpha(3b^2 + 3c^2 - 2bc\cos A) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{120}\beta(3b^2 + 4c^2 - 4bc\cos A) + \frac{1}{120}\gamma(4b^2 + 3c^2 - 4bc\cos A) \right\},$$

sau, cu aceeaşi aproximaţie

$$\sigma = \sigma^* \left\{ 1 + \frac{\alpha}{120}(a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \frac{\beta}{120}(2a^2 + b^2 + 2c^2) + \frac{\gamma}{120}(2a^2 + 2b^2 + c^2) \right\}.$$

Pentru o suprafaţă sferică, această ecuaţie capătă forma:

$$\sigma = \sigma^* \left[1 + \frac{1}{24}\alpha(a^2 + b^2 + c^2) \right].$$

În locul acestei formule şi între aceleaşi limite de aproximaţie, o putem, de asemenea, adopta pe următoarea:

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A^* \cdot \sin B^* \cdot \sin C^*}}.$$

Dacă se aplică aceste formule unor triunghiuri trasate pe o suprafaţă curbă nesferică, eroarea va fi, în general vorbind, de ordinul al cincilea şi absolut nesesizabilă în toate triunghiurile pe care e posibil să le măsurăm pe suprafaţa pămîntului.