

Raport științific

1 Descrierea științifică

Contractul de finanțare nr. 30/2021 a avut în etapa 2022 următoarele obiective:

- O1. Investigarea deformărilor structurilor Vaisman care păstrează foliația;
- O2. Degenerarea varietăților Kato (numite și varietăți GSS - "global spherical shells") și obținerea unor noi exemple de varietăți LCK;
- O3. Studiul structurilor LCK pe spații analitice singulare și clasificarea analitică a varietăților de dimensiune complexă 3.

Pentru îndeplinirea obiectivelor O1-O3, au fost elaborate în această etapă 17 articole științifice, 8 dintre acestea publicate acceptate spre publicare în reviste cotate ISI, un articol a apărut într-un volum special al colecției „*Contemporary Mathematics*” publicată de către AMS, iar 8 articole au fost trimise spre evaluare pentru o posibilă publicare. De asemenea, două articole elaborate și trimise spre evaluare în etapa 2021 au fost publicate sau acceptate pentru publicare în reviste cotate ISI, după cum urmează:

- Lucrarea [T. Albu, S. Dăscălescu, *Free objects and coproducts in categories of posets and lattices*] a fost publicată în **Communications in Algebra** 50 (2022), 3178-3187.
- Lucrarea [O. Preda, M. Stanciu, *Vaisman theorem for LCK spaces*] a fost acceptată pentru publicare în revista **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa**.

Rezultatele celor 17 articole realizate în 2022, ce acoperă în proporție de 100% obiectivele propuse pentru această etapă, vor fi prezentate în continuare.

A1. L. Ornea, V. Slesar: *Deformations of Vaisman manifolds*, **Differential Geometry and its Applications** 85 (2022), 101940.

În acest articol construim o deformare a structurii Vaisman într-o manieră care nu afectează foliația canonică, deformarea referindu-se doar la complementul transvers și geometria transversă Kähler. Acest tip de deformare este legată de deformările de tip II ale varietăților Sasaki, definite de către Belgun. Pentru construcția noastră avem nevoie de o 1-formă bazică cu anumite proprietăți naturale și indicăm o modalitate de a obține astfel de 1-forme. Această procedură nu acoperă tot spațiul deformărilor,

totuși oferă posibilitatea obținerii de noi structuri Vaisman pornind de la unele date. Lucrarea se încheie cu ilustrarea metodei într-o manieră exhaustivă pentru o suprafață Hopf clasică.

A2. L. Ornea, M. Verbitsky, *Lee classes on LCK manifolds with potential*], **Tohoku Mathematical Journal** (2022), acceptat.

O varietate LCK e o varietate complexă (M, I) cu o formă Hermitiană ω și o 1-formă θ (forma Lee) astfel încât $d\omega = \theta \wedge \omega$. O varietate LCK cu potențial e o varietate LCK având un potențial Kähler global pozitiv pe acoperirea universală, acționat prin omotetii de grupul deck al acoperirii. Determinăm mulțimea claselor Lee posibile pe o varietate LCK care admite o structură LCK cu potențial, arătând că e vorba despre un semispațiu deschis în $H^1(M, \mathbb{R})$. Pentru varietăți Vaisman, rezultatul era deja cunoscut de Tsukada (1994); dăm și o nouă demonstrație acestui rezultat.

A3. L. Ornea, M. Verbitsky, *Algebraic cones of LCK manifolds with potential*, arXiv:2208.05833.

O varietate complexă X se zice „LCK cu potențial” dacă se poate realiza ca subvarietate complexă a unei varietăți Hopf. Fie \tilde{X} acoperirea sa cu grup deck egal cu \mathbb{Z} , considerată ca subvarietate complexă în $\mathbb{C}^n \setminus 0$. Demonstrăm că \tilde{X} e algebrică. Numim varietățile obținute în acest fel **conuri algebrice** și arătăm că structura algebrică a lui \tilde{X} e independentă de alegerea lui X . Dăm mai multe definiții intrinsece pentru un con algebric și demonstrăm echivalența lor.

A4. L. Ornea, M. Verbitsky, *A Calabi-Yau theorem for Vaisman manifolds*, arXiv:2206.08808.

O varietate hermitiană (M, I, ω) se zice Vaisman dacă $d\omega = \omega \wedge \theta$ și 1-forma θ , numită forma Lee, e paralelă față de conexiunea Levi-Civita. Forma volum a lui M e invariantă la acțiunea câmpurilor X dual forme Lee (numit câmp Lee) și IX (numit anti-Lee). Clasa de coomologie $[\theta]$ (clasa Lee) joacă aici același rol ca și clasa Kähler în geometria Kähleriană. Arătăm că o metrică Vaisman e unic determinată de forma volum și de clasa Lee. Reciproc, pentru fiecare clasă Lee $[\theta]$ și fiecare formă volum V care e Lee și anti-Lee invariantă, există o structură Vaisman cu forma volum V și clasă Lee $c[\theta]$. Acesta este un analog al teoremei Calabi-Yau care afirmă că o formă Kähler e unic determinată de forma sa volum și de clasa de coomologie.

A5. L. Ornea, M. Verbitsky, *Mall bundles and flat connections on Hopf manifolds*, arXiv:2205.14062.

Un fibrat Mall pe o varietate Hopf $H = \frac{\mathbb{C}^n \setminus 0}{\mathbb{Z}}$ e un fibrat olomorf al cărui pullback la $\mathbb{C}^n \setminus 0$ e trivial. Definim fibratele Mall rezonante și nerezonante, generalizând astfel noțiunea de rezonanță din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, și demonstrăm că un fibrat mall nerezonant admite întotdeauna o conexiune olomorfă plată. Folosim această observație pentru a demonstra o versiune a teoremei Poincaré-Dulac de liniarizare, arătând că orice contracție olomorfă, inversabilă și nerezonantă pe \mathbb{C}^n e liniară într-un sistem convenabil de coordonate olomorfe. Definim noțiunea de rezonanță pe varietăți Hopf și arătăm că toate varietățile Hopf nerezonante sînt liniare (rezultat obținut anterior de Kodaira folosind teorema Poincaré-Dulac).

A6. L. Ornea, M. Verbitsky, *Non-linear Hopf manifolds are locally conformally Kaehler*, arXiv:2202.12398.

O varietate Hopf e un cît al lui $\mathbb{C}^n \setminus 0$ prin grupul ciclic generat de o contracție olomorfă. Varietățile Hopf sînt difeomorfe cu $S^1 \times S^{2n-1}$, deci nu admit metrici Kähler. Se știe că varietățile Hopf definite de contracții liniare (zise varietăți Hopf liniare) admit metrici local conform Kähler (LCK). În acest articol demonstrăm că varietățile Hopf definite de contracții olomorfe neliniare admit scufundări complexe în varietăți Hopf liniare și, mai mult, admit metrici LCK.

A7. L. Ornea, M. Verbitsky, V. Vuletescu, *Do products of compact complex manifolds admit LCK metrics?*, arXiv:2211.08111.

O varietate LCK e o varietate hermitiană care admite o acoperire Kähler cu grupul deck acționînd prin omotetii olomorfe față de metrica Kähler. Produsul a două varietăți LCK nu are o structură LCK produs naturală. O conjectură afirmă că produsul a două varietăți complexe compacte nu admite metrică LCK. Clasificăm toate exemplele cunoscute de varietăți LCK compacte în trei clase disjuncte: LCK cu potențial, varietăți Oeljeklaus-Toma și cele care conțin curbe raționale. În acest articol arătăm că produsul dintre o varietate LCK arbitrară și o varietate LCK din oricare dintre cele trei clase de mai sus nu admite structură LCK.

A8. D. Angella, A. Dubickas, A. Otiman, J. Stelzig, *On metric and cohomological properties of Oeljeklaus-Toma manifolds*, **Publicacions Matemàtiques** (2022), acceptat.

În acest articol studiem proprietățile metriche și coomologice ale varietăților Oeljeklaus-Toma. În particular, descriem structura complexului dublu de forme diferențiale și coomologia Bott-Chern și caracterizăm existența metricilor pluri-închise (cunoscute și sub denumirea de metrici SKT) în termeni coomologici și aritmetici. Mai mult, arătăm că nu există metrici Hermitiene ω care satisfac relația $\partial\bar{\partial}\omega^k = 0$ pentru $2 \leq k \leq n - 2$ și dăm formule explicite pentru coomologia Dolbeault a varietăților Oeljeklaus-Toma ce admit metrici pluri-închise.

A9. N. Istrati, A. Otiman, *Bott-Chern cohomology of compact Vaisman manifolds*, **Transactions of the American Mathematical Society** (2022), acceptat.

În acest articol dăm o descriere explicită a grupurilor de coomologie Bott-Chern ale unei varietăți Vaisman compacte în termeni de coomologie bazică și arătăm că numerele Bott-Chern și numerele Dolbeault se deduc unele pe altele. Mai mult, arătăm că invarianții coomologici Δ^k introduși de Angella-Tomassini sunt nemărginiți pentru varietăți Vaisman compacte. La final, dăm o caracterizare coomologică a formalității Bott-Chern și Dolbeault a metricilor Vaisman.

A10. M.A. Aprodu, *Pseudo V-harmonic morphisms*, preprint 2022.

O extindere naturală a noțiunii de minimalitate este cea de subvarietate V -minimală, unde V este un câmp vectorial definit pe o varietate Riemann. Ea apare în contextul în care aplicațiile armonice au fost generalizate de către Chen, Jost și Wang la aplicații V -armonice iar morfismele armonice la V -morfisme armonice (Zhao). Pentru a sublinia

utilitatea noii noțiuni, am demonstrat că submersiile PHH sunt V -armonice dacă și numai dacă au fibre minimale și o aplicație V -armonică și PHH întoarce subvarietăți complexe în subvarietăți V -minimale.

A11. S. Deaconu, V. Vuletescu, *On locally conformally Kähler metrics on Oeljeklaus-Toma manifolds*, **Manuscripta Mathematica** (2022), acceptat.
<https://doi.org/10.1007/s00229-022-01403-0>

În acest articol, arătăm că varietățile Oeljeklaus-Toma $X(K, U)$ unde K este un copr de numere de semnătură (s, t) cu $s \geq 1, t \geq 2$ și $s \geq 2t$ nu admit metrici local conforme Kähler (LCK). Combinând acest rezultat cu precedentele datorate lui Oeljeklaus-Toma [An. Inst. Fourier 2005] și A. Dubickas [New York J. Math. 2014], rezultatul obținut rezolvă complet problema existenței metricilor LCK pe varietăți Oeljeklaus-Toma.

A12. V. Slesar, G.-E. Vîlcu, *Vaisman manifolds and transversally Kähler-Einstein metrics*, arXiv:2205.02120v2.

În acest articol folosim fluxul transvers Kähler-Ricci în raport cu foliația canonică a unei varietăți Vaisman închise pentru a deforma metrica într-o altă metrică Vaisman cu o structură Kähler -Einstein transversă. De asemenea studiem principalele caracteristici ale unei astfel de varietăți. Printre alte rezultate, utilizând tehnici din teoria ecuațiilor parabolice, obținem o demonstrație directă pentru existența pe termen scurt a soluției fluxului Kähler-Ricci transvers pe varietăți Vaisman, reconstituind într-un caz particular un rezultat al lui Bedulli, He and Vezzoni [J. Geom. Anal. 28, 697–725 (2018)], dar fără să folosim teorema de structură a lui Molino. Mai mult, investigăm structurile Einstein-Weyl în cadrul varietăților Einstein și găsim relații între acestea și metricile quasi-Einstein. Câteva exemple sunt oferite pentru a ilustra rezultatele principale.

A13. B.-Y. Chen, A.D. Vîlcu, G.-E. Vîlcu, *Classification of graph surfaces induced by weighted-homogeneous functions exhibiting vanishing Gaussian curvature*, **Mediterranean Journal of Mathematics**, 19 (2022), Article number: 162.

Suprafețele de curbură Gauss nulă, cunoscute sub numele de suprafețe desfășurabile, sunt obiecte de mare interes în geometria diferențială clasică. Dacă aceste suprafețe sunt definite explicit în forma funcțională $z = f(x, y)$, atunci f reprezintă o soluție a ecuației Monge-Ampère omogene. În acest articol clasificăm suprafețele desfășurabile definite ca grafice de funcții quasi-omogene și aplicăm rezultatul în analiza economică, unde condiția de quasi-omogenitate are o importanță deosebită.

A14. S. Deshmukh, H. Al-Sodais, G.-E. Vîlcu, *A note on some remarkable differential equations on a Riemannian manifold*, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 519(1) (2023), 126778.

Conjectura Fischer-Marsden afirmă că o varietate compactă n -dimensională ce admite o soluție a așa-numitei ecuații diferențiale Fischer-Marsden este în mod necesar un spațiu Einstein. Dacă această conjectură ar fi adevărată, atunci o teoremă clasică a lui Obata ar implica faptul că varietatea este fie o sferă standard, fie un spațiu Ricci plat. Deși contraexemple la această conjectură au fost obținute de Kobayashi și Lafontaine, s-a demonstrat recent de către Cernea și Guan că această conjectură este validă

dacă spațiul soluțiilor neconstante ale ecuației Fischer-Marsden este de dimensiune cel puțin n , autorii demonstrând că în acest caz varietatea nu este altceva decât o sferă standard. În acest articol arătăm că orice varietate Riemann compactă de curbură Ricci pozitivă ce admite un câmp vectorial concircular netrivial cu funcția potențial satisfăcând ecuația Fischer-Marsden, este izometrică cu o sferă standard, iar reciproca este de asemenea adevărată. În plus, demonstrăm că existența unei soluții pentru o altă ecuație diferențiabilă pe varietăți Riemann, și anume ecuația Schrödinger staționară, de asemenea conduce la o caracterizare a sferei standard, dacă sunt satisfăcute unele condiții de pinching.

A15. S.K. Chaubey, G.-E. Vilcu, *Gradient Ricci solitons and Fischer–Marsden equation on cosymplectic manifolds*, **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemática**, 116 (2022), Article number: 186.

În această lucrare investigăm existența soluțiilor netriviale pentru ecuația Fischer-Marsden pe varietăți cosimplete. Arătăm că existența unei astfel de soluții forțează metrica să fie un soliton η -Ricci gradient. De asemenea, obținem o serie de proprietăți geometrice ale solitonilor Ricci pe varietăți cosimplete η -Einstein și prezentăm câteva exemple ilustrative în acest context.

A16. J.W. Lee, C.W. Lee, B. Şahin, G.-E. Vilcu, *Chen-Ricci inequalities for Riemannian maps and their applications*, in: *Differential Geometry and Global Analysis: In Honor of Tadashi Nagano*, Editors: B.-Y. Chen et al., **Contemporary Mathematics**, AMS, vol. 777, 2022, 137–152.

Aplicațiile Riemanniene între varietăți cu metrici Riemann, introduse de către A.E. Fischer în [Contemp. Math. 132 (1992), 331–366], furnizează un excelent instrument pentru a compara structurile geometrice ale spațiilor sursă și țintă ale acestor aplicații. Imersiile izometrice și submersiile Riemann sunt exemple particulare de aplicații Riemanniene. În această lucrare, demonstrăm mai întâi o inegalitate geometrică pentru aplicațiile Riemanniene având spațiul țintă o formă spațială reală. Aplicând rezultatul în cazul particular al subvarietăților Riemann, recuperăm un rezultat clasic [B.-Y. Chen, Glasgow Math. J. 41 (1999), 33–41] cunoscut sub numele de inegalitatea Chen-Ricci. În continuare extindem acest rezultat pentru spațiul țintă o formă spațială complexă, obținând o inegalitate geometrică ce îmbunătățește un rezultat din [B.-Y. Chen, Arch. Math. (Basel) 74 (2000), 154–160].

A17. C. Gherghe, G.-E. Vilcu, *Harmonic maps on locally conformal almost cosymplectic manifolds*, preprint 2022.

Investigăm aplicațiile armonice între varietăți aproape de contact metrice care sunt local conforme cu varietăți aproape cosimplete. Obținem condițiile necesare și suficiente pentru ca olomorfa unei astfel de aplicații să implice armonicitatea și găsim obstrucții la existența aplicațiilor pluriarmonice neconstante. Demonstrăm de asemenea unele rezultate privind stabilitatea aplicației identitate pe a varietate local conform aproape cosimptică de curbură secțională ϕ -olomorfă punctual constantă.

2 Sumarul progresului

Etapa 2022 s-a finalizat cu îndeplinirea integrală a obiectivelor asumate (O1-O3), realizându-se un număr de 17 articole științifice (A1-A17).

Diseminarea rezultatelor cercetării s-a realizat prin participarea cu expuneri invitate la conferințe internaționale și în seminarii departamentale, după cum urmează.

- Expuneri invitate la conferințe internaționale
 1. L. Ornea: *Lee classes of LCK manifolds with potential*, Recent advances in complex and symplectic geometry (Online), January 10-12, 2022, Parma.
 2. L. Ornea: *A Calabi-Yau theorem for Vaisman manifolds*, Kaehler and non-Kaehler geometry: New developments and interactions. June 21-23, 2022, Aarhus.
 3. M. Stanciu: *Modifications of locally conformally Kähler spaces*, Workshop for Young Researchers in Geometry, May 19 – May 20, 2022, Bucharest.
 4. G.-E. Vilcu: *Killing forms on Sasaki-Einstein spaces and transverse Kähler-Ricci flow*, Workshop on Differential Geometry, Sungkyunkwan University, Suwon, South Korea, 8-9 August 2022.

- Expuneri invitate în seminarii departamentale
 1. L. Ornea: *Coni algebrici su varietà LCK con potenziale*, 1 decembrie 2022, Universitatea Roma 3, Italia.
 2. A. Otiman: *New constructions in non-Kähler toric geometry*, martie 2022, Universitatea Chalmers, Goteborg, Suedia.
 3. A. Otiman: *Cohomological and metric properties of Oeljeklaus Toma manifolds*, mai 2022, Paris Orsay, Franța.
 4. M. Stanciu: *Modifications of locally conformally Kähler spaces*, septembrie 2022, Aarhus University, Danemarca.
 5. V. Slesar: *Vaisman manifolds, transverse Kähler-Ricci flow and Einstein-Weyl structures*, Differential Geometry Seminar, University of Torino, 22.11.2021.

Din cele prezentate anterior, deducem următorii indicatori de rezultat:

- Articole publicate in reviste indexate ISI: 4
- Articole acceptate in reviste indexate ISI: 4
- Articole in evaluare in reviste indexate ISI: 8
- Expuneri la conferințe: 9
- Capitole de carte: 1

Mobilitățile decontate din bugetul etapei 2022 au fost:

1. L. Ornea: 03.03-09.03.2022, deplasare în Italia, la Universitatea Roma 3, la invitația prof. Massimiliano Pontecorvo, pentru colaborare științifică pe teme de interes comun din geometria local conform Kähler.
2. V. Marchidanu: 22.05.2022-13.06.2022, deplasare în Brazilia, la Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) Rio de Janeiro, la invitația prof. Misha Verbitsky, pentru colaborare științifică pe teme de interes comun din geometria local conform Kähler.
3. M. Stanciu: 26.08.2022-02.09.2022, deplasare în Danemarca, la Aarhus University, pentru participarea la seminarul de geometrie al Aarhus University cu o expunere invitată și colaborare științifică cu specialiștii în geometrie LCK din departament.
4. L. Ornea: 21.01.2023-05.02.2023, deplasare în Italia, la "Centro Internazionale per la Ricerca Matematica Trento", pentru cercetare în vederea îndeplinirii obiectivelor grantului și participarea ca main speaker la conferința "Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures - III". (S-au decontat biletele de avion, acestea fiind achiziționate în 2022.)
5. V. Vuletescu: 21.01.2023-28.01.2023, deplasare în Italia, la Trento, pentru participarea cu o expunere invitată la conferința "Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures - III". (S-au decontat biletele de avion, acestea fiind achiziționate în 2022.)

3 Rezumatul etapei

Contractul de finanțare nr. 30/2021 a avut drept scop în etapa 2022, intitulată *Structura varietăților și spațiilor LCK*, obținerea de noi proprietăți geometrice și topologice ale varietăților local conform Kähler, potrivit obiectivelor asumate.

Activitățile desfășurate au constat în:

- documentare și informare,
- analiză și concepere soluții de realizare,
- elaborare de articole științifice,
- participare la evenimente științifice pentru diseminarea rezultatelor obținute.

Toate activitățile s-au finalizat în proporție de 100% la termenul stabilit și conform bugetului alocat prin contract, iar obiectivele au fost realizate integral.

Au rezultat:

- Un număr de 17 articole științifice, ceea ce reprezintă mai mult decât cvadruplul numărului planificat de articole.
- Participarea cu 9 expuneri invitate la conferințe internaționale și seminarii departamentale.

Director proiect,

Prof. dr. Liviu Ornea