

Raport științific

1 Descrierea științifică

Contractul de finanțare nr. 30/2021 a avut în etapa 2023 următoarele obiective:

- O1. Investigarea produselor și submersiilor LCK;
- O2. Studiul structurilor LCK pe solvarietăți. Coexistența cu alte metrice speciale;
- O3. Probleme variaționale în geometria LCK.

Pentru îndeplinirea obiectivelor O1-O3, au fost elaborate în această etapă 9 articole științifice, 4 dintre acestea fiind publicate sau acceptate spre publicare în reviste cotate ISI, iar 5 articole au fost trimise spre evaluare pentru o posibilă publicare. De asemenea, 7 articole elaborate și trimise spre evaluare în etapele 2021 și 2022 au fost publicate sau acceptate pentru publicare în reviste cotate ISI, după cum urmează:

- Lucrarea [L. Ornea, M. Verbitsky, *Compact homogeneous locally conformally Kähler manifolds are Vaisman. A new proof*] - a fost publicată în **Rivista di Matematica dell'Università di Parma**, Volume 13 (2022) no. 2, 439-448.
- Lucrarea [D. Angella, M. Parton, V. Vuletescu, *On locally conformally Kähler threefolds with algebraic dimension two*] - a fost publicată în **International Mathematics Research Notices**, Volume 2023, Issue 5, March 2023, Pages 3948–3969.
- Lucrarea [V. Slesar, G.-E. Vîlcu, *Vaisman manifolds and transversally Kähler-Einstein metrics*] - a fost publicată în **Annali di Matematica Pura ed Applicata** 202 (2023), no. 4, 1855–1876.
- Lucrarea [L. Ornea, M. Verbitsky, V. Vuletescu, *Do products of compact complex manifolds admit LCK metrics?*] - a fost acceptată pentru publicare în revista **Bulletin of the London Mathematical Society**; <http://doi.org/10.1112/blms.12962>.
- Lucrarea [L. Ornea, M. Verbitsky, *Mall bundles and flat connections on Hopf manifolds*] - a fost acceptată pentru publicare în revista **Annales de l'Institut Fourier**.
- Lucrarea [L. Ornea, M. Verbitsky, *Non-linear Hopf manifolds are locally conformally Kähler*] - a fost acceptată pentru publicare în revista **Journal of Geometric Analysis**; doi:10.1007/s12220-023-01273-2.

- Lucrarea [C. Gherghe, G.-E. Vilcu, *Harmonic maps on locally conformal almost cosymplectic manifolds*] - a fost acceptată pentru publicare în revista **Communications in Contemporary Mathematics**; doi:10.1142/S0219199723500529.

Rezultatele celor 9 articole realizate în 2023, ce acoperă în proporție de 100% obiectivele propuse pentru această etapă, vor fi prezentate în continuare.

A1. L. Ornea, M. Verbitsky, *Bimeromorphic geometry of LCK manifolds*, **Proceedings Amer. Math. Soc.** (2023), acceptat.

Pentru o varietate LCK cu forma Kaehler exactă pe acoperirea minimală, demonstrăm că orice aplicație bimeromorfă $M \rightarrow M'$ e olomorfă; altfel spus, M are model minimal unic. Rezultatul se aplică unei clase largi de varietăți LCK, de exemplu varietăți Hopf și subvarietățile lor, precum și varietăți OT.

A2. N. Bin Turki, U.C. De, A.A. Syied, G.-E. Vilcu, *Investigation of space-times through W_2 -curvature tensor in $f(R, G)$ gravity*, **Journal of Geometry and Physics** 194 (2023), 104987.

Tensorul de curbura W_2 este un invariant geometric cu semnificație relativistă introdus în anii 70 de către Pokhariyal și Mishra, ce poate fi identificat în clasa 4 în clasificarea operatorilor anti-simetrice. În acest articol, sunt investigate spațiile-timp 4-dimensionale ce sunt W_2 -plate în teoria gravitațională modificată $f(R, G)$. Se demonstrează că presiunea izotropă și densitatea de energie a acestor spații sunt constante. De asemenea, se arată că în aceste spații-timp, condițiile de energie sunt consistente satisfăcute în condițiile curburii scalare pozitive.

A3. M. Aquib, M.S. Lone, C. Neacșu, G.-E. Vilcu, *On δ -Casorati curvature invariants of Lagrangian submanifolds in quaternionic Kähler manifolds of constant q-sectional curvature*, **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemática** 117 (2023), Article number: 107.

Subvarietățile Lagrange, o clasă de subvarietăți Riemanniene care au apărut în mod natural în contextul mecanicii hamiltoniene, joacă un rol important în unele teorii moderne ale fizicii. În această lucrare, folosind o tehnică de optimizare pe subvarietăți în varietăți Riemanniene, obținem mai întâi niște inegalități optimale pentru δ -invariantii de curbura Casorati ai subvarietăților Lagrange în forme spațiale cuaternionice, adică varietăți Kähler cuaternionice de curbura q-secțională constantă. Apoi arătăm că în clasa subvarietăților Lagrange în forme spațiale cuaternionice, există doar două subclase de subvarietăți ideale Casorati, și anume familia subvarietăților total geodezice și o subfamilie particulară de subvarietăți H-ombilicale. În final, oferim câteva exemple pentru a ilustra rezultatele obținute. În particular, arătăm că o întreagă familie de subvarietăți ideale Casorati poate fi construită folosind conceptul de extensor cuaternionic introdus de Oh și Kang la începutul anilor 2000.

A4. B.-Y. Chen, M.A. Lone, A.-D. Vilcu, G.-E. Vilcu, **Curvature properties of spacelike hypersurfaces in a RW spacetime**, *Journal of Geometry and Physics* 194 (2023), 105015.

Invarianții de curbură atât de natură intrinsecă cât și extrinsecă joacă un rol semnificativ în elucidarea geometriei unui spațiu-timp. În particular, acești invarianți sunt utili în detectarea orizontului de evenimente al găurilor negre. Exemple notabile de spații-timp sunt oferite de modelele generalizate Robertson-Walker (GRW). Un spațiu-timp GRW $(m + 1)$ -dimensional este un produs warped Lorentzian $I \times_f N$ dotat cu metrica $\hat{g} = -dt^2 + f^2(t)g$, având ca bază un interval real deschis I echipat cu metrica $-dt^2$ și ca fibră orice spațiu Riemann (N, g) de dimensiune m , unde f este o funcție continuă cu valori pozitive pe I . În acest articol, ne concentrăm studiul asupra spațiu-timpului GRW având fibra un spațiu Riemann cu metrica $g = g_k$ de curbură secțională constantă k și notat cu $L_1^{m+1}(k, f)$. Obținem în această lucrare limita inferioară a curburilor Casorati normalizate (generalizate) pentru o hipersuprafață spațială \mathcal{H} în spațiu-timpul GRW $L_1^{m+1}(k, f)$ în termeni de curbură scalară (normalizată) a lui \mathcal{H} , curbura secțională constantă k a fibrei, unghiul hiperbolic normal al hipersuprafeței și funcția de deformare f . De asemenea, deducem condițiile în care este atinsă această limită inferioară. În final, aplicăm rezultatele unor modele cosmologice de bază, și anume Lorentz-Minkowski, de Sitter, Einstein-de Sitter și anti de Sitter.

A5. M. Aprodu, *V-minimal submanifolds*, arXiv:2306.02104.

Introducem noțiunea de V -minimalitate, pentru V un câmp vectorial neted pe o varietate riemanniană. Aceasta este o extensie naturală a noțiunii de minimalitate, care se realizează pentru $V = 0$. Subvarietățile complexe într-o varietate local conformă Kähler sunt V -minimale, pentru V un multiplu întreg potrivit al câmpului vectorial Lee. Pentru a evidenția utilitatea acestei noțiuni, extindem unele rezultate anterioare. Mai precis, demonstrăm că o submersie PHH este V -armonică dacă și numai dacă are fibre minimale, iar preimaginea unei subvarietăți complexe printr-o submersie PHH V -armonică este o subvarietate V -minimală.

A6. S. Dăscălescu, *Finiteness conditions for Hopf superalgebras*, arXiv:2202.12398.

Teoria integralelor pentru algebre Hopf a fost inițiată de Larson și Sweedler în anii 1960 și continuată cu demonstrația lui Sullivan a unicității integralelor la începutul anilor 1970. Integralele s-au dovedit de mare folos în înțelegerea structurii algebrelor Hopf. Studiul lor a fost strâns legat de proprietățile de finitudine ale structurilor subiacente de coalgebră ale algebrelor Hopf. Pentru superalgebre Hopf, un studiu sistematic al integralelor a fost inițiat de Scheunert și Zhang în 2001, în relație cu integrarea pe supergrupuri Lie. Este firească întrebarea dacă existența integralelor este legată de proprietățile de finitudine ale superalgebrei Hopf. Răspundem la această întrebare în

Teorema A. *Fie A o superalgebră Hopf. Atunci următoarele sunt echivalente.*

- (i) *A are integrale stângi nenule.*
- (ii) *Coalgebra A este co-Frobenius la stânga.*
- (iii) *Coalgebra A este quasi-co-Frobenius la stânga.*
- (iv) *Coalgebra A este semiperfectă la stânga.*

Mai mult, aceste condiții sunt echivalente cu versiunile lor la dreapta.

O metodă standard în studiul superalgebrelor Hopf este reducerea la algebre Hopf obișnuite printr-un proces de bozonizare. Mai precis, dacă A este o superalgebră Hopf,

atunci există o acțiune și o coacțiune a algebrei Hopf grupale $k\mathbb{Z}_2$ pe A , iar produsul tensorial $A \otimes k\mathbb{Z}_2$ capătă o structură de algebră (produs smash) și una de coalgebră (coprodus smash), care sunt compatibile și o fac pe $A \otimes k\mathbb{Z}_2$ o algebră Hopf. Abordarea noastră pentru a demonstra teorema A folosește bozonizarea, prin urmare avem nevoie să înțelegem cum se transferă proprietățile de finitudine prin bozonizare. Demonstrăm de fapt un rezultat mult mai general, care este de interes independent.

Teorema B. *Fie C o comodul coalgebră peste o algebră Hopf finit dimensională H și fie $C \bowtie H$ coprodusul smash asociat. Au loc următoarele.*

- (1) $C \bowtie H$ este co-Frobenius la stânga dacă și numai dacă C este co-Frobenius la stânga.
- (2) $C \bowtie H$ este quasi-co-Frobenius la stânga dacă și numai dacă C este quasi-co-Frobenius la stânga.

A7. V. Marchidanu, *Complex structures on the product of two Sasakian manifolds*, arXiv:2307.04609.

O varietate Sasaki este o varietate Riemanniană al cărei con metric admite o structură Kähler compatibilă cu omotetiile. Demonstrăm că produsul a două varietăți Sasaki compacte admite o familie de structuri complexe indexată după un parametru complex non-real, astfel încât niciunul din membrii acestei familii nu admite nicio metrică local conform Kähler dacă ambele varietăți sunt de dimensiune mai mare ca 1. Comparăm această familie cu altă familie de structuri complexe ce a fost studiată în literatura de specialitate. Calculăm grupurile de coomologie Dolbeault ale produselor de două varietăți Sasaki înzestrate cu aceste metrici.

A8. O. Preda, M. Stanciu, *Locally conformally Kähler spaces and proper open morphisms*, arXiv:2311.14372.

În acest articol, demonstrăm un rezultat de stabilitate pentru geometria non-Kähler a spațiilor local conform Kähler (lcK) cu singularități. Concret, găsim condiții suficiente în care imaginea unui spațiu lcK printr-o aplicație olomorfă admite de asemenea metrici lcK, astfel extinzând un rezultat al lui Varouchas pentru spații Kähler.

A9. M.E. Aydin, R. Lopez, G.-E. Vîlcu, *Classification of separable hypersurfaces with constant sectional curvature*, arXiv:2309.06025.

În acest articol, obținem o clasificare completă a hipersuprafețelor separabile de curbura secțională constantă în spațiul euclidian n -dimensional, generalizând rezultatele obținute în dimensiune 3 mai întâi de către Gronwall [Ann. of Math. (2) 32, No. 2, 313-326 (1931)] într-un caz particular, apoi de către Hasanis și López [Manuscripta Math. 166, 403-417 (2021)] în cazul general.

2 Sumarul progresului

Etapa 2023 s-a finalizat cu îndeplinirea integrală a obiectivelor asumate (O1-O3), realizându-se un număr de 9 articole științifice (A1-A9).

Diseminarea rezultatelor cercetării s-a realizat prin participarea cu expuneri invitate la conferințe internaționale și seminarii departamentale, după cum urmează.

2.1 Expuneri invitate la conferințe internaționale

1. L. Ornea: Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures - III, January 23-27 2023, Trento.
2. L. Ornea: A Complex Differential Geometry Meeting, Torino, 17-19 May.
3. L. Ornea: Sasakian manifolds, Riemannian foliations, and related structures, June 26-29, Krakow.
4. L. Ornea: International Conference in Applied and Pure Mathematics, Iași, 9-13 November, 2023.
5. M. Stanciu: The Tenth Congress of Romanian Mathematicians, Pitești, June 30 - July 5, 2023.
6. V. Marchidanu: Workshop for Young Researchers in Mathematics 12th Edition, Alexandru Ioan Cuza University of Iași, May 18 – May 19, 2023.
7. V. Marchidanu: International Conference on Applied and Pure Mathematics (ICAPM2023), Iași, November 9-12, 2023.
8. G.-E. Vîlcu: International Conference ICES2023, 6-8 February 2023, King Saud University, Riyadh (Saudi Arabia).
9. G.-E. Vîlcu: The 4th International Workshop Differential Geometric Structures and Applications, May 11-13, 2023, Haifa University, Haifa.
10. G.-E. Vîlcu: The First Sharjah International Conference on Mathematical Sciences, Sharjah, 6-8 November 2023.
11. A. Otiman: The Tenth Congress of Romanian Mathematicians, Pitești, June 30 - July 5, 2023.

2.2 Expuneri invitate în seminarii departamentale

1. A. Otiman: *Cohomology and special metrics in complex geometry*, May 2023, Aarhus University.

Din cele prezentate anterior, deducem următorii indicatori de rezultat în anul 2023:

- Articole publicate în reviste indexate ISI: 3
- Articole acceptate în reviste indexate ISI: 1
- Articole în evaluare în reviste indexate ISI: 5
- Expuneri la conferințe internaționale și seminarii departamentale: 12

Mobilitățile decontate din bugetul etapei 2023 au fost:

1. L. Ornea: 11.05-21.05.2023, deplasare în Italia, la Universitatea Roma 3, pentru participarea cu o expunere invitată la conferința "A Complex Differential Geometry Meeting at UniTo".
2. M. Stanciu: 10.09-17.09.2023, deplasare în Danemarca, la Aarhus University, pentru colaborare științifică cu specialiștii în geometrie LCK din departament.
3. M. Stanciu: 30.06-05.07.2023, deplasare la Pitești pentru participarea cu o expunere la "Tenth Congress of Romanian Mathematicians".
4. V. Marchidanu: 14.01-07.03.2023, deplasare în Brazilia, la Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) Rio de Janeiro, la invitația prof. Misha Verbitsky, pentru colaborare științifică pe teme de interes comun din geometria local conform Kähler, precum și pentru participarea la cursul "Metric Geometry" susținut de Prof. Misha Verbitsky în cadrul școlii de vară.
5. V. Marchidanu: 08-12.11.2023, deplasare la Iași pentru participarea la "International Conference on Applied and Pure Mathematics (ICAPM2023)".
6. G.-E. Vilcu: 11.05-13.05.2023, deplasare în Israel, la Haifa, pentru participarea cu o expunere invitată la "The 4th International Workshop Differential Geometric Structures and Applications".
7. G.-E. Vilcu: 6.11-8.11.2023, deplasare în Emiratele Arabe Unite, la Sharjah, pentru participarea cu o expunere invitată la "The First Sharjah International Conference on Mathematical Sciences".
8. V. Slesar: 28.10-05.11.2023, deplasare în Spania, la Universitatea Santiago de Compostela, pentru colaborare științifică cu Prof. Jesus Alvarez Lopez pe teme de geometrie LCK.

3 Rezumatul etapei

Contractul de finanțare nr. 30/2021 a avut drept scop în etapa 2023, intitulată *Structuri LCK si înrudite pe varietăți complexe*, obținerea de noi proprietăți geometrice și topologice ale varietăților local conform Kähler, potrivit obiectivelor asumate.

Activitățile desfășurate au constat în:

- documentare și informare;
- analiză și concepere soluții de realizare;
- elaborare de articole științifice;
- participare la evenimente științifice pentru diseminarea rezultatelor obținute.

Toate activitățile s-au finalizat în proporție de 100% la termenul stabilit și conform bugetului alocat prin contract, iar obiectivele au fost realizate integral.

Au rezultat:

- Un număr de 9 articole științifice, ceea ce reprezintă triplul numărului planificat de articole.
- Participarea cu 12 expuneri invitate la conferințe internaționale și seminarii departamentale.

Director proiect,

Prof. dr. Liviu Ornea