O TRECERE ÎN REVISTĂ COMPARATIVĂ A CERCETĂRILOR RECENTE DIN GEOMETRIE.

(PROGRAM PENTRU A INTRA ÎN FACULTATEA ŞI SENATUL UNIVERSITĂŢII DIN ERLANGEN ÎN 1872.)

PROF. FELIX KLEIN

Printre progresele din ultimii cincizeci de ani în geometrie, locul întîi este ocupat de dezvoltarea *geometriei proiective*[1]. Deşi, la început, se părea că aşa–numitele relaţii metrice nu sînt accesibile acestei tratări, deoarece nu rămîn neschimbate prin proiecţie, recent am învăţat, totuşi, să le privim şi pe acestea din punct de vedere proiectiv, astfel că acum metoda proiectivă se aplică întregii geometrii. Dar atunci proprietăţile metrice nu mai trebuie privite ca fiind caracteristice figurilor geometrice *per se*, ci ca relaţii ale lor faţă de o configuraţie fundamentală, cercul imaginar de la infinit comun tuturor sferelor.

Cînd comparăm conceptul de figură geometrică obţinut treptat în acest mod cu noţiunile geometriei uzuale (elementare), sîntem conduşi să căutăm un principiu general conform căruia să fi fost posibilă dezvoltarea ambelor metode. Aceasta pare să fie problema cea mai importantă, deoarece, în afara geometriei elementare şi a celei proiective, există o serie de alte metode care, chiar dacă mai puţin dezvoltate, trebuie să beneficieze de acelaşi drept la existenţă individuală. Aşa sînt geometria razelor vectoriale reciproce, geometria transformărilor raţionale etc., care vor fi menţionate şi descrise în cele ce urmează.

Încercînd în paginile următoare să stabilim un astfel de principiu, nu vom dezvolta aproape deloc vreo idee în mod esenţial nouă, ci, mai degrabă, vom formula cu claritate ceea ce a fost deja conceput de mulţi alţii, mai mult sau mai puţin limpede. Ni s-a părut totuşi mai mult decît justificat să publicăm observaţii de acest fel, care stabilesc nişte legături, deoarece geometria, care este, la urma urmei, una singură în substanţa ei, a fost mult prea mult divizată în cursul rapidei ei dezvoltări într-o serie de teorii aproape distincte[2] care avansează independent una de cealaltă. În acelaşi timp, am fost influenţat tocmai de dorinţa de a prezenta anumite metode şi concepţii pe care *Lie* şi cu mine le-am dezvoltat în unele cercetări recente. Acele investigaţii ale noastre, oricît de diferite ar fi fost natura subiectelor tratate, au condus la aceeaşi concepţie generalizată pe care o prezentăm aici; astfel că devenise un fel de necesitate să discutăm cu toată atenţia această concepţie şi, pe această bază, să caracterizăm conţinutul şi scopul general al acelor investigaţii.

Programul de la Erlangen a fost publicat întîi la A. Deichert din Erlangen, cu o circulaţie foarte restrînsă, apoi, în traducerea italiană a lui Gino Fano, în Annali Matematica, ser. 2, vol. 17 şi, în traducere engleză în Bull. New York Math. Soc. 2, (1892–1893), 215–249.

[1]Vezi Nota I din Apendix.

[2]Vezi Nota II.

Deşi am vorbit pînă acum numai despre investigaţii geometrice, vom include şi investigaţii despre varietăţi cu orice număr de dimensiuni[3], care s-au dezvoltat din geometrie abstractizînd imaginea geometrică, ceea ce nu e esenţial pentru investigaţiile pur matematice[4]. În cercetarea varietăţilor, apar aceleaşi tipuri diferite ca şi în geometrie; şi, la fel ca în geometrie, problema este să desluşim ce e comun şi ce distinctiv în investigaţii întreprinse independent una de cealaltă. Vorbind în termeni abstracţi, va fi suficient, în cele ce urmează, să vorbim pur şi simplu despre varietăţi cu n dimensiuni; dar expunerea va fi simplificată şi mai inteligibilă dacă vom folosi percepţiile spaţiale, mai familiare. Pornind de la considerarea obiectelor geometrice şi dezvoltînd ideile generale folosind aceste obiecte drept exemple, urmăm chiar calea pe care a progresat ştiinţa noastră şi care e, în general, cea mai bună şi pentru a o prezenta.

Ar fi extrem de dificil să facem o prezentare preliminară a conţinutului paginilor care urmează, pentru că greu se poate imagina o prezentare mai concisă[5]; titlurile secţiunilor ne vor arăta cursul general al ideilor.

Am adăugat, la sfîrşit, o serie de note în care ori am dezvoltat mai în amănunt anumite puncte, ori de cîte ori expunerea generală din text părea să o ceară, ori am încercat să definesc, referindu-mă la chestiuni înrudite, chestiunile matematice abstracte care predomină în observaţiile din text.

1. Grupuri de transformări spaţiale. Grup principal. Formularea unei probleme generale.

Ideea esenţială în discuţia care urmează este aceea de *grup* de transformări spaţiale.

Combinarea unui număr oarecare de transformări ale spaţiului[6] e întotdeauna echivalenă cu o singură transformare. Acum, dacă un sistem dat de transformări are proprietatea că orice transformare obţinută prin combinarea oricăror transformări ale sistemului aparţine acelui sistem, el va fi numit *grup de transformări*[7].

Obţinem un exemplu de grup de transformări considerînd totalitatea mişcărilor, fiecare mişcare fiind privită ca o operaţie aplicată întregului spaţiu. Un grup conţinut în acest grup este format, de exemplu, de rotaţiile în jurul unui punct[8].

---

[3]Vezi Nota IV.

[4]Vezi Nota III.

[5]Tocmai această concizie a prezentării care urmează este un defect care mă tem că va face întelegerea ei mult mai dificilă. Dar dificultatea nu ar putea fi eliminată decît cu preţul unei expuneri mult mai complete, în care diferitele teorii separate, aici abia menţionate, ar fi fost dezvoltate pe larg.

[6]Privim întotdeauna totalitatea configuraţiilor din spaţiu ca fiind simultan afectate de transformări, astfel că vorbim despre *transformări ale spaţiului.* Transformările pot introduce şi alte elemente în locul punctelor, ca transformările dualistice, de exemplu; în privinţa aceasta, nu facem nici o distincţie în text.

[7]Această definiţie nu e chiar completă, pentru că s-a admis tacit că grupurile menţionate conţin întotdeauna inversa oricărei operaţii pe care o conţin; dar, cînd numărul de operaţii este infinit, aceasta nu e în nici un caz consecinţă a ideii de grup, şi această presupunere a noastră trebuie adăugată în mod explicit la definiţia acestei idei aşa cum apare în text. (Notă adăugată ulterior de F. Klein).

Ideea, ca şi notaţia, sînt luate din *teoria substituţiilor*, cu diferenţa că acolo, în loc de transformări ale unei regiuni continue, se consideră permutările unui număr finit de cantităţi discrete.

[8]*Camille Jordan* a format toate grupurile conţinute în grupul general al mişcărilor, [9].

Pe de altă parte, un grup care conţine grupul mişcărilor este format de totalitatea colineaţiilor. Dar totalitatea transformărilor dualistice nu formează un grup; deoarece combinarea a două transformări dualistice e echivalentă cu o colineaţie. Totuşi, se poate forma un grup adăugînd totalitatea transformărilor dualistice totalităţii transformărilor de colinearitate[9].

Acum, există transformări ale spaţiului prin care proprietăţile geometrice ale configuraţiilor spaţiale rămîn în întregime neschimbate. Asta deoarece proprietăţile geometrice sînt, prin chiar ideea lor, independente de poziţia ocupată în spaţiu de configuraţia în chestiune, de mărimea ei absolută şi de sensul[10] în care sînt aranjate părţile ei. Proprietăţile unei configuraţii rămîn neschimbate la orice fel de mişcări ale spaţiului, la transformări în configuraţii similare, la transformări în configuraţii simetrice faţă de un plan (reflecţie) ca şi la orice combinaţie a acestor transformări. Numim totalitatea acestor transformări *grupul principal*[11] de transformări ale spaţiului; *proprietăţile geometrice nu sînt schimbate de transformările din grupul principal.* Şi reciproc, *proprietăţile geometrice sînt caracterizate prin aceea că rămîn neschimbate la transformările grupului principal.* Pentru că, dacă privim deocamdată spaţiul ca imobil etc., ca o varietate rigidă, atunci orice figură are un caracter individual; dintre toate proprietăţie pe care le posedă o figură ca individualitate, doar proprietăţile geometrice sînt păstrate de transformările grupului principal. Ideea aceasta, formulată aici oarecum imprecis, va fi clarificată în cursul expunerii.

Să abandonăm acum concepţia concretă a spaţiului, care pentru matematician nu este esenţială, şi să-l privim doar ca pe o varietate cu n dimensiuni; de fapt, cu trei dimensiuni, dacă ţinem la ideea obişnuită de punct ca element al spaţiului. Prin analogie cu transformările spaţiului, vorbim despre transformările varietăţii; şi ele formează grupuri. Dar acum nu mai există, ca în spaţiu, un grup distins de celelalte prin semnificaţia lui; fiecare grup are importanţă egală. Astfel, ca generalizare a geometriei, apare următoarea problemă cuprinzătoare:

Dată o varietate şi un grup de transformări ale ei; să se investigheze configuraţiile care aparţin varietăţii faţă de acele proprietăţi care nu sînt alterate de transformările grupului.

Dacă facem uz de o formulare modernă care, de fapt, e folosită de obicei numai cu referire la un anume grup, al tuturor transformărilor lineare, problema poate fi enunţată astfel:

Dată o varietate şi un grup de transformări ale ei; să se dezvolte teoria invarianţilor faţă de acest grup.

Aceasta e problema generală, şi ea nu conţine doar geometria obişnuită, ci şi, în particular, teoriile geometrice mai recente pe care ne propunem să le discutăm şi diferitele metode de a trata varietăţile cu n dimensiuni. Trebuie subliniat în mod deosebit faptul că alegerea grupului de transformări care se adaugă este perfect

[9]Nu e deloc necesar ca transformările unui grup să formeze un şir continuu, deşi grupurile menţionate în text chiar vor avea întotdeauna această proprietate. De exemplu, un grup format de seria finită de mişcări care suprapun un corp regulat peste el însuşi sau de seria infinită, dar discretă, care suprapune o sinusoidă peste ea însăşi.

[10]Prin „sens“ înţelegem acea particularitate a aranjamentului părţilor unei figuri care o distinge de simetrica ei (figura reflectată). Astfel, de exemplu, o elice stîngă şi una dreaptă au „sensuri“ opuse.

[11]Faptul că aceste transformări formează un grup rezultă chiar din definiţie.

arbitrară şi, în consecinţă, toate metodele de lucru care satisfac condiţia noastră generală sînt, în acest sens, de valoare egală.

2. Adăugarea succesivă a unor grupuri de transformări dintre care unul le include pe celelalte. Diferitele tipuri de investigaţie geometrică şi relaţiile lor mutuale.

Cum proprietăţile geometrice ale configuraţiilor din spaţiu rămîn neschimbate sub acţiunea *tuturor* transformărilor din grupul principal, este prin chiar natura problemei absurd să căutăm asemenea proprietăţi care ar rămîne neschimbate sub acţiunea doar a unei părţi dintre aceste transformări. Asemenea cercetare devine, totuşi, justificabilă, de îndată ce investigăm configuraţiile spaţiului în relaţia lor cu anumite elemente considerate fixe. De exemplu, să considerăm configuraţiile spaţiului cu referire la un anume punct, ca în trigonometria sferică. Atunci problema este să dezvoltăm proprietăţile care rămîn invariante la transformările grupului principal, dar nu pentru configuraţiile luate indiividual, ci pentru sistemul care constă din aceste configuraţii împreună cu punctul respectiv. Putem enunţa şi altfel problema: să se examineze configuraţiile din spaţiu cu referire la acele proprietăţi care rămîn neschimbate faţă de transformările din grupul principal care încă au loc atunci cînd punctul e fixat. Altfel spus, e exact acelaşi lucru dacă investigăm configuraţiile spaţiului luate în legătură cu punctul dat din punctul de vedere al grupului principal, sau dacă, fără vreo astfel de legătură, înlocuim grupul principal cu acel grup parţial ale cărui transformări lasă punctul respectiv neschimbat.

Acesta e un principiu pe care o să-l aplicăm repetat, aşa că îl vom formula în manieră generală, după cum urmează:

Dată o varietate şi un grup de transformări care i se aplică. Ne propunem să examinăm configuraţiile conţinute în varietate cu referire la o configuraţie dată. *Atunci putem ori să adăugăm respectiva configuraţie la sistem, şi atunci avem de investigat proprietăţile sistemului extins din punctul de vedere al grupului dat, ori putem lăsa sistemul neschimbat, limitînd transformările folosite la acele transformări ale grupului dat care lasă configuraţia dată neschimbată. (Aceste transformări formează ele însele în mod necesar un grup).*

Să considerăm acum inversa problemei propuse la începutul acestei secţiuni. E clar de la început. Întrebăm ce proprietăţi ale configuraţiilor spaţiului rămîn neschimbate sub acţiunea unui grup de transformări care conţine grupul principal ca parte a sa. Orice proprietate găsită în urma unei asemenea investigaţii este o proprietate geometrică a configuraţiei respective; dar reciproca nu e adevărată. În problema inversă trebuie să aplicăm principiul abia enunţat, grupul principal fiind acum acela mai mic. Avem aşadar:

Dacă grupul principal este înlocuit cu unul mai cuprinzător, doar o parte dintre proprietăţile geometrice rămîn neschimbate. Celelalte nu mai apar ca proprietăţi ale configuraţiilor spaţiale prin ele însele, ci ca proprietăţi ale sistemului format prin alăturarea la sistemul iniţial a unei configuraţii particulare. Aceasta din urmă e definită, în măsura în care chiar este o configuraţie bine definită[12], prin următoarea condiţie: *Presupunerea că e fixată trebuie să ne restrîngă la acele transformări ale grupului dat care aparţin grupului principal.*

[12]O asemenea configuraţie poate fi generată, de exemplu, aplicînd transformările grupului principal oricărui element arbitrar care nu e transformat în el însuşi de nici o transformare a grupului dat.

În această teoremă rezidă particularitatea recentelor metode geometrice pe care le vom discuta aici, precum şi relaţia lor cu metoda elementară. Ceea ce le caracterizează este tocmai că îşi fundamentează investigaţia pe un grup extins de transformări ale spaţiului, nu doar pe grupul principal. Relaţia dintre ele e definită ori de cîte ori unul dintre grupuri îl include pe celălalt, printr-o teoremă corespunzătoare. Acelaşi lucru este adevărat pentru diferitele metode de tratare a varietăţilor cu n dimensiuni pe care le vom aborda. Vom concidera acum fiecare metodă din acest punct de vedere, ceea ce ne va da prilejul să explicăm pe exemple concrete teoremele enunţate în formă generală în secţiunea de faţă şi în cea precedentă.

3. Geometrie proiectivă.

Orice transformare a spaţiului care nu aparţine grupului principal poate fi folosită ca să transfere proprietăţile unor configuraţii cunoscute unora noi. Aşadar, aplicăm rezultatele de geometrie plană la geometria suprafeţelor care pot fi reprezentate (*abgebildet*) pe un plan; astfel, cu mult înainte de apariţia unei adevărate geometrii proiective, proprietăţile figurilor determinate prin proiecţia unei anumite figuri fuseseră determinate din cele ale figurii date. Dar geometria proiectivă a apărut tocmai pentru că devenise uzual ca figura iniţială să fie considerată ca fiind în mod esenţial identică cu toate cele deductibile din ea prin proiecţie şi ca proprietăţile transferate în procesul proiecţiei să fie enunţate în aşa fel încît să pună în evidenţă independenţa lor de schimbarea datorată proiecţiei. Prin acest proces, *grupul tuturor transformărilor proiective* a fost pus la baza teoriei în sensul §1 şi exact asta a creat antiteza dintre geometria obişnuită şi cea proiectivă.

Pentru orice fel de transformare a spaţiului se poate imagina o linie de dezvoltare asemănătoare celei descrise aici şi la care ne vom mai referi. În domeniul geometriei proiective, s-a avansat în două direcţii. Pe de o parte, concepţia a fost lărgită prin admiterea transformărilor *dualistice* în grupul transformărilor fundamentale. Din punct de vedere modern, două figuri reciproce nu trebuie privite ca fiind distincte, ci ca, în mod esenţial, una şi aceeaşi. Următorul pas înainte a constat în extinderea grupului fundamental al transformărilor de colinearitate şi dualistice prin admiterea, în fiecare caz, a transformărilor *imaginare.* Acest pas presupune extinderea prealabilă a corpului adevăratelor elemente ale spaţiului cu elementele imaginare – exact aşa cum admiterea transformărilor dualistice în grupul fundamental presupune introducerea simultană a punctelor şi dreptelor ca elemente ale spaţiului. Nu e aici locul pentru a sublinia utilitatea introducerii elementelor imaginare, fără de care nu putem obţine o corespondenţă exactă a teoriei spaţiului cu sistemul fixat de operaţii algebrice. Dar, pe de altă parte, trebuie să amintim că raţiunea introducerii elementelor imaginare e de găsit în considerarea operaţiilor algebrice şi nu în grupul transformărilor proiective şi dualistice. Pentru că, exact aşa cum, în cel din urmă caz, ne putem limita la transformări reale, deoarece colineaţiile reale şi transformările dualistice formează împreună un grup, la fel de bine putem introduce elemente spaţiale imaginare chiar atunci cînd nu folosim punctul de vedere proiectiv – şi chiar trebuie s-o facem în investigaţiile strict algebrice.

Felul în care trebuie privite proprietăţile metrice din punct de vedere proiectiv e determinat de teorema generală din secţiunea precedentă. Proprietăţile metrice trebuie considerate ca relaţii proiective faţă de o configuraţie fundamentală, cercul de la infinit[13], o configuraţie care are proprietatea că este transformată în ea însăşi de acele transformări ale grupului proiectiv care aparţin şi grupului principal. Propoziţia generală astfel formulată necesită o modificare materială datorită limitării impuse de punctul de vedere tradiţional conform căruia geometria se ocupă numai cu elementele spaţiale *reale* (şi admite numai transformări *reale*). Pentru a ne conforma acestui punct de vedere, e absolut necesar să adăugăm cercul de la infinit sistemului de elemente spaţiale reale (punctele); proprietăţile în sensul geometriei elementare sînt, din punct de vedere proiectiv, ori proprietăţi ale configuraţiilor luate în sine, ori relaţii faţă de acest sistem de elemente reale, sau faţă de cercul de la infinit, sau faţă de ambele.

Putem aminti aici şi modul în care *von Staudt* [25] dezvoltă geometria proiectivă – *i.e.* acea geometrie proiectivă care se bazează pe grupul ce conţine toate transformările proiective şi dualistice[14].

Ştim cum, în sistemul său, alege din materia obişnuită a geometriei numai acele aspecte care sînt păstrate de transformările proiective. Dacă am vrea să purcedem şi la considerarea proprietăţilor metrice, ce am avea de făcut ar fi tocmai să le introducem pe acestea din urmă ca pe relaţii faţă de cercul de la infinit. Linia de gîndire dusă astfel la capăt este extrem de importantă pentru consideraţiile de faţă, întrucît o dezvoltare corespunzătoare a geometriei e posibilă pentru fiecare dintre metodele pe care le vom discuta.

4. Transferul proprietăţilor prin reprezentări (Abbildung).

Înainte de a merge mai departe cu discutarea metodelor geometrice, altele decît geometria elementară şi cea proiectivă, vom dezvolta în formă generală anumite consideraţii la care vom recurge în mod constant de-a lungul lucrării şi pentru care avem deja un număr suficient de exemple puse la dispoziţie de subiectele discutate pînă acum. Secţiunea de faţă, ca şi următoarea, vor fi dedicate acestei discuţii.

Să presupunem că vrem să investigăm o varietate A relativ la un grup B. Dacă, printr-o transformare oarecare, A se transformă într-o varietate A', grupul de transformări B care tranforma A în ea însăşi va deveni un grup B' ale cărui transformări se aplică lui A'. Devine acum autoevident principiul conform căruia *metoda cu care tratăm A cu referire la B furnizează metoda de a trata A' cu referire la B', i.e.* orice proprietate a unei configuraţii conţinute în A obţinută cu ajutorul lui B furnizează o proprietate a configuraţiei corespunzătoare din A' obţinută cu grupul B'.

De exemplu, fie A linia dreaptă şi fie B cele ∞^3 transformări lineare care transformă A în ea însăşi. Metoda cu care tratăm A este cea pe care algebra modernă o numeşte teoria formelor binare. Acum, se poate stabili o corespondenţă între linia dreaptă şi o conică A' din acelaşi plan proiectînd dintr-un punct al acesteia din urmă. Transformările lineare B ale dreptei în ea însăşi vor deveni, după cum lesne se arată, transformări lineare B' ale conicei în ea însăşi, altfel spus, acele schimbări

[13] Acest punct de vedere trebuie considerat ca una dintre cele mai strălucitoare realizări ale şcolii franceze; pentru că este exact ceea ce oferă o bază solidă pentru distincţia dintre proprietăţile de poziţie şi cele metrice, adică tocmai ceea ce oferă cel mai bun punct de plecare pentru geometria proiectivă.

[14] Orizontul extins, care include transformările *imaginare*, a fost folosit pentru prima dată de *von Staudt* ca bază a cercetărilor din lucrarea sa ulterioară [26].

ale conicei care rezultă din transformări lineare ale planului care transformă conica în ea însăşi.

Acum, conform principiului enunţat în §2[15], studiul geometriei secţiunii conice este acelaşi, indiferent dacă conica e privită ca fiind fixă şi se iau în considerare doar acele transformări lineare ale planului care o transformă în ea însăşi, ori dacă se consideră toate transformările lineare ale planului şi conica e lăsată să varieze. Corespunzător, proprietăţile pe care le recunoaştem pentru sisteme de puncte pe conică vor fi proprietăţi proiective în sens obişnuit. Combinînd aceste consideraţii cu rezultatul pe care tocmai l-am dedus, obţinem:

Teoria formelor binare şi geometria proiectivă a sistemelor de puncte de pe o conică sînt unul şi acelaşi lucru; altfel spus, fiecărei propoziţii despre forme binare îi corespunde o propoziţie despre asemenea sisteme de puncte şi reciproc.[16]

Iată un alt exemplu potrivit pentru ilustrarea acestor consideraţii. Dacă o suprafaţă cuadrică poate fi pusă în corespondenţă cu un plan prin proiecţie stereografică, suprafaţa va avea un punct fundamental – centrul de proiecţie. În plan, vor fi două – proiecţiile generatoarelor care trec prin centrul de proiecţie. Urmează în mod direct că: transformările lineare ale planului care lasă neschimbate cele două puncte fundamentale sînt convertite prin reprezentare (*Abbildung*) în transformări lineare ale cuadricei, dar numai în acelea care lasă neschimbat centrul de proiecţie. Prin transformări lineare ale cuadricei în ea însăşi, înţelegem aici schimbările suferite de suprafaţă atunci cînd i se aplică transformări lineare ale spaţiului care o transformă în ea însăşi. Conform acestui rezultat, cercetarea proiectivă a unui plan cu referire la două puncte ale sale e acelaşi lucru cu cercetarea proiectivă a unei suprafeţe cuadrice cu referire la un punct al său. Acum, dacă se iau în considerare şi elementele imaginare, prima nu este altceva decît cercetarea planului din punctul de vedere al geometriei elementare, deoarece grupul principal al transformărilor plane conţine exact acele transformări lineare care lasă neschimbate două puncte (punctele circulare de la infinit). Obţinem în sfîrşit:

Geometria elementară plană şi cercetarea proiectivă a unei suprafeţe cuadrice cu referire la un punct al său sînt unul şi acelaşi lucru.

Aceste exemple se pot multiplica după plac[17]; cele dezvoltate aici au fost alese pentru că vom mai avea ocazia să ne referim la ele.

5. Despre arbitrariul alegerii elementului spaţial. Principiul de transfer al lui Hesse. Geometria dreptelor.

În locul punctului, pe post de element al dreptei, al planului, al spaţiului, sau al oricărei varietăţi pe care o studiem, putem folosi orice configuraţie conţinută în varietate – un grup de puncte, o curbă pe suprafaţă[18] etc. Cum nu este nimic fixat dintru început în privinţa numărului de parametri arbitrari de care vor depinde aceste configuraţii, numărul de dimensiuni ale dreptei, planului spaţiului etc. poate fi oricare dorim, conform cu alegerea elementului. *Dar atîta vreme cît ne*

---

[15]Se poate spune că aici principiul se aplică într-o formă oarecum extinsă.

[16]În loc de o conică plană putem, la fel de bine, să introducem o conică strîmbă, sau chiar o configuraţie corespunzătoare dintr-o varietate.

[17]Pentru alte exemple, în particular pentru posibila extindere la dimensiuni superioare ale celor prezentate aici, trimit la articolul meu [12] şi, mai departe, la cercetările lui *Lie* mai jos citate.

[18]Vezi nota III.

bazăm cercetarea geometrică pe acelaşi grup de transformări, substanţa geometriei rămîne neschimbată. Altfel spus, orice propoziţie care rezultă din *o anume* alegere a elementrului spaţial va fi o propoziţie adevărată pentru orice altă alegere, dar aranjamentul şi corelaţia propoziţiei se vor schimba.

Astfel, esenţial este grupul de transformări; numărul de dimensiuni ataşat varietăţii apare ca fiind de importanţă secundară.

Combinarea acestei observaţii cu principiul din secţiunea precedentă furnizează multe aplicaţii interesante dintre care, pe unele, le vom dezvolta acum, deoarece aceste exemple par mai potrivite să explice semnificaţia teoriei generale decît o expunere detaliată.

Geometria proiectivă a dreptei (teoria formelor binare) este, conform secţiunii dinainte, echivalentă cu geometria proiectivă a conicei. Să privim acum ca element al conicei perechea de puncte în locul punctului. Acum, totalitatea perechilor de puncte ale conicei poate fi pusă în corespondenţă cu totalitatea dreptelor din plan, făcînd fiecare dreaptă să corespundă perechii de puncte în care ea intersectează conica. Prin această reprezentare (*Abbildung*), transformările lineare ale conicei în ea însăşi sînt convertite în acele transformări ale planului (privit ca fiind format din drepte) care lasă conica neschimbată. Dar indiferent că luăm în considerare grupul acesta din urmă, sau ne bazăm investigaţia pe totalitatea transformărilor lineare ale planului, adăugînd conica la configuraţiile plane de cercetat, conform §2 vom obţine unul şi acelaşi lucru. Punînd laolaltă aceste consideraţii, găsim:

Teoria formelor binare şi geometria proiectivă a planului cu referire la o conică sînt identice.

În fine, cum geometria proiectivă a planului cu referire la o conică are acelaşi grup ca şi geometria proiectivă metrică (în plan, aceasta se poate baza pe o conică[19]), cele două coincid, astfel că putem spune şi că:

Teoria formelor binare şi geometria proiectivă metrică generală în plan sînt unul şi acelaşi lucru.

În consideraţiile anterioare, conica din plan poate fi înlocuită cu o cubică strîmbă etc., dar nu vom continua pe această linie. Corelaţia pe care am explicat-o, între geometria planului, a spaţiului, sau a unei varietăţi cu orice număr de dimensiuni e, în mod esenţial, identică cu principiul transferului propus de *Hesse* (Borchardt's Journal, vol. 66).

Un exemplu extrem de asemănător este furnizat de geometria proiectivă a spaţiului; sau, în alte cuvinte, de teoria formelor cuaternare. Dacă dreapta este luată ca element spaţial şi, ca în geometria dreptelor, e determinată de şase coordonate omogene legate printr-o ecuaţie pătratică, transformările lineare şi dualistice ale spaţiului se dovedesc a fi acele transformări lineare în cele şase variabile (privite ca independente) care transformă ecuaţia respectivă în ea însăşi. Prin combinarea unor consideraţii asemănătoare celor deja dezvoltate, obţinem următoarea teoremă:

Teoria formelor cuaternare e echivalentă cu măsurarea proiectivă într-o varietate generată de şase variabile omogene.

Pentru o expunere amănunţită a acestui punct de vedere, fac referire la [13] şi la o notă de la sfîrşitul articolului[20].

[19] Vezi Nota V.

[20] Vezi Nota VI.

Expunerii anterioare îi voi alătura două remarci, prima dintre ele fiind, implicit, conţinută în cele deja spuse, dar asupra căreia merită să ne oprim mai pe îndelete, deoarece subiectul la care se referă este foarte susceptibil de a fi greşit înţeles.

Prin introducerea unor configuraţii arbitrare ca elemente spaţiale, spaţiul capătă oricîte dimensiuni dorim. Dar dacă rămînem la percepţia spaţială (elementară sau proiectivă) care ne este familiară, grupul fundamental al varietăţii cu n dimensiuni e dat dintru început; într-un caz este grupul principal, în celălalt este grupul transformărilor proiective. Dacă vrem să considerăm ca bază un alt grup, trebuie să ne despărţim de percepţia spaţială obişnuită (sau de cea proiectivă). Aşadar, dacă e corect să spunem că, printr-o alegere potrivită a elementelor spaţiale, spaţiul reprezintă o varietate cu orice număr de dimensiuni, e la fel de important să adăugăm că *în această reprezentare, ori un anume grup bine definit trebuie să constituie baza cercetării varietăţii, ori, dacă vrem să alegem grupul, trebuie să ne lărgim în mod corespunzător percepţia geometrică.* Dacă se trece cu vederea peste acest aspect, se poate ajunge, de exemplu, la următoarea interpretare a geometriei dreptelor. În geometria dreptelor, dreapta are şase coordonate: conica din plan are acelaşi număr de coeficienţi. Interpretarea geometriei dreptelor ar fi atunci geometria într-un sistem de conice separate de agregarea tuturor conicelor printr-o ecuaţie pătratică între coeficienţi. Acest lucru e corect numai dacă se ia drept grup fundamental al geometriei plane totalitatea transformărilor reprezentate de transformările lineare ale coeficienţilor conicei care transformă ecuaţia pătratică în ea însăşi. Dar dacă reţinem aspectul elementar sau proiectiv al geometriei plane, nu mai obţinem nici un fel de interpretare.

A doua observaţie se refră la următoarea linie de raţionament. Fie dat un grup, grupul principal de exemplu, care acţionează asupra spaţiului. Să alegem apoi o anume configuraţie, să spunem un punct, sau chiar un elipsoid etc., şi să-i aplicăm toate transformările grupului principal. Vom obţine o varietate infinită cu un număr de dimensiuni egal, în general, cu numărul de parametri arbitrari conţinuţi în grup, dar care se reduce, în cazuri speciale, anume atunci cînd configuraţia aleasă iniţial are proprietatea de a se transforma în ea însăşi printr-o infinitate de transformări ale grupului. Orice varietate generată astfel poate fi numită, cu referire la grupul care o generează, un *corp*[21].

Dacă, acum, vrem să ne bazăm investigaţia pe grup, alegînd în acelaşi timp anumite configuraţii ca elemente ale spaţiului, şi dacă vrem să reprezentăm uniform lucruri care au caracter asemănător, *trebuie în mod evident să ne alegem elementele spaţiului în aşa fel ca varietatea lor să fie un corp sau să poată fi descompusă în corpuri.* Observaţia aceasta, a cărei corectitudine e evidentă, îşi va găsi aplicaţii în §9. Ideea de corp va reveni în discuţie în secţiunea finală, legată de anumite alte idei[22].

[21]În alegerea acestei denumiri, urmez precedentul instituit de *Dedekind* în teoria numerelor, unde el foloseşte denumirea de *corp* pentru un sistem de numere format pornind de la nişte elemente date prin aplicarea anumitor operaţii ([15])

[22]Nu se acordă în text suficientă atenţie faptului că grupul propus poate conţine aşa–numite subgrupuri autoconjugate. Dacă o anume configuraţie rămîne neschimbată prin operaţiile unui subgrup autoconjugat, acelaşi lucru e valabil pentru toate configuraţiile în care se transformă ea sub acţiunea întregului grup, adică pentru toate configuraţiile corpului care ia naştere din ea. Dar un corp astfel format ar fi absolut nepotrivit să reprezinte operaţiile grupului. Aşadar, în text trebuie admise numai corpuri formate din elemente ale spaţiului care nu rămîn neschimbate sub acţiunea nici unui subgrup autoconjugat al grupului dat. (Notă adăugată ulterior de F. Klein.)

6. Geometria razelor reciproce. Interpretarea lui $x + iy$.

Odată cu această secţiune ne întoarcem la discuţia diferitelor direcţii de cercetare geometrică începută în §§2 şi 3.

În multe privinţe paralelă cu procesele din geometria proiectivă, vom considera clasa de cercetări geometrice care foloseşte continuu transformarea prin raze vectoriale reciproce (inversiunea geometrică). Acestei clase îi aparţin cercetările asupra aşa-numitelor pleoape şi asupra altor suprafeţe analagmatice, asupra teoriei generale a sistemelor ortogonale, la fel pentru potenţial etc. E drept că, spre deosebire de geometria proiectivă, procesele care intervin aici încă nu au fost unite într-o geometrie specială *al cărei grup fundamental ar trebui să fie totalitatea transformărilor rezultate din combinarea grupului fundamental cu inversiunea geometrică*; acest lucru poate fi pus pe seama faptului că teoriile în discuţie nu au primit pînă acum o tratare care să le pună în legătură. Pe de altă parte, nu se poate ca cercetătorii individuali care s-au ocupat cu aceste chestiuni să nu fi fost familiarizaţi cu unele dintre aceste concepţii sistematice.

Paralela între această geometrie a razelor reciproce şi geometria proiectivă devine clară de îndată ce e luată în discuţie; va fi, deci, suficient să ne îndreptăm atenţia, la modul general, asupra următoarelor puncte:

În geometria proiectivă, ideile elementare sînt punctul, dreapta şi planul. Cercul şi sfera nu sînt decît cazuri speciale de secţiune conică, respectiv de suprafaţă cuadrică. Regiunea de la infinit din geometria elementară apare ca un plan; configuraţia la care se referă geometria elementară e o conică imaginară la infinit.

În geometria razelor reciproce ideile elementare sînt punctul, cercul şi sfera. Dreapta şi planul sînt cazuri speciale ale acestora din urmă, caracterizate de proprietatea de a conţine un punct care, totuşi, nu are vreo semnificaţie specială în teorie, anume punctul de la infinit. Dacă privim acest punct ca fiind fix, rezultă geometria elementară.

Geometria razelor reciproce admite să fie enunţată într-o formă care o plasează în paralel cu teoria formelor binare şi cu geometria dreptelor, cu condiţia ca aceasta din urmă să fie tratată în modul indicat în secţiunea din urmă. În acest scop, ne vom restrînge deocamdată observaţiile la geometria plană şi, corespunzător, la geometria razelor reciproce în plan[23].

Ne-am referit deja la legătura dintre geometria elementară plană şi geometria proiectivă a suprafeţei cuadrice cu un punct distins (§4). Dacă neglijăm punctul distins, altfel spus, dacă considerăm geometria proiectivă a suprafeţei prin ea însăşi, avem o reprezentare a geometriei razelor reciproce în plan. Pentru că e uşor de văzut[24] că grupului inversiunii geometrice din plan îi corespunde, prin reprezentarea (*Abbildung*) suprafeţei cuadrice, totalitatea transformărilor lineare ale celei din urmă în ea însăşi. Avem deci:

Geometria razelor reciproce în plan şi geometria proiectivă a unei suprafeţe cuadrice sînt unul şi acelaşi lucru; tot aşa:

Geometria razelor reciproce în spaţiu e echivalentă cu tratarea proiectivă a unei varietăţi reprezentate de o ecuaţie pătratică în cinci variabile omogene.

---

[23]Geometria razelor reciproce pe dreaptă e echivalentă cu investigarea proiectivă a dreptei, deoarece transformările respective sînt aceleaşi. Astfel, şi în geometria razelor reciproce putem vorbi despre raportul anarmonic a patru puncte pe o dreaptă şi a patru puncte de pe cerc.

[24]Vezi [12].

Astfel, cu ajutorul geometriei razelor reciproce, geometria spaţiului este pusă în aceeaşi relaţie cu o varietate cu patru dimensiuni la fel cum, cu ajutorul geometriei proiective, cu o varietate cu cinci dimensiuni.

Dacă ne limităm la transformări *reale*, geometria razelor reciproce mai admite o interpretare, sau aplicaţie interesantă, într-o direcţie diferită. Asta deoarece dacă reprezentăm, ca de obicei, variabila complexă $x + iy$ în plan, transformărilor lui lineare le corespunde grupul inversiunilor geometrice, cu sus-menţionata restricţie asupra transformărilor reale[25]. Dar investigarea funcţiilor de variabilă complexă, privită ca fiind supusă acţiunii tuturor transformărilor lineare, e tocmai ceea ce, într-o reprezentare oarecum diferită, se numeşte teoria formelor binare. Altfel spus:

Teria formelor binare ˆînşi găseşte interpretarea în geometria razelor reciproce în planul real şi anume în felul în care sînt reprezentate valorile complexe ale variabilelor.

De la plan, urcăm la suprafeţe cuadrice şi revenim la cercul de idei mai familiare al transformărilor proiective. Cum am luat în consideraţie numai elementele reale ale planului, nu e indiferent cum alegem suprafaţa; evident, poate să nu fie o suprafaţă riglată. În particular, o putem privi ca pe o suprafaţă sferică - aşa cum se obişnuieşte pentru interpretarea unei variabile complexe -, şi obţinem astfel teorema:

Teoria formelor binare de o variabilă complexă are o reprezentare în geometria proiectivă a suprafeţei sferice reale.

Nu mă pot abţine de la a explica într-o notă ulterioară[26] cît de admirabil ilustrează această interpretare teoria cubicelor şi cuarticelor binare.

7. Extinderea consideraţiilor precedente. Geometria sferică a lui Lie.

De teoria formelor binare, de geometria razelor reciproce şi de geometria dreptelor, care au fost puse în legătură în paginile dinainte şi deosebite doar de numărul variabilelor, s-ar putea lega şi alte cîteva dezvoltări ulterioare pe care le vom explica în cele ce urmează. În primul rînd, aceste dezvoltări ˆînşi propun să ilustreze cu exemple noi ideea că grupul care determină tratarea respectivelor subiecte poate fi extins indefinit; dar, în al doilea rînd, vrem mai ales să explicăm legătura dintre viziunea expusă aici şi anumite consideraţii prezentate de *Lie* într-un articol recent, [20]. Felul în care am ajuns la geometria sferică lui *Lie* e diferit de calea urmată de *Lie*, anume el porneşte de la conceptele geometriei dreptelor, în timp ce, în expunerea noastră, noi presupunem un număr mai mic de variabile. Acest lucru ne va permite să ne punem de acord cu percepţia geometrică obişnuită şi să păstrăm legătura cu cele înainte expuse. Investigaţia e independentă de numărul de variabile, după cum *Lie* însuşi a subliniat deja ([18], [19]). Ea face parte din marea clasă a investigaţiilor centrate pe discutarea din punct de vedere proiectiv a ecuaţiilor

[25]Limbajul din text e inexact. Transformărilor lineare $z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (unde $z' = x'+iy'$, $z = x+iy$) le corespund numai acele operaţii din grupul inversiunilor geometrice care nu inversează unghiurile (altfel spus, în care cele două puncte circulare ale planului nu sînt interschimbate). Dacă vrem să includem întreg grupul inversiunilor geometrice, trebuie ca, pe lîngă transformările menţionate, să le considerăm şi pe acelea, nu mai puţin importante, date de formula $z' = \frac{\alpha \bar{z}+\beta}{\gamma \bar{z}+\delta}$ (unde, iarăşi, $z' = x' + iy'$, dar $\bar{z} = z - iy$).(Notă adăugată ulterior de F. Klein.)

[26]Vezi Nota VII.

pătratice în orice număr de variabile - investigaţii la care ne-am referit deja de mai multe ori şi cu care ne vom mai întîlni (vezi §10, de exemplu).

Pornesc de la conexiunea stabilită între planul real şi sferă prin proiecţia stereografică. În §5 am legat geometria plană de geometria pe o secţiune conică, punînd în corespondenţă dreptele din plan şi perechile de puncte în care ele taie conica. La fel putem stabili o conexiune între geometria spaţiului şi geometria pe sferă, făcînd ca oricărui plan din spaţiu să-i corespundă cercul în care el taie sfera. Dacă, apoi, prin proiecţie stereografică, transferăm geometria sferică de pe sferă pe plan (orice cerc fiind astfel transformat într-un cerc), obţinem următoarea corespondenţă:

geometria spaţiului ale cărei elemente sînt planele şi al cărei grup e format de transformările lineare care aplică sfera în ea însăşi, şi

geometria plană ale cărei elemente sînt cercurile şi al cărei grup este cel al inversiunilor geometrice.

Vom generaliza acum prima geometrie în două direcţii, punînd în locul grupului ei unul mai cuprinzător. Extinderea obţinută va putea fi imediat transferată în geometria plană prin reprezentare (*Abbildung*).

În locul acelor transformări lineare ale spaţiului (privit ca fiind format din plane) care transformă sfera în ea însăşi, se impune ideea de a alege ori totalitatea transformărilor *lineare* ale spaţiului, ori totalitatea acelor transformări ale planului care lasă sfera neschimbată (într-un sens care trebuie precizat); în primul caz omitem sfera, în al doilea caracterul linear al transformărilor. Prima generalizare e inteligibilă fără nici un fel de alte explicaţii; o vom lua, aşadar, în discuţie în primul rînd şi-i vom urmări importanţa pentru geometria plană. La al doilea caz vom reveni mai tîrziu şi, în primul rînd, vom avea de determinat cele mai generale transformări de acest fel.

Transformările lineare ale spaţiului au proprietatea comună de a transforma snopurile[27] şi fascicolele de plane în snopuri şi fascicole. Acum, transferat pe sferă, un snop de plane produce un snop de cercuri, *i.e.* un sistem de ∞^1 cercuri cu o intersecţie comună; fascicolul de plane produce un fascicol de cercuri, *i.e.* un sistem de ∞^2 cercuri perpendiculare pe un cerc fixat (cercul aflat în planul polar al punctului comun planelor din fascicol). Aşadar, transformărilor lineare ale spaţiului le corespund pe sferă, şi apoi în plan, transformări ale mulţimii cercurilor caracterizate de faptul că transformă snopuri şi fascicole de cercuri în snopuri şi fascicole de cercuri[28]. *Geometria plană care foloseşte grupul transformărilor astfel obţinut este o reprezentare a geometriei proiective obişnuite.* În această geometrie, punctul nu poate fi utilizat ca element al planului, pentru că punctele nu formează un *corp* (§5) pentru grupul de transformări ales; în schimb, vom alege ca elemente cercurile.

În ce priveşte a doua extindere menţionată, prima chestiune asupra căreia trebuie convenit se referă la natura grupului de transformări considerate. Problema este să găsim transformări ale planului care să transforme orice snop de plane a cărui axă atinge sfera într-un snop. Pentru simplitate, vom considera mai întîi problema reciprocă şi, mai mult, vom cobor^în o treaptă pe scara dimensiunilor; astfel, vom căuta transformări punctuale ale planului care transformă orice tangentă la o conică dată într-o tangentă. În acest scop, privim planul cu conica sa ca pe o reprezentare a unei suprafeţe cuadrice proiectate pe plan dintr-un punct al

[27]O familie de plane care au în comun o dreaptă se numeşte snop. O familie de plane care au în comun un singur punct se numeşte fascicol (N.tr.).

[28]Asemenea transformări sînt considerate în Grassmann [7].

spaţiului din afara suprafeţei şi în aşa fel încît conica respectivă să reprezinte curba frontieră. Tangentelor la conică le corespund generatoarele suprafeţei şi problema se reduce la a găsi totalitatea transformărilor punctuale ale suprafeţei în ea însăşi prin care generatoarele rămîn generatoare.

Acum, numărul acestor transformări e, cu siguranţă, ∞^n, unde n poate lua orice valoare. Aceasta pentru că avem nevoie să privim punctele suprafeţei ca intersecţii ale generatoarlor celor două sisteme şi să transformăm fiecare sistem de drepte în el însuşi prin orice mod posibil. Dar printre acestea sînt, în particular, transformările lineare şi numai la acestea ne vom referi. Pentru că dacă am avea de-a face nu cu o suprafaţă ci cu o varietate n-dimensională reprezentată de o ecuaţie pătratică, n-ar rămîne decît transformările lineare, toate celelalte ar dispărea[29].

Aceste transformări lineare ale suprafeţei în ea însăşi, transferate pe plan prin proiecţie (alta decît cea stereografică), dau transformări punctuale cu două valori, prin care din orice tangentă la conica frontieră e produsă, e adevărat, o tangentă, dar din orice altă dreaptă rezultă, în general, o conică avînd contact dublu cu curba frontieră. Acest grup de transformări va fi caracterizat convenabil trecînd la măsurători proiective bazate pe conica frontieră. Astfel, transformările vor avea proprietatea de a transforma punctele aflate la distanţă zero prin această măsurătoare şi, de asemenea, puncte a căror distanţă la un punct dat e constantă, în puncte cu aceeaşi proprietate.

Toate aceste consideraţii se pot extinde la orice număr de variabile şi, în particular, se pot aplica cercetării iniţiale care se referea la sferă şi plan ca elemente. Putem astfel da rezultatului o formă deosebit de limpede, deoarece unghiul format de două plane în măsurătoarea proiectivă cu referire la sferă e egal cu unghiul obişnuit format de cercurile în care intersectează ele sfera.

Obţinem pe sferă, şi apoi în plan, un grup de transformări în cercuri care au proprietatea de a *transforma cercuri mutual tangente (formează un unghi nul) şi cercuri care fac un unghi constant cu un cerc fixat în cercuri de acelaşi fel.* Pe sferă, grupul acestor transformări conţine transformările lineare, iar în plan, el conţine inversiunile geometrice[30].

Geometria cercurilor, bazată pe acest grup, e analoagă geometriei sferice pe care a imaginat-o *Lie* pentru spaţiu şi care apare ca avînd o deosebită importanţă pentru

[29]Dacă varietatea ar fi proiectată prin proiecţie stereografică, am obţine binecunoscuta teoremă: în regiuni cu n dimensiuni (chiar şi în spaţiu) nu există transformări punctuale isogonale cu excepţia transformărilor din grupul inversiunilor geometrice. Pe de altă parte, în plan, acestea există în orice număr. Vezi articolele deja citate ale lui *Lie*.

[30]Poate că adăugarea cîtorva formule analitice va ajuta mai buna înţelegere a observaţiilor din text. Fie ecuaţia sferei în coordonate obişnuite tetraedrale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Vom proiecta sfera stereografic pe plan, iar x-ii care satisfac ecuaţia vor fi interpretaţi drept coordonate tetraciclice în plan.

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

va fi ecuaţia circulară generală a planului. Calculînd raza cercului astfel reprezentat, ajungem la rădăcina pătrată $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$, pe care o putem nota iu_5. Putem acum privi cercurile ca elemente ale planului. Grupul inversiunilor geometrice va fi reprezentat de totalitatea acelor transformări lineare omogene în u_1, u_2, u_3, u_4 prin care $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ e transformat într-un multiplu al său. Dar grupul extins care corespunde geometriei sferice a lui *Lie* constă în acele transformări lineare omogene în cinci variabile u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 care transformă $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$ într-un multiplu al său. (Notă adăugată ulterior de F. Klein.)

investigarea curburii suprafeţelor. Ea include geometria razelor reciproce în acelaşi sens în care cea din urmă include geometria elementară.

Transformările cercurilor (sferelor) astfel obţinute au, în particular, proprietatea de a transforma cercuri (sfere) care se ating în cercuri (sfere) care au aceeaşi proprietate. Dacă privim toate curbele (suprafeţele) ca înfăşurătoare de cercuri (sfere), atunci rezultă din acest lucru că acele curbe (suprafeţe) care se ating vor fi întotdeauna transformate în curbe (suprafeţe) avıd aceeaşi proprietate. Transformările respective aparţin deci clasei *transformărilor de contact* care vor fi considerate dintr-un punct de vedere mai general în continuare, *i.e.* transformări sub acţiunea cărora contactul configuraţiilor punctuale e o relaţie invariantă. Primele transformăi ale cercurilor menţionate în prezenta secţiune, cele care sînt analoagele transformărilor corespunzătoare ale sferelor, nu sînt transformări de contact.

Chiar dacă aceste două feluri de generalizări au fost aplicate aici numai geometriei razelor reciproce, ele subzistă asemănător şi pentru geometria dreptelor şi, în general, pentru investigarea proiectivă ale unei varietăţi definite de o ecuaţie pătratică, după cum am menţionat deja, dar nu vom merge mai departe în această direcţie.

8. Enumerarea altor metode bazate pe un grup de transformări punctuale.

Geometria elementară, geometria razelor reciproce şi, la fel, geometria proiectivă sînt, dacă neglijăm transformările dualiste legate de interschimbarea elementelor spaţiale, incluse ca nişte cazuri speciale printre metodele bazate pe grupuri de transformări punctuale care se pot imagina. Vom menţiona aici numai următoarele trei metode, care se potrivesc în această privinţă cu cele deja numite. Deşi aceste metode sînt departe de a fi fost dezvoltate în teorii independente în acelaşi grad ca şi geometria proiectivă, ele pot fi deja identificate în cercetările recente[31].

8.1. **Grupul transformărilor raţionale.** În cazul transformărilor raţionale trebuie să deosebim cu grijă dacă ele sînt raţionale pentru *toate* punctele regiunii considerate, din spaţiu sau din plan, ori numai pentru punctele unei varietăţi conţinute în acea regiune – de exemplu o suprafaţă sau o curbă. Numai primele vor fi folosite cînd e vorba să dezvoltăm o geometrie a planului ori a spaţiului în înţelesul dat aici; cele din urmă capătă înţeles, din punctul nostru de vedere, numai cînd vrem să studiem geometria pe o curbă sau o suprafaţă dată. Aceeaşi distincţie trebuie făcută în cazul *analysis situs* pe care îl vom discuta acum.

În ambele direcţii, cercetările s-au ocupat mai ales cu transformările de al doilea tip. Cum în aceste cercetări, problema care s-a pus nu a fost în legătură cu geometria de pe suprafaţă sau curbă, ci, mai degrabă, despre găsirea criteriilor pentru transformarea unei suprafeţe sau curbe în ea însăşi, e bine să le excludem din sfera de investigaţii la care ne referim[32]. Pentru că sinopsisul general schiţat aici nu

[31]Grupurile cu un număr finit de parametri fiind tratate în exemplele deja discutate, de acum încolo ne vom concentra asupra grupurilor aşa-numite infinite. (Notă adăugată ulterior de F. Klein.)

[32]Nu ştiam în 1872 că ele pot fi aduse din nou în atenţie, din alt punct de vedere şi foarte frumos în legătură cu consideraţiile din text. Dată o configuraţie algebrică (curbă, suprafaţă etc.), să o considerăm transferată într-un spaţiu cu mai multe dimensiuni prin introducerea rapoartelor

$$\phi_1 : \phi_2 : \cdots : \phi_p$$

îmbrăţişează întregul cîmp al cercetării matematice, ci aduce doar anumite direcţii de gîndire sub un punct de vedere comun.

Pînă acum, s-a făcut numai începutul unei asemenea geometrii a transformărilor raţionale aşa cum trebuie să rezulte pe baza transformărilor de prima specie. În regiunea gradului întîi, anume pe dreapta reală, transformările raţionale sînt identice cu transformările lineare, aşadar nu furnizează nimic nou. În plan, cunoaştem totalitatea transformărilor raţionale (transformări Cremona); ştim că ele pot fi produse prin combinaţii de transformări pătratice. Mai departe, ştim unele proprietăţi invariante ale curbelor plane (faţă de totalitatea transformărilor raţionale), anume deficienţa lor, existenţa modulelor; dar aceste consideraţii încă nu au fost dezvoltate într-o geometrie a planului propriu-zisă, în sensul pe care-l dăm aici. În spaţiu, întreaga teorie este încă în stadiu infantil. Cunoaştem deocamdată doar puţine transformări raţionale şi le folosim pentru a stabili corespondenţe între suprafeţe cunoscute şi necunoscute.

8.2. **Analysis situs.** În aşa-numita analysis situs încercăm să determinăm ce rămîne neschimbat sub acţiunea transformărilor rezultate din combinarea deformărilor infinitezimale. Şi aici trebuie să distingem între cazul în care întreaga regiune, tot spaţiul, de exemplu, e supusă transformărilor, ori numai o varietate conţinută în ea, de exemplu o suprafaţă. Am putea fundamenta o geometrie a spaţiului pe transformările de prima specie. Grupul lor ar fi complet diferit de cele considerate pînă acum. Deoarece cuprinde toate transformările compuse din transformări punctuale infinitezimale (reale), el implică în mod necesar limitarea la elemente spaţiale reale şi aparţine domeniului funcţiilor arbitrare. Acest grup de transformări se poate încă extinde prin combinarea cu acele colineaţii reale care afectează şi regiunea de la infinit.

8.3. **Grupul tuturor transformărilor punctuale.** Deşi nici o suprafaţă nu prezintă vreo caracteristică individuală faţă de acest grup, deoarece orice suprafaţă poate fi convertită într-o alta prin transformări ale grupului, el poate fi folosit în beneficiul investigării configuraţiilor cu mai multe dimensiuni. Din punctul de vedere geometric sub care ne-am plasat, nu are importanţă dacă aceste configuraţii nu au fost pînă acum privite ca fiind geometrice, ci doar ca nişte configuraţii analitice care, ocazional, şi-au găsit aplicaţii geometrice, şi, mai mult, în investigarea lor s-au folosit metode (chiar aceste transformări punctuale, de exemplu) pe care abia de curînd am început să le privim în mod conştient drept ransformări geometrice. Din aceste configuraţii analitice fac parte, mai ales, expresiile diferenţiale omogene şi, de asemenea, ecuaţiile cu derivate parţiale. Totuşi, aşa cum vom explica mai în detaliu în secţiunea următoare, pentru discuţia generală a celor din urmă, grupul mai cuprinzător al tuturor transformărilor de contact pare mai avantajos.

Principala teoremă care se aplică în geometria grupului tuturor transformărilor punctuale este următoarea: *într-o porţiune infinitezimală a spaţiului, orice transformare punctuală are valoarea unei transformări lineare.* Astfel, dezvoltările geometriei proiective vor avea sens pentru infinitezimale; şi, oricare ar fi alegerea făcută

---

ale integranzilor de prima specie văzute ca nişte coordonate omogene. În acest spaţiu, tot ce avem de făcut este să luăm grupul transformărilor lineare omogene ca bază a consideraţiilor noastre. A se vedea diferitele articole ale lui *Brill*, *Nöther*, *Weber* şi, ca să menţionez un singur articol recent), propriul meu articol [44]. (Notă adăugată ulterior de F. Klein.)

pentru grupul cu care tratăm o varietate, *în chiar acest fapt rezidă o caracteristică distinctivă a punctului de vedere proiectiv.*

Acum, după ce am vorbit deja despre relaţia dintre metode bazate pe grupuri care se includ unele pe altele, să mai dăm un exemplu pentru teoria generală din §2. Ne vom apleca asupra problemei înţelegerii proprietăţilor proiective din punctul de vedere al „tuturor transformărilor punctuale", neglijînd acum transformările dualistice care, de fapt, fac parte din grupul geometriei proiective. Această problemă e identică cu aceasta: Ce condiţie diferenţiază grupul transformărilor lineare punctuale de totalitatea transformărilor punctuale? Ceea ce caracterizează grupul linear este că face să-i corespundă fiecărui plan un alt plan; el conţine acele transformări sub acţiunea cărora varietatea planelor (sau, ceea ce revine la acelaşi lucru, a dreptelor) rămîne neschimbată. *Geometria proiectivă trebuie să se obţină din geometria tuturor transformărilor punctuale adăugînd varietatea planelor, la fel cum geometria elementară se obţine din geometria proiectivă adăugînd cercul imaginar de la infinit.* Aşadar, de exemplu, din punctul de vedere al tuturor transformărilor punctuale desemnarea unei suprafeţe drept o suprafaţă algebrică de un anumit ordin poate fi privită drept o relaţie invariantă a varietăţii planelor. Acest lucru devine foarte clar dacă legăm, aşa cum face *Grassmann* în [8], generarea configuraţiilor algebrice de construcţiile lor prin drepte.

9. Despre grupul tuturor transformărilor de contact.

Unele cazuri particulare de transformări de contact sînt cunoscute deja de multă vreme; *Jacobi* a folosit chiar cele mai generale transformări de contact în investigaţii analitice, dar o interpretare geometrică efectivă nu au căpătat decît în cercetările recente ale lui *Lie*[33]. Aşa că nu va fi superfluu să explicăm aici în detaliu ce este o transformare de contact. Pentru aceasta, ne vom restrînge, ca şi pînă acum, la spaţiul cu trei dimensiuni.

Prin transformare de contact întelegem, din punct de vedere analitic, orice substituţie care exprimă valorile variabilelor x, y, z şi ale derivatelor lor parţiale $\dfrac{dz}{dx} = p$, $\dfrac{dz}{dy} = q$ în termeni de noi variabile x', y', z', p', q'. E clar că, în general, asemenea substituţii transformă suprafeţe care se află în contact în suprafeţe în contact, de unde şi numele. Transformările de contact se împart în trei clase (punctul fiind considerat element spaţial), anume acelea în care *punctele* corespund celor ∞^3 puncte (transformările punctuale deja considerate); cele care transformă punctele în curbe; în fine, cele care transformă punctele în suprafeţe. Această clasificare nu trebuie privită ca esenţială, deoarece pentru alte ∞^3 elemente spaţiale, de exemplu pentru plane, deşi nu există o împărţire în trei clase, ea nu coincide cu împărţirea care apare sub ipoteza că elementele sînt puncte.

Dacă un punct e supus tuturor transformărilor de contact, el e transformat în totalitatea punctelor, curbelor şi suprafeţelor. Aşadar, numai în integralitatea lor formează punctele, curbele şi suprafeţele un *corp* al grupului nostru. De aici putem deduce regula generală că tratarea formală a problemei din punctul de vedere al tuturor transformărilor de contact (*e.g.* teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale

---

[33]Vezi, în particular, articolul [20] deja citat. Pentru detaliile date în text despre ecuaţiile cu derivate parţiale îi sînt îndatorat lui *Lie* pentru comunicări orale; vezi nota sa *Zur Theorie partieller Differentialgleighungen* [21].

considerată mai jos) e incompletă dacă operăm numai cu coordonate ale punctelor (planelor), pentru simplul motiv că elementele spaţiale alese nu formează un corp.

Dacă, totuşi, vrem să păstrăm legătura cu metodele obişnuite, nu e util să introducem ca elemente spaţiale toate configuraţiile individuale conţinute în corp, pentru că numărul lor e ∞^{∞}. Este deci necesar să introducem în aceste consideraţii, ca element spaţial, nu punctul, curba sau suprafaţa, ci „elementul de suprafaţă”, *i.e.* sistemul de valori x, y, z, p, q. Fiecare transformare de contact transformă orice element de suprafaţă într-un altul; în consecinţă, cele ∞^5 elemente de suprafaţă formează un corp.

Din acest punct de vedere, punctul, curba şi suprafaţa trebuie privite uniform ca agregate de elemente de suprafaţă, anume cu ∞^2 elemente. Pentru că suprafaţa e acoperită de ∞^2 elemente, curba e tangentă unui aceluiaşi număr, prin punct trece un acelaşi număr. Dar aceste agregate de ∞^2 elemente mai au o proprietate caracteristică în comun. Să numim *poziţia unită* a două elemente consecutive de suprafaţă x, y, z, p, q şi $x+dx, y+dy, z+dz, p+dp, q+dq$ relaţia definită de ecuaţia

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

Astfel, punctul, curba şi suprafaţa sînt toate *varietăţi cu ∞^2 elemente, fiecare dintre ele fiind unit în poziţie cu cele ∞^1 elemente alăturate.* Aceasta este caracteristica comună a punctului, curbei şi suprafeţei; şi aceasta trebuie să stea la baza investigaţiilor analitice dacă se foloseşte grupul transformărilor de contact.

Poziţia unită a elementelor consecutive este o relaţie invariantă la transformări de contact. Şi reciproc, transformările de contact trebuie definite ca *acele substituţii de cinci variabile x, y, z, p, q prin care relaţia*

$$dz - pdx - qdy = 0$$

e transformată în ea însăşi. Astfel, în aceste investigaţii, spaţiul trebuie privit ca o varietate cu cinci dimensiuni; iar această varietate trebuie tratată luînd drept grup fundamental totalitatea transformărilor variabilelor care lasă invariantă o anume relaţie între diferenţiale.

În primul rînd, se prezintă ca subiect al investigaţiei varietăţile definite de una sau mai multe ecuaţii în acele variabile, deci *prin ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi şi prin sisteme de asemenea ecuaţii.* Una dintre problemele principale va fi să alegem acele varietăţi de elemente care satisfac anumite sisteme de ecuaţii date în ∞^1 sau ∞^2 elemente care sînt toate unite în poziţie cu un element vecin. O chestiune de acest tip formează substanţa problemei soluţiei unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi. Ea poate fi formulată în felul următor: să se aleagă din cele ∞^4 elemente care satisfac ecuaţia, toate varietăţile de dimensiune 2 de felul considerat. Problema soluţiei complete capătă acum forma precisă: să se clasifice într-un fel anume cele ∞^4 elemente care satisfac ecuaţia în ∞^2 varietăţi de felul considerat.

Nu e intenţia mea să duc mai departe aceste consideraţii despre ecuaţiile cu derivate parţiale; trimit la articolul lui *Lie* deja citat. Voi mai sublinia un singur lucru: din punctul de vedere al transformărilor de contact, o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întîi nu are invarianţi, orice asemenea ecuaţie putînd fi convertită într-o alta, rezultînd astfel că, în particular, ecuaţiile lineare nu au nici o proprietate distinctivă. Distincţiile apar numai cînd revenim la punctul de vedere al transformărilor punctuale.

Grupurile transformărilor de contact, al transformărilor punctuale şi, în fine, al transformărilor proiective, pot fi definite într-o manieră unitară care nu trebuie trecută cu vederea[34]. Transformările de contact au fost deja definite drept acele transformări sub acţiunea cărora poziţiile unite ale elementelor de suprafaţă consecutive sînt conservate. Dar, pe de altă parte, transformările punctuale au proprietatea caracteristică de a transforma elemente de dreaptă consecutive care sînt unite în poziţie în elemente de dreaptă situate la fel; în fine, transformările lineare şi dualistice păstrează poziţia unită a elementelor conexe consecutive. Prin element conex înţelegem combinaţia dintre un element de suprafaţă şi unul de dreaptă conţinut în ea; elemente conexe consecutive se zic unite în poziţie cînd nu doar punctul, ci şi elementul de dreaptă al unuia sînt conţinute în elementul de suprafaţă al celuilalt. Termenul element conex (deşi numai în sens preliminar) se referă la configuraţiile introduse recent de *Clebsch*[35] şi reprezentate de o ecuaţie care conţine simultan o serie de coordonate punctuale, una de coordonate planare şi una de coordonate de drepte al căror analog în plan *Clebsch* îl numeşte „conex".

10. Asupra varietăţilor cu un număr arbitrar de dimensiuni.

Am accentuat în repetate rînduri faptul că vrînd să legăm expunerea de pînă acum cu percepţia spaţială am fost influenţaţi numai de dorinţa de a dezvolta ideile abstracte mai uşor prin dependenţa de exemplele grafice. Dar consideraţiile făcute sînt, prin natura lor, independente de imaginea concretă şi se încadrează în acel domeniu general al cercetării matematice desemnat drept teoria varietăţilor cu mai multe dimensiuni – *Grassmann* o numeşte pe scurt „teoria extensiei" (Ausdehnungslehre). E limpede cum se poate face trecerea dezvoltărilor precedente de la spaţiu la ideea simplă de varietate. Dar merită menţionat o dată în plus că în investigaţiile abstracte avem asupra geometriei avantajul de a fi liberi să alegem în mod arbitrar grupul fundamental de transformări, în timp ce în geometrie avem un grup minimal – grupul principal – dat din pornire.

Vom atinge aici, şi foarte pe scurt, următoarele trei metode:

10.1. **Metoda proiectivă sau algebra modernă (teoria invarianţilor).** Grupul său constă în totalitatea transformărilor lineare şi dualiste ale variabilelor folosite pentru a reprezenta configuraţiile individuale ale varietăţii; e generalizarea geometriei proiective. Am observat deja aplicaţiile acestei metode în discuţia despre infinitezimalele unei varietăţi cu o dimensiune în plus. Ea include celelalte două metode pe care le vom menţiona, deoarece grupul ei le include pe acelea pe care se bazează metodele respective.

10.2. **Varietăţi cu curbură constantă.** Această noţiune a apărut în teoria lui *Riemann* despre ideea mai generală a unei varietăţi în care e dată şi o expresie diferenţială în variabilele ei. În această teorie, grupul constă în totalitatea transformărilor în acele variabile care lasă neschimbată respectiva expresie. Pe de altă parte, ideea unei varietăţi cu curbură constantă apare de la sine atunci cînd măsurătoarea proiectivă se bazează pe o ecuaţie pătratică dată între variabilele respective. Din acest punct de vedere, comparat cu al lui *Riemann*, extensia apare prin considerarea variabilelor complexe; variabilele pot fi limitate la domeniul real

[34]Îi sînt îndatorat unei remarci a lui *Lie* pentru aceste definiţii.
[35][2] şi în special [3].

mai tîrziu. Acestei idei i se subsumează lunga serie de investigaţii despre care am pomenit în paragrafele 5, 6 şi 7.

10.3. **Varietăţi plane.** *Riemann* numeşte plană o varietate cu curbură constantă zero. Teoria sa este generalizarea imediată a geometriei elementare. Grupul său, la fel ca grupul principal al geometriei, poate fi separat din grupul metodei proiective presupunînd că o configuraţie definită de două ecuaţii, una lineară şi una pătratică, rămîne fixă. Avem apoi de distins între real şi imaginar dacă vrem să ne punem în acord cu forma în care e prezentată îndeobşte teoria. Acestei idei i se subsumează, în primul rînd, însăşi geometria elementară, apoi, de exemplu, generalizările recente ale teoriei uzuale a curburii etc.

Concluzii.

Drept concluzie, vom mai face două observaţii strîns legate de ceea ce am prezentat deja – una cu referire la forma analitică în care trebuie reprezentate ideile dezvoltate în paginile precedente, cealaltă marcînd anumite probleme a căror investigare pare importantă şi fructuoasă în lumina expunerii făcute aici.

Geometriei analitice i s-a reproşat adesea că dă prioritate unor elemente arbitrare prin introducerea unui sistem de coordonate, obiecţie aplicată în egală măsură oricărei metode de tratare a varietăţilor în care configuraţiile individuale sînt caracterizate prin valorile variabilelor. Dar, în timp ce această obiecţie a fost prea adesea justificată datorită felului defectuos în care era mînuită, mai ales înainte, metoda coordonatelor, ea dispare imediat de îndată ce această metodă e folosită raţional. Expresiile analitice care apar în investigarea unei varietăţi cu referire la grupul ei trebuie, prin chiar înţelesul lor, să fie independente de alegerea sistemului de coordonate; astfel, problema este să enunţăm cu claritate această independenţă în limbaj analitic. Că acest lucru se poate face şi cum anume, ne arată algebra modernă în care ideea abstractă de invariant pe care o avem aici în vedere a ajuns la expresia sa cea mai clară. Ea posedă o lege generală şi exhaustivă pentru a construi expresii invariante şi operează numai cu asemenea expresii. Acest lucru trebuie avut în vedere în orice tratare formală (analitică), chiar şi atunci cînd alt grup, nu cel proiectiv, stă la baza tratării[36]. Asta deoarece, pînă la urmă, formularea analitică trebuie să fie congruentă cu concepţiile, indiferent că scopul nostru este s-o folosim doar ca pe o expresie precisă şi clară a concepţiilor, ori că vrem să pătrundem, cu ajutorul ei, în regiuni încă neexplorate.

Următoarele probleme pe care vrem să le menţionăm apar cînd comparăm ideile expuse aici cu aşa–numita teorie a ecuaţiilor a lui *Galois*.

În teoria lui *Galois*, la fel ca în a noastră, interesul e focalizat pe grupurile de transformări. Obiectele asupra cărora se aplică transformările sînt, într-adevăr, diferite; acolo avem de-a face cu un număr finit de elemente, aici cu un număr infinit de elemente dintr-o varietate continuă. Dar comparaţia poate fi dusă mai departe datorită identităţii ideii de grup[37], şi sînt mai mult decît bucuros să menţionez aici acest fapt, întrucît ne va permite să caracterizăm poziţia acordată anumitor investigaţii începute de *Lie* şi de mine[38] în acord cu concepţiile expuse aici.

[36]De exemplu, în cazul grupului rotaţiilor spaţiului trei-dimensional în jurul unui punct fix, un asemenea formalism e furnizat de cuaternioni. (Notă adăugată ulterior de F. Klein.)

[37]Aş vrea să amintesc aici comparaţia lui *Grassmann* dintre analiza combinatorie şi algebra extensivă din introducerea la [6].

[38]Vezi [17].

În teoria lui *Galois*, aşa cum e prezentată de exemplu în *Serret* [24] sau în *C. Jordan* [10], adevăratul subiect de investigaţie este teoria grupurilor teoriei substituţiilor înseşi, din care teoria ecuaţiilor rezultă ca o aplicaţie. La fel, noi avem nevoie de o *teorie a transformărilor*, o teorie a grupurilor care pot fi produse prin transformări cu orice fel de caracteristici. Ideile de comutativitate, similaritate etc. îşi vor găsi aplicaţii la fel ca în teoria substituţiilor. Ca aplicaţie a teoriei transformărilor apare acea tratare a unei varietăţi care rezultă din considerarea ca bază a grupului de transformări.

În teoria ecuaţiilor, primele subiecte care atrag atenţia sînt funcţiile simetrice în coeficienţi, apoi acele expresii care nu se schimbă sub acţiunea, dacă nu a tuturor, măcar a unui număr considerabil de permutări ale rădăcinilor. În tratarea unei varietăţi pe baza unui grup, prima noastră cercetare se referă, asemănător, la corpuri (§5), adică la configuraţiile care rămîn neschimbate sub acţiunea tuturor transformărilor grupului. Dar există configuraţii care admit nu toate, ci doar o parte a transformărilor grupului, şi acestea sînt următoarele pe scara interesului din punctul de vedere al tratării bazate pe grup; ele au caracteristice distincte. Revine atunci la a distinge în sensul geometriei obişnuite între corpuri regulate şi simetrice, suprafeţe de revoluţie şi suprafeţe elicoidale. Dacă subiectul e privit din punctul de vedere al geometriei proiective şi se cere, mai mult, ca transformările care schimbă o configuraţie în ea însăşi să fie comutative, ajungem la configuraţiile considerate de *Lie* şi de mine în articolul citat şi la problema generală propusă în §6 al acelui articol. Determinarea (din §§1,3 din acel articol) a tuturor grupurilor cu un număr infinit de transformări lineare ale planului formează o parte a teoriei generale a transformărilor pomenite mai sus[39].

Note.

I. Despre antiteza dintre metodele sintetică şi analitică în geometria modernă.

Distanţa dintre geometria sintetică şi analitică moderne nu mai trebuie privită ca esenţială, întrucît şi materia cu care operează şi metodele de raţionament au luat treptat, în ambele, o formă asemănătoare. În consecinţă, în text am ales o denominaţie comună pentru ambele, anume termenul de *geometrie proiectivă*.

[39]Trebuie să mă abţin să mă refer în text la rodnicia considerării transformărilor infinitezimale în teoria ecuaţiilor diferenţiale. În §7 al articolului citat, *Lie* şi cu mine am arătat că ecuaţiile diferenţiale ordinare care admit aceleaşi transformări infinitezimale prezintă dificultăţi similare de integrare. Apoi *Lie* a ilustrat prin exemple variate, în diferite locuri, cum se pot folosi aceste consideraţii pentru ecuaţii cu derivate parţiale; vezi, de exemplu, articolul citat anterior [20]. Vezi, în particular [22].

Fie-mi îngăduit acum să mă refer la faptul că exact cele două probleme menţionate în text au influenţat o mare parte a investigaţiilor ulterioare ale lui *Lie* şi ale mele. Am atras deja atenţia asupra apariţiei primelor două volume din lucrarea lui *Lie* „Theorie der Transformationsgruppen" [23]. Din propriile mele lucrări, pot fi menţionate aici ultimele cercetări asupra corpurilor regulate, asupra funcţiilor eliptice modulare şi asupra funcţiilor cu transformări lineare în ele însele în general. O expunere a primelor a apărut într-o lucrare specială, [15]; o prezentare a teoriei funcţiilor eliptice modulare, elaborată de *Dr. Frick*, e în curs de publicare. (Paragraf adăugat ulterior de F. Klein.)

Deşi geometria sintetică are mai multe puncte în comun cu percepţia spaţială, degajînd astfel un farmec aparte încă de la primele şi cele mai simple dezvoltări ale sale, domeniul percepţiei spaţiale nu este închis metodelor analitice, iar formulele geometriei analitice pot fi privite ca o formulare precisă şi clară a relaţiilor geometrice. Pe de altă parte, avantajul faţă de cercetările originale al unei analize bine formulate nu trebuie subestimat – avantaj datorat mişcării, ca să spunem aşa, înainte a gîndirii. Dar nu avem voie să obosim a spune că un subiect matematic nu trebuie considerat epuizat pînă nu a devenit evident din punct de vedere intuitiv, iar progresul făcut cu ajutorul analizei e doar un prim pas – dar foarte important.

II. Împărţirea geometriilor moderne în teorii.

Cînd vedem, de exemplu, cît de îndîrjit neglijează cei care se ocupă cu fizica matematică avantajele pe care le-ar avea în multe cazuri prin cultivarea fie şi moderată a unei viziuni proiective şi cum, pe de altă parte, cei care studiază geometria proiectivă nu se ating de bogata mină a adevărurilor matematice aduse la lumină de teoria curburii suprafeţelor, trebuie să privim stadiul actual al cunoştinţelor matematice ca fiind extrem de incomplet şi, e de sperat, tranzitoriu.

III. Despre valoarea percepţiei spaţiale.

Cînd, în text, am desemnat percepţia spaţială ca pe ceva incidental, ne refeream la conţinutul pur matematic al ideilor de formulat. În acest caz, percepţia spaţială are doar valoare ilustrativă, foarte importantă din punct de vedere pedagogic, e adevărat. Un model geometric, de exemplu, e, din acest punct de vedere, foarte instructiv şi interesant.

Dar problema valorii intrinsece a percepţiei spaţiale e una complet diferită. Eu o privesc ca pe o problemă independentă. Există o geometrie adevărată care nu e gîndită, aşa cum sînt investigaţiile discutate în text, ca o formă de ilustrare a unor investigaţii mai abstracte. Problema ei este să capteze întreaga realitate a figurilor spaţiale şi să interpreteze – aceasta e latura matematică a chestiunii - relaţiile care au loc pentru ele ca rezultate evidente ale axiomelor percepţiei spaţiale. Un model, fie el construit şi observat sau doar viu imaginat, este pentru această geometrie nu un mijloc către un scop, ci subiectul însuşi.

Această prezentare a geometriei ca subiect independent, separat şi independent de matematica pură, nu e întru nimic nouă, desigur. Dar e bine să insistăm încă o dată, explicit, asupra acestui punct de vedere deoarece cercetările moderne îl neglijează aproape complet. Faptul are legătură cu aceea că, *vice versa*, cercetările moderne au fost doar arareori folosite în investigarea relaţiilor formale ale configuraţiilor spaţiale, deşi ele par foarte bine adaptate acestui scop.

IV. Despre varietăţile cu un număr arbitrar de dimensiuni.

Că spaţiul, privit ca loc în care există punctele, are doar trei dimensiuni nu trebuie discutat din punct de vedere matematic; dar tot atît de uşor poate fi cineva deturnat de la acest punct de vedere afirmînd că, de fapt, spaţiul are patru sau un număr nelimitat de dimensiuni din care noi sîntem capabili să sesizăm numai trei. Teoria varietăţilor, intrînd, aşa cum face, odată cu trecerea timpului din ce în ce mai adıc în prim-planul cercetării matematice moderne, e, prin chiar natura sa, independentă de oricare afirmaţie de felul acesta. Dar în această teorie s-a stabilit deja o nomenclatură derivată din chiar această idee. În loc să vorbim despre elementele unei varietăţi, vorbim despre punctele unui spaţiu de dimensiune mai mare etc. Nomenclatura aceasta are anumite avantaje, întrucît facilitează interpretarea ducîndu-ne cu gîndul la percepţiile geometrice. Dar a avut şi rezultatul nefericit de a cauza foarte răspîndita opinie că cercetările privind varietăţile cu un număr arbitrar de dimensiuni sînt indisolubil legate de sus-menţionata idee despre natura spaţiului. Nu există nimic mai puţin întemeiat decît această idee. Investigaţiile matematice despre care discutăm îşi găsesc, e drept, aplicaţii imediate la geometrie, dacă ideile sînt corecte; dar valoarea şi semnificaţia lor sînt absolut independente de această idee şi nu depind decît de propriul lor conţinut matematic.

Cu totul altceva e cînd *Plücker* ne arată cum să privim spaţiul real ca pe o varietate cu oricîte dimensiuni prin introducerea drept element spaţial a unei configuraţii care depinde de orice număr de parametri: o curbă, o suprafaţă etc. (vezi §5 din text).

Concepţia potrivit căreia elementul unei varietăţi (cu un număr arbitrar de dimensiuni) e privit ca analogul punctului din spaţiu a fost dezvoltată pentru prima oară, cred, de *Grassmann* în „Ausdehnungslehre", [6]. La el, gîndul se eliberează complet de ideea mai sus menţionată despre natura spaţiului; această idee provine din observaţiile ocazionale ale lui *Gauss* şi s-a răspîndit mai mult odată cu cercetările lui *Riemann* asupra varietăţilor, cu care se întrepătrunde.

Ambele concepţii – a lui *Grassmann* ca şi a lui *Plücker* – au avantajele lor speciale; pot fi folosite alternativ cu bune rezultate.

V. Despre aşa-numita geometrie neeuclidiană.

Geometria proiectivă metrică la care ne-am referit marginal în text coincide, în mod esenţial, după cum au arătat investigaţii recente, cu geometria metrică dezvoltată prin neacceptarea postulatului paralelelor şi cunoscută azi sub numele de geometrie neeuclidiană, atît de mult tratată şi discutată. Motivul pentru care această denumire nu a fost deloc pomenită în text e strîns legat de expunerea din nota precedentă. Cu denumirea de geometrie neeuclidiană a fost asociată o multitudine de idei nematematice pe cît de fără margini îndrăgite de unii, pe atît de înverşunat respinse de alţii, dar cu care consideraţiile noastre pur matematice nu au nimic de-a face. Explicaţiile care urmează au fost ocazionate de dorinţa de a contribui la clarificarea ideilor în această chestiune.

Cercetările referitoare la teoria paralelelor, cu rezultatele obţinute din ele, sînt fără îndoială valoroase pentru matematică, şi anume din două puncte de vedere.

Ele arată, în primul rînd – şi această funcţie a lor poate fi privită ca încheiată odată pentru totdeauna –, că axioma paralelelor nu e o consecinţă matematică a celorlalte axiome admise de obicei, ci este expresia unui principiu esenţialmente nou al percepţiei spaţiale, neatins încă în investigaţiile precedente. Investigaţii asemănătoare pot fi şi trebuie făcute în legătură cu fiecare axiomă (şi nu doar în geometrie); s-ar ajunge astfel la o înţelegere mai profundă a relaţiilor mutuale dintre axiome.

Dar, în al doilea rînd, aceste investigaţii ne-au condus la o idee matematică importantă: ideea de varietate cu curbură constantă. Aceasta e intim legată, după cum s-a observat deja şi în §10 al textului s-a şi detaliat, de măsurarea proiectivă care s-a degajat independent de orice teorie a paralelelor. Studiul acestei teorii a măsurării nu este doar foarte interesant din punct de vedere matematic, admiţînd numeroase aplicaţii, dar are şi trăsătura adiţională de a include felul de a măsura dat în geometrie ca un caz special (limită) şi de a ne învăţa cum să-l privim pe acesta din urmă dintr-un punct de vedere mai cuprinzător.

Complet independentă de concepţiile expuse pînă acum este întrebarea: care anume raţiuni vin în sprijinul axiomei paralelelor, adică, trebuie s-o privim ca pe un dat absolut, aşa cum afirmă unii că ar fi, sau doar ca dovedită aproximativ de experienţă, aşa cum spun alţii. Dacă există raţiuni pentru a susţine a doua poziţie, atunci investigaţiile matematice la care ne-am referit ne pun imediat la dispoziţie mijloacele ca să construim o geometrie mai exactă. Dar întrebarea e, evident, una filozofică, şi priveşte fundamentele cele mai generale ale înţelegerii noastre. Matematicianul ca atare nu e interesat de această întrebare şi nu vrea ca cercetările sale să fie considerate dependente de unul sau altul dintre răspunsurile propuse[40].

VI. Geometria dreptelor ca investigaţie a varietăţilor cu curbură constantă.

Atunci cînd combinăm geometria dreptelor cu modul proiectiv de a măsura într-o varietate cu cinci dimensiuni, trebuie să ţinem seama că dreptele reprezintă elemente ale varietăţii care, din punct de vedere metric, se află la infinit. Devine acum necesar să stabilim valoarea unui sistem de măsurare proiectivă pentru elementele de la infinit; vom face acest lucru aici, după un ocol destul de lung, în aşa fel încît să eliminăm orice dificultate care ar mai putea apărea în calea conceperii geometriei dreptelor ca o geometrie metrică. Vom ilustra această expunere cu exemplul grafic al măsurătorii proiective pe o suprafaţă cuadrică.

Orice două puncte din spaţiu au, faţă de suprafaţă, un invariant absolut - raportul anarmonic al celor două puncte împreună cu cele două puncte de intersecţie ale dreptei care le uneşte cu suprafaţa. Dar cînd cele două puncte ajung pe suprafaţă, acest raport anarmonic devine zero, independent de poziţia punctelor, cu excepţia cazului în care punctele stau pe o generatoare, cînd devine nedeterminat. Acesta e singurul caz special care poate apărea în poziţia lor relativă dacă nu coincid, astfel că putem formula teorema:

Modul de măsurare proiectiv în spaţiu bazat pe o suprafaţă cuadrică nu furnizează un mod de a măsura pentru geometria pe suprafaţă.

Acest lucru e legat de faptul că prin transformările suprafeţei în ea însăşi, oricare trei puncte ale suprafeţei pot fi făcute să coincidă cu alte trei[41].

Dacă dorim să avem un mod de a măsura pe suprafaţa însăşi, trebuie să limităm grupul transformărilor şi rezultatul se obţine presupunînd fix un punct arbitrar al

---

[40] Aş vrea să adaug două observaţii suplimentare la explicaţiile din text.

În primul rînd, cînd spun că matematicianul ca atare nu are a lua poziţie într-o chestiune filozofică, nu vreau să spun că filozoful se poate dispensa de dezvoltările matematice atunci cînd tratează acel aspect al chestiunii care-l interesează; dimpotrivă, convingerea mea e că studiul acestor dezvoltări reprezintă cunoştinţele preliminare indispensabile oricărei discuţii filozofice asupra subiectului.

În al doilea rînd, nu voiam să spun că interesul meu *personal* este epuizat de aspectul matematic al chestiunii. În legătură cu concepţia mea asupra subiectului, în general, trimit la recentul articol [16]. (Notă adăugată ulterior de F. Klein.)

[41] Aceste relaţii diferă în geometria metrică uzuală; pentru că acolo e adevărat că două puncte la infinit au un invariant absolut. Contradicţia care ar putea apărea astfel în enumerarea transformărilor lineare ale suprafeţei la infinit în ea însăşi e înlăturată de faptul că translaţiile şi transformările de similaritate conţinute în acest grup nu alterează deloc regiunea de la infinit.

suprafeţei (sau planul său polar). Putem atunci proiecta suprafaţa din punct pe un plan obţinînd o conică drept curbă la frontieră. Pe această conică ne putem baza măsurătoarea proiectivă în plan, care apoi trebuie să fie transferată înapoi pe suprafaţă[42]. Aceasta e cu adevărat o măsurătoare cu curbură constantă, deci avem teorema:

O asemenea măsurătoare se obţine fixînd un punct care nu se află pe suprafaţă.

În mod corespunzător, găsim[43]:

O măsurătoare cu curbură zero pe suprafaţă se obţine fixînd un punct de pe suprafaţă.

În toate aceste măsurători pe suprafaţă, generatoarele suprafeţei sînt drepte de lungime nulă. Expresia pentru elementul de arc pe suprafaţă diferă aşadar numai printr-un factor în diferitele cazuri. Nu există un element de arc absolut pe suprafaţă; dar e clar că putem vorbi despre unghiul a două direcţii pe suprafaţă.

Toate aceste consideraţii şi teoreme se pot aplica imediat geometriei dreptaelor. Spaţiul dreptelor nu admite dintru început nici un mod de a măsura. Obţinem un mod de a măsura numai atunci cînd privim un complex linear drept fix; iar modul de a măsura e cu curbură constantă sau nulă după cum complexul e unul general sau special (o dreaptă). Alegerea unui anume complex aduce după sine acceptarea unui element de arc absolut. Independent de aceasta, direcţiile dreptelor alăturate care taie dreapta dată sînt de lungime nulă şi, în plus, putem vorbi despre unghiul a două direcţii [12].

VII. Despre interpretarea formelor binare.

Vom considera acum ilustrarea grafică pentru teoria invarianţilor unei cubice binare sau bipătratice profitînd de reprezentarea lui $x + iy$ pe sferă.

O cubică binară f are un covariant cubic Q, un covariant pătratic Δ şi un invariant R[44]. Din f şi Q putem compune un întreg sistem de sextice covariante $Q^2 + \lambda R f^2$, printre ele aflîndu-se şi Δ^3. Se poate arăta[45] că orice covariant al unei cubice trebuie s-o rezolve în asemenea grupuri de şase puncte. Întrucît λ poate lua valori complexe, numărul acestor covarianţi este ∞^2 [1].

Întregul sistem de forme astfel definit poate fi acum reprezentat pe sferă după cum urmează. Să presupunem că printr-o transformare lineară convenabilă a sferei în ea însăşi cele trei puncte care reprezintă f se transformă în trei puncte echidistante de pe un cerc mare. Să numim acest cerc mare ecuator şi fie longitudinile celor trei puncte respectiv 0°, 120°, 240°. Atunci Q va fi reprezentat de punctele de pe ecuator ale căror longitudini sînt respectiv 60°, 180°, 300°, iar Δ de cei doi poli. Orice formă $Q^2 + \lambda R f^2$ e reprezentată de şase puncte ale căror latitudine şi longitudine sînt date în tabelul următor, în care α şi β sînt numere arbitrare:

α	α	α	-α	-α	-α
β	$120° + \beta$	$240° + \beta$	$-\beta$	$120° - \beta$	$240° - \beta$

Cînd studiem variaţia acestor sisteme de puncte pe sferă, e interesant să vedem cum dau ele naştere lui f şi Q (fiecare socotit de două ori) şi Δ (socotit de trei ori).

[42]Vezi §7 din text.
[43]Vezi §4 din text.
[44]A se vedea secţiunile corespunzătoare din *Clebsch* [4].
[45]Considerînd transformările lineare ale lui f în ea însăşi. Vezi [11].

O bicuadrică f are un covariant bipătratic H, un covariant sextic T şi doi invarianţi i şi j. Deosebit de important e snopul de forme bipătratice $iH + \lambda jf$, toate făcînd parte din acelaşi T, printre ele aflîndu-se cei trei factori pătratici în care se rezolvă T, fiecare socotit de două ori.

Să luăm acum centrul sferei ca origine a unui sistem de axe rectangulare OX, OY, OZ. Cele şase puncte de intersecţie a lor cu sfera dau naştere formei T. Cele patru puncte ale unei mulţimi $iH + \lambda jf$ sînt date în tabelul următor, x, y, z fiind coordonatele unui punct arbitrar pe sferă:

x	y	z
x	$-y$	$-z$
$-x$	y	$-z$
$-x$	$-y$	z

Cele patru puncte sînt, în fiecare caz, vîrfurile unui tetraedru simetric ale cărui laturi opuse sînt tăiate la mijloc de axele de coordonate, ceea ce indică rolul jucat de T în teoria ecuaţiilor bipătratice ca rezolventă a lui $iH + \lambda jf$.

ERLANGEN, *Octombrie*, 1872.

Bibliografie

[1] Beltrami, *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche*, Memorie dell'Accademia di Bologna, 1870.

[2] Clebsch, *Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*, Math. An. 5 (1872), 427–34.

[3] Clebsch, *Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene*, Göttinger Nachrichten 22 (1872), 429–449; Math. Ann. 6 (1873), 203–15.

[4] Clebsch, *Theorie der binären Formen*, Leipzig, Teubner, 1872.

[5] Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 2 Aufl., Braunschweig, Vieweg, 1871.

[6] Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen der Mathematik, wie auch die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Kystallonomie erläutert*, Leipzig, O. Wigand, 1844.

[7] Grassmann, *Die Ausdehnungslehre*, Berlin, Enslin, 1862, p. 278.

[8] Grassmann, *Erzeugung der Curven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien*, Crelle's J. 44 (1852), 1–25.

[9] Jordan, *Sur les groupes de mouvements*, Comptes Rendus 65 (1867), 229–32; Annali di Matematica, vol. 2.

[10] Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, Gauthier-Villard, 1872.

[11] Klein, *Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen*, Math. Ann. 4 (1871), 346–58.

[12] Klein, *Über Linien geometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann. 5 (1872), 257–77.

[13] Klein, *Über die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie*, Math. An. 6 (1873), 112–45.

[14] Klein, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen*, Math. Ann. 37 (1890), 1–83.

[15] Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleighungen fünften Grades*, Leipzig, 1884.

[16] Klein, *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie*, Math. An. 37 (1890), 544–72.

[17] Klein und Lie, *Über diejenigen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren lienearen Transformationen in sich übergehen*, Math. Ann. 4 (1871), 50–84.

[18] Lie, *Über diejenigen Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungs-Theorie des gewöhnlichen Raumes entspricht*, Göttinger Nachrichten, 7 (1871), 171–209.

[19] Lie, *Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen*, Göttinger Nachrichten, 22 (1871), 535–57.

[20] Lie, *Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, mit Anwedung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen*, Math. An. 5 (1872), 145–256.
[21] Lie, *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen*, Göttinger Nachrichten, October 1871.
[22] Lie, *Neue Integrations-Methode partielle Gleichungen erster Ordnung zwischen n Variabeln*, Forth. af Christ. 1872, 28–34.
[23] Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Leipzich, Teubner, vol. I 1888, vol. II 1890.
[24] Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, Paris, Gauthier-Villard, 1866.
[25] von Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg, Bauer & Raspe, 1847.
[26] von Staudt, *Beiträge zur Geometrie der lage*, 3 vols. Nürnberg, Bauer & Raspe, 1856/57/60.