

NOȚIUNEA DE PARALELISM ÎNTR-O VARIETATE OARECARE ȘI DETERMINAREA GEOMETRICĂ CORESPUNZĂTOARE A CURBURII RIEMANNIENE

Memoriu de T. LEVI-CIVITA (Padova)

Ședința din 24 decembrie 1916.

INTRODUCERE

Teoria gravitației a lui Einstein (a cărei acceptare se datorește explicării faimoasei inegalități seculare observate în periheliul lui Mercur și care nu e prevăzută de legea lui Newton) consideră că fenomenele fizice care au loc în spațiul ambiant sînt intim legate de proprietățile geometrice ale acestuia și le determină într-o oarecare măsură; spre deosebire de teoriile clasice care presupun întreg spațiul fizic un dat *a priori*. În dezvoltarea matematică a grandioasei concepții a lui Einstein (care își găsește în calculul diferențial al lui Ricci instrumentul algoritmic natural), intervine ca un element esențial curbura unei anumite varietăți cu patru dimensiuni și simbolurile corespunzătoare ale lui Riemann. Întîlnirea și, mai ales, mînuirea continuă a acestor simboluri în chestiuni de un mare interes general m-au condus la a cerceta dacă nu s-ar putea reduce întrucîtva aparatul formal care servește îndeobște la introducerea lor și la stabilirea comportamentului lor covariant¹.

O perfecționare în acest domeniu este efectiv posibilă și constituie substanța paragrafelor 15 și 16 din prezenta lucrare care, concepută inițial cu numai acest scop, s-a tot amplificat pentru a face locul cuvenit și interpretării geometrice.

Am crezut la început că voi găsi, fără doar și poate, interpretarea geometrică în lucrările originale ale lui Riemann "Über die Hypothesen welche Geometrie zu Grunde liegen" și "Commentatio mathematica..."²; dar nu era decît un embrion. Într-adevăr, pe de o parte, apropiindu-te de sursele citate ai impresia că Riemann chiar avea în minte acea caracterizare a curburii intrinsece și invariante care va fi precizată aici (§17-18). Totuși, pe de altă parte, nici în Riemann, nici în comentariul explicativ datorat lui Weber³, nu există nici o urmă despre acele specificări (noțiunea de direcții paralele într-o varietate oarecare și considerarea unui patru-later geodezic infinitezimal cu două laturi paralele) pe care le vom recunoaște ca indispensabile din punct de vedere geometric. În plus, nu se reușește - eu, cel puțin, nu am reușit - justificarea trecerii formale cu care, după Riemann, s-ar ajunge de la presupunerile inițiale inatacabile la tot atît de perfecta formulă finală a curburii.

¹Cf., de exemplu, L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I (Pisa, Spoerri, 1902), pp. 69-72.

²B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke* (Leipzig, Teubner 1876), pp. 261-263, 381-382.

³*loc. cit.* ²), pp. 384-389.

Voi prezenta cititorului, într-o notă critică finală, această îndoială a mea, furnizându-i și elementele necesare judecății.

Prima și cea mai extinsă parte a memoriului (§1-14) e destinată introducerii și ilustrării noțiunii de paralelism într-o V_n cu metrică oarecare.

Începem din domeniul infinitezimal, încercînd să caracterizăm paralelismul a două direcții (α) , (α') care pornesc din două puncte foarte apropiate P și P' . E necesar să reamintim că orice varietate V_n se poate privi ca imersată într-un spațiu euclidian S_N cu un număr suficient de mare de dimensiuni și, mai ales că, fixînd prin P o direcție generică (f) alui S_N , paralelismul obișnuit într-un asemenea spațiu ar cere

$$\text{unghiul}(\widehat{(f)}(\alpha)) = \text{unghiul}(\widehat{(f)}(\alpha')),$$

pentru oricare (f) . Altfel spus, paralelismul în V_n se definește limitînd validitatea condiției la *toate direcțiile (f) care aparțin la V_n* (adică la partea din S_N tangentă în P la V_n).

Pentru justificarea acestei definiții se va nota că, în timp ce ea reproduce, așa cum e firesc, comportamentul elementar pentru acele V_n euclidiene, are, în orice caz, caracter intrinsec pentru că, în definitiv, rezultă dependentă doar de metrica lui V_n , nu și de spațiul ambiant auxiliar S_N . Într-adevăr, traducerea analitică a noțiunii noastre de paralelism se concretizează după cum urmează: Raportată V_n la coordonate generale x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), fie dx_i creșterile corespunzătoare trecerii de la P la P' ; $\xi^{(i)}$ parametrii unei direcții generice (α) pornind din P ; $\xi^{(i)} + d\xi^{(i)}$ aceia ai unei direcții infinit apropiate (α') , ieșind din P' . Condiția de paralelism e exprimată de cele n ecuații

$$(A) \quad d\xi^{(i)} + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \xi^{(l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

unde $\left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\}$ desemnează cunoscutele simboluri ale lui Christoffel.

O dată găsită legea prin care se trece de la un punct la unul infinit vecin, sîntem, fără îndoială, pregătiți să efectuăm transportul direcțiilor paralele de-a lungul unei curbe oarecare C . Dacă $x_i = x_i(s)$ sînt ecuațiile ei parametrice, e evident suficient ca în (A) să privim x_i și, în consecință $\left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\}$ ca funcții cunoscute, $\xi^{(i)}$ ca funcții de determinat, depinzînd de parametrul s și avem sistemul liniar ordinar

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_j}{ds} \xi^{(l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

reductibil la o formă tipică (zis cu determinant strîmb) care a apărut deja în alte cercetări și a făcut obiectul unor studii sistematice din partea domnilor Eiesland⁴, Laura⁵, Darboux⁶, Vessiot⁷.

Iată cîteva consecințe geometrice:

1° Într-un punct generic P , direcția paralelă la o direcție (α) care pleacă dintr-un punct oarecare P_0 depinde, în general, de drumul pe care se trece de la P_0 la P . Independența de drum este proprietatea exclusivă a varietăților euclidiene.

2° De-a lungul unei aceleiași geodezice, direcțiile tangentelor sînt paralele, ceea ce generalizează o caracteristică evidentă a dreptei din spațiile euclidiene (chiar aceea pe care Euclid o pune la începutul elementelor ca intuiție primordială a dreptei).

3° Transportul prin paralelism, de-a lungul unui drum oarecare, păstrează unghiul a două direcții concurente. Vreau să spun prin asta că unghiul format de două direcții generice plecînd dintr-un același punct e egal cu unghiul format de paralelele la acestea într-un alt punct oarecare. Ținînd seamă și de proprietatea de mai sus a geodezicelor, se obține corolarul conform căruia, de-a lungul unei geodezice, direcțiile paralele sînt mereu egal înclinate pe geodezică. Dacă e vorba, în particular, de o V_2 , această condiție e și suficientă, astfel că, pentru suprafețele uzuale, paralelismul de-a lungul unei geodezice echivalează cu izogonalitatea.

Nu am indicat, în ordine, conținutul diverselor paragrafe. Va fi de ajuns o privire la sumarul de la sfîrșitul lucrării.

1. PRELIMINARII

Fie (cu simbolurile obișnuite)

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx_i dx_k$$

expresia pătratului elementului liniar al unei varietăți oarecare V_n .

După cum bine se cunoaște, se poate, totdeauna, privi V_n imersată într-un spațiu euclidian S_N cu un număr de dimensiuni suficient de mare (nu superior lui $\frac{n(n+1)}{2}$). Fie y_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) coordonatele carteziene ale unui asemenea spațiu. În el, vom considera V_n definită cu ajutorul expresiilor parametrice

$$(1) \quad y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

ale coordonatelor carteziene în funcție de cele intrinseci, rezultînd în consecință

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{\nu=1}^n dy_\nu^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx_i dx_k.$$

⁴J. Eiesland, *On the integration of a system of differential equations in kinematics*, American Journal of Mathematics, vol. XXVIII (1906), pp. 17-42.

⁵E. Laura, *Sulla integrazione di un sistema di quattro equazioni differenziali lineari a determinante gobbo per mezzo di due equazioni di Riccati*, Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XLII (1906-1907), pp. 1089-1108; vol. XLIII (1907-1908), pp. 358-378.

⁶G. Darboux, *Sur certains systèmes d'équations linéaires*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLVIII (1^{er} semestre 1909) și *Sur les systèmes d'équations différentielles homogènes* (Ibid., pp. 673-679 și pp. 745-754).

⁷E. Vessiot, *Sur l'intégration des systèmes linéaires à déterminant gauche*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLVIII (1^{er} semestre 1909), pp. 332-335.

Să considerăm în V_n o curbă C arbitrară și fie

$$(3) \quad x_i = x_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ecuațiile sale parametrice, s desemnând arcul (măsurat cu începere de la o origine arbitrară). Curba C aparține în mod natural și spațiului ambiant S_N , ca atare rămîne definită de expresiile parametrice $y_\nu(s)$ ale coordonatelor carteziene ale punctelor sale. Aceste expresii parametrice sînt, desigur, oferite de (1) în care se atribuie lui x_i valorile (3). Derivîndu-le în raport cu s și indicînd cu accente derivatele față de acest argument, avem

$$(4) \quad y'_\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} x'_i \quad (\nu = 1, 2, \dots, N).$$

Să ne referim la o valoare generică, dar bine determinată, a lui s , adică la un punct P oarecare al curbei C . Evident, valorile y'_ν constituie cosinusurile directoare ale lui C în P relativ la axele coordonate ale spațiului euclidian S_N ; valorile x'_i sînt *parametrii directori* (ai lui C în același punct P) față de V_n .

Să mai amintim⁸ că, dacă se pune

$$(5) \quad y''_\nu = cq_\nu,$$

cu $c \geq 0$ și $\sum_{\nu=1}^N q_\nu^2 = 1$, rezultă curbura c a lui C în P și (cu excepția cazului limită $c = 0$), cu ajutorul cosinusurilor directoare q_ν , o direcție (q) , zisă *normală principală absolută* în punctul P . Proiectînd-o (ortogonal) pe hiperplanul tangent la V_n în P , se pune în evidență o direcție (q^*) , tot normală curbei, zisă *normală principală relativă*.

Vom desemna prin q^*_ν cosinusurile directoare ale lui (q^*) ; cu Φ unghiul cuprins între (q) și (q^*) și, în fine, cu α_ν cosinusurile directoare ale unei (α) generice care pleacă din P și aparține lui V_n (adică hiperplanului său tangent). Va fi clar că

$$\sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu q_\nu = \cos \Phi \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu q^*_\nu,$$

deci, multiplicînd cu c și țînînd cont de (5),

$$\sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu y''_\nu = c \cos \Phi \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu q^*_\nu.$$

Trebuie menționat că membrul al doilea are caracter intrinsec relativ la varietatea V_n , așadar poate fi interpretat independent de spațiul euclidian ambiant. Într-adevăr,

$$c \cos \Phi = \gamma$$

nu e altceva decît curbura geodezică a lui C iar $\sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu q^*_\nu$ e cosinusul director al unghiului χ dintre (α) și normala principală relativ la (q^*) , direcții care, ambele, aparțin lui V_n . Așa că are loc, pentru orice direcție (α) a lui V_n (dar depinzînd de curba C), relația

$$(6) \quad \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu y''_\nu = c \cos \chi.$$

⁸L. Bianchi, *loc. cit.* ¹), pp.365-367.

2. DIRECȚII PARALELE ÎN V_n DE-A LUNGUL UNEI CURBE FIXATE

Să presupunem că fiecărui punct P al lui C îi corespunde o direcție (α) care aparține lui V_n . Astfel, parametrii directori $\xi^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) care definesc (α) în V_n , ca și cosinusurile directoare α_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) care o individualizează în spațiul ambiant vor fi funcții de s ; și vom avea (la fel ca pentru direcția lui C , după cum rezultă din (4))

$$(7) \quad \alpha_\nu = \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \xi^{(l)}.$$

Să ne imaginăm că variem P de-a lungul lui C . Condiția de paralelism obișnuit al (α) -urilor (față de spațiul ambiant S_N) implică egalitatea unghiurilor pe care le formează ele cu o aceeași direcție, aleasă arbitrar.

Pentru a ajunge la o noțiune de paralelism care să privească doar V_n , să considerăm fenomenul elementar, adică trecerea de la P la un punct infinit de apropiat.

Fie (f) o direcție generică *fixă* din S_N , f_ν cosinusurile directoare respective. Când s crește cu ds , cosinusul unghiului dintre (α) și (f) ,

$$\sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu f_\nu,$$

suportă o creștere de

$$ds \sum_{\nu=1}^N \alpha'_\nu f_\nu.$$

Paralelismul obișnuit ar cere anularea acestei creșteri pentru toate direcțiile (f) , deci ar duce la constanța α_ν -urilor.

Să ne mulțumim a cere ca unghiul dintre (α) și o (f) să rămână neschimbat pentru direcțiile (f) care aparțin lui V_n , altfel spus să nu cerem anularea creșterii $ds \sum_{\nu=1}^N \alpha'_\nu f_\nu$ pentru toate direcțiile (f) , ci doar pentru direcțiile tangențiale.

Vom observa că aceste direcții sînt toate, și numai ele, compatibile cu restricțiile (1), așadar condiția enunțată e evident echivalentă (înlocuind f_ν cu cantități proporționale) cu următoarea:

$$(I) \quad \sum_{\nu=1}^N \alpha'_\nu \delta y_\nu = 0$$

pentru toate deplasările δy_ν care satisfac cerințele (1).

Cum, chiar în baza formulelor (1), avem

$$\delta y_\nu = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \delta x_k$$

cu δx_k complet arbitrare, (1) se sparge în n ecuații

$$(8) \quad \sum_{\nu=1}^N \alpha'_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

care constituie traducerea formală a paralelismului (α) -urilor de-a lungul lui C .

3. FORMA INTRINSECĂ A CONDIȚIILOR DE PARALELISM

În ecuațiile (8) apar cantitățile α_ν și y_ν care sînt legate de spațiul ambient. Ne putem elibera de ele, făcînd să intervină în (8) doar elemente care depind de metrica lui V_n .

Începem prin a substitui cosinusurile directoare α_ν cu expresiile lor (7), funcții de parametrii directori $\xi^{(l)}$. Avem, derivînd în raport cu arcul s al lui C ,

$$\alpha'_\nu = \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \partial x_l} x'_j \xi^{(l)}.$$

Pe de altă parte, în virtutea lui (2),

$$a_{kl} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}, \quad (k, l = 1, 2, \dots, n),$$

de unde rezultă, pentru simbolurile lui Christoffel de prima specie,

$$\begin{aligned} a_{jl,k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \right) \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \quad (i, l, k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Astfel, ecuațiile (8) devin

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} \frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^n a_{jl,k} x'_j \xi^{(l)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Din acestea, multiplicînd cu $a^{(ik)9}$, sumînd după k (de la 1 la n) și ținînd cont de definițiile

$$\left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} = \sum_{j,l=1}^n a_{jl,k} a^{(ik)} \quad (j, l, i = 1, 2, \dots, n)$$

ale simbolurilor lui Christoffel de a doua specie, se obțin ecuațiile echivalente

$$(I_a) \quad \frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} x'_j \xi^{(l)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

care definesc variația parametrilor $\xi^{(i)}$ de-a lungul lui C în baza condiției ca direcțiile puse în evidență de acești parametri să se mențină paralele.

Dacă C e dinainte fixată (și cu ea expresiile lui x și x' în funcție de s), coeficienții $\sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} x'_j$ ale fiecărui $\xi^{(l)}$ din (I_a) pot fi priviți ca funcții cunoscute în variabila independentă s . Ca atare, chiar ecuațiile (I_a) arată ca n ecuații diferențiale ordinare în tot atîtea cantități $\xi^{(i)}$. Rezultă, în baza cunoscutelor teoreme de existență, că, o dată aleasă arbitrar o direcție într-un punct oarecare P_0 al lui C , direcțiile paralele prin oricare alt punct P al curbei rămîn determinate.

⁹Cu $a^{(ik)}$ se notează, de obicei, coeficienții formei reciproce formei fundamentale $ds^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx_i dx_k$.

4. COMPARAȚIE CU COMPORTAMENTUL EUCLIDIAN. PROPRIETATEA SA
 CARACTERISTICĂ CU PRIVIRE LA PARALELISM

Din ceea ce s-a văzut pînă acum, de-a lungul curbei C se păstrează proprietatea elementară că dintr-un punct P pleacă o singură direcție paralelă alteia fixate prin P_0 . Trebuie, totuși, menționat că, pe cînd în spațiile euclidiene paralela prin P e unică în sens absolut, în spațiul nostru V_n cu metrică oarecare ea e, în general, dependentă de C , adică de drumul de-a lungul căruia se trece de la P_0 la P .

Mai mult, se poate adăuga că, *dacă* (printr-un punct P oarecare dintr-un domeniu arbitrar) *paralela* (la o direcție oarecare ce pleacă dintr-un alt punct P_0 al domeniului) *e independentă de drum, spațiul V_n este* (în acel domeniu) *în mod necesar euclidian*.

Într-adevăr, să observăm că, din ecuațiile (I_a) , multiplicînd cu ds și punînd, pentru simplitate

$$X_j^{(i)} = \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\} \xi^{(l)},$$

rezultă

$$(9) \quad d\xi^{(i)} = - \sum_{j=1}^n X_j^{(i)} dx_j.$$

Independența de drum dorită presupune ca $d\xi^{(i)}$, și o dată cu ele membrul drept din (9), să fie diferențiale exacte; adică, notînd cu δx_j un al doilea sistem de creșteri ale lui x_j , independente de dx_j și astfel încît $d\delta x_j = \delta dx_j$, se obțin n identități

$$\delta \sum_{j=1}^n X_j^{(i)} dx_j = d \sum_{j=1}^n X_j^{(i)} \delta x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Explicitînd și observînd că egalitatea trebuie să subziste oricare ar fi cele două sisteme de creșteri dx_j , δx_j , ca și valorile (cele inițiale, deci și cele generice) lui $\xi^{(l)}$, ajungem automat la a spune că se anulează toate simbolurile lui Riemann¹⁰, cu alte cuvinte că e vorba de o varietate euclidiană. c.c.t.d.

 5. ALTĂ FORMĂ A ECUAȚIILOR (I_a) . DEPENDENȚA DE O SINGURĂ FUNCȚIE

Parametrii directori $\xi^{(i)}$ ($= \frac{dx_i}{ds}$, unde ds reprezintă lungimea unui element ales pe direcția (α) și dx_i creșterea corespunzătoare a coordonatei x_i) apar în (I_a) ca elemente determinante pentru direcțiile paralele (α) . Acești $\xi^{(i)}$ constituie un sistem contravariant¹¹ (față de orice transformare a coordonatelor generale x_i). E util, atunci, să punem în evidență, în loc de sistemul contravariant $\xi^{(i)}$, sistemul covariant reciproc

$$(10) \quad \xi_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi^{(k)},$$

adică așa-numitele *momente*.

¹⁰Socotim că tratarea simbolurilor lui Riemann așa cum e expusă în §§15–19 e efectiv de preferat tratării obișnuite. Astfel că, din punct de vedere metodologic, teorema din text ar trebui să figureze după acele paragrafe. Am anticipat-o pentru comoditatea cititorului căruia îi sînt familiare simbolurile lui Riemann.

¹¹Conform G. Ricci, T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Mathematische Annalen, Bd. LIV (1900), p. 125-201.

Pentru a transforma corespunzător ecuațiile (I_a) , să derivăm direct pozițiile (10), introducînd pentru $\frac{d\xi^{(k)}}{ds}$ expresiile furnizate de (I_a) . Se obține (după ce se schimbă în ultimul termen indicele de sumare din k în l):

$$\frac{d\xi_i}{ds} = - \sum_{k,j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ k \end{matrix} \right\} a_{ik} x'_j \xi^{(l)} + \sum_{l=1}^n \frac{da_{il}}{ds} \xi^{(l)}.$$

Deoarece

$$\sum_{k,j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ k \end{matrix} \right\} = a_{jl,i},$$

și

$$\frac{da_{il}}{ds} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} x'_j = \sum_{j=1}^n (a_{jl,i} + a_{ij,l}) x'_j,$$

rămîne

$$(11) \quad \frac{d\xi_i}{ds} = \sum_{j,l=1}^n a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)}.$$

În locul lui $\xi^{(l)}$, trebuie să facem să apară și în membrul al doilea momentele: lucru foarte ușor, datorită ecuațiilor (10) care, rezolvate, dau

$$\xi^{(l)} = \sum_{k=1}^n a^{lk} \xi_k.$$

Cu aceasta, ținînd seama de expresiile coeficienților lui Christoffel de specia a doua deja reamintite în paragraful precedent, rezultă:

$$\sum_{j,l=1}^n a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)} = \sum_{j,k=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ k \end{matrix} \right\} x'_j \xi_k,$$

și se obțin astfel, punînd din nou l pentru k drept indice de sumare, ecuațiile transformate

$$(I_b) \quad \frac{d\xi_i}{ds} = \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ l \end{matrix} \right\} \xi_l, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Se va observa că acest sistem (I_b) e *adjunctul* precedentului (I_a) . Într-adevăr, coeficientul lui ξ_i în a i -a ecuație (I_b) e egal și opus coeficientului lui $\xi^{(i)}$ în a l -a ecuație (I_a) .

Ecuațiilor în chestiune li se mai poate atribui și o a treia înfățișare care amintește, chiar dacă este, de fapt, mai puțin expresivă, forma lagrangiană clasică a ecuațiilor dinamicii.

Analogia constă în aceea că se poate ajunge la o singură funcție de $3n$ argumente $x_i, x'_i, \xi^{(i)}$,

$$(12) \quad B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij},$$

bilinară în $\xi^{(j)}$ (care sînt pe post de necunoscute) și în x'_i (care sînt, ca și x_i , funcții de s).

Din (10) se obține

$$\xi_i = \frac{\partial B}{\partial x'_i},$$

și se constată imediat (cu schimbări evidente de indici) că, deoarece

$$a_{ij,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} \right),$$

al doilea membru al lui (11) se mai poate scrie:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x'_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial B}{\partial x'_i} x'_j - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}} \xi^{(j)} \right).$$

Cu aceasta, chiar din ecuațiile (11) care sînt, esențialmente, echivalente cu (I_a) și cu (I_b), se obține forma anunțată în care intervine doar B :

$$(I_c) \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial B}{\partial x'_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x'_i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial B}{\partial x'_i} x'_j - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}} \xi^{(j)} \right).$$

6. INTEGRALĂ PĂTRATICĂ – CONSERVAREA UNGHIURILOR. COMPUNEREA SOLUȚIILOR ORTOGONALE

Ecuațiile liniare (I_a) admit integrala pătratică

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi^{(i)} \xi^{(j)} = \text{const.}$$

Acest lucru se recunoaște ușor observînd că, datorită lui (10), primul membru se scrie

$$\sum_{i=1}^n \xi^{(i)} \xi_i,$$

și are derivata

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\xi^{(i)}}{ds} \xi_i + \frac{d\xi_i}{ds} \xi^{(i)} \right),$$

care, datorită lui (I_a) și a echivalentelor (I_b), se anulează identic.

De altfel, chiar fără o verificare directă, folosind o proprietate cunoscută a sistemelor adjuncte, cum $\xi^{(i)}$ și ξ_i sînt soluții ale unor asemenea sisteme, se poate afirma constanța expresiei $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi^{(i)} \xi^{(j)}$.

Corolar evident al existenței integralei pătratice este că, dacă valorile inițiale ale lui $\xi^{(i)}$ sînt efectiv parametri directori și, ca atare, verifică

$$(13) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi^{(i)} \xi^{(j)} = 1,$$

aceeași relație rămîne adevărată pentru orice s , adică soluțiile $\xi^{(i)}$ păstrează caracterul de parametri directori de-a lungul lui C : circumstanță implicită în punerea problemei, dar care nu e evidentă a priori în (I_a).

Alt corolar demn de semnalat e conservarea, de-a lungul lui C , a unghiului σ a două direcții care se transportă prin paralelism. Într-adevăr, fie $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$ parametrii acestor două direcții și fie ξ_i, η_i momentele respective. Avem

$$\cos \sigma = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi^{(i)} \eta^{(j)} = \sum_{i=1}^n \xi^{(i)} \eta_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta^{(i)}.$$

Să ne referim, de exemplu, la ultima expresie pe care să o derivăm substituind lui $\frac{d\xi_i}{ds}$ valorile furnizate de (I_b) , iar lui $\frac{d\eta^{(i)}}{ds}$ pe acelea furnizate de (I_a) . Rezultatul este, și aici, identic nul, c.c.t.d

Din linearitatea ecuațiilor de paralelism – să ne uităm, de exemplu, la (I_a) – urmează că orice combinație lineară cu coeficienți constanți a unor soluții $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$ este, încă, soluție. Să presupunem, în particular, că $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$ sînt parametrii a două direcții nu doar paralele, ci și ortogonale între ele și fie

$$\zeta^{(i)} = \cos \sigma \xi^{(i)} + \sin \sigma \eta^{(i)}$$

cu σ constant. Avem, evident:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \zeta^{(i)} \zeta^{(j)} = 1; \quad \sum_{i=1}^n \zeta^{(i)} \xi_i = \cos \sigma, \quad \sum_{i=1}^n \zeta^{(i)} \eta_i = \sin \sigma,$$

astfel că $\zeta^{(i)}$ constituie parametrii unei direcții care, în timp ce satisface condiția de paralelism de-a lungul lui C , aparține planului determinat de primele două, formînd cu acestea, în orice punct, aceleași unghiuri σ și $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

Observația aceasta se extinde cu ușurință la oricîte soluții mutual ortogonale și dă naștere următorului enunț expresiv: *Orice direcție care, deplasîndu-se de-a lungul lui C , se menține legată rigid de direcții paralele, satisface ea însăși condiția de paralelism.*

7. GEODEZICE – PROPRIETATEA LOR CARACTERISTICĂ ÎN CE PRIVEȘTE DIRECȚIA

E bine cunoscut că ecuațiile geodezicelor lui V_n sînt

$$x_i'' + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ & i \end{matrix} \right\} x_j' x_l' = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Din ele se deduce că, dacă C e geodezică, ecuațiile (I_a) admit soluția $\xi^{(i)} = x_i'$ și reciproc. Ca urmare: *Direcția unei geodezice, într-un punct oarecare al ei, e totdeauna paralelă cu direcția inițială; reciproc, orice curbă care se bucură de această proprietate e geodezică.*

Astfel se extinde la geodezicele unui spațiu oarecare o proprietate defnitorie a dreptelor din spațiile euclidiene. Și, în același timp, e clar că, în mod necesar, au loc simultan conservarea direcției și proprietatea integrală de minimizare a distanței (cealaltă caracteristică defnitorie a geodezicelor).

8. ÎNCLINAREA PE CURBA DE TRANSPORT

Merită pusă în evidență o combinație lineară semnificativă a ecuațiilor (I_a) . Pentru a evita dezvoltări complicate, să ne reîntoarcem la formula (I) din care provin ecuațiile diferențiale cu care, în esență, e echivalentă. Respectiva formulă

trebuie să aibă loc pentru orice deplasare δy_ν , deci pentru orice direcție, aparținând lui V_n . Să considerăm, în particular, direcția tangentă la C , punind în (I) y'_ν în locul lui δy_ν . Rezultă

$$\sum_{i=1}^N \alpha'_i y'_i = 0$$

care se mai poate scrie

$$\frac{d}{ds} \sum_{i=1}^N \alpha'_i y'_i = \sum_{i=1}^N \alpha'_i y''_i.$$

Numind ψ unghiul pe care îl face C cu direcția (α) (de al cărei paralelism ne ocupăm) și folosind (6), obținem relația pe care voiam să o stabilim:

$$(14) \quad \frac{d}{ds} \cos \psi = \gamma \cos \chi.$$

Amintim (§1) că γ reprezintă curbura geodezică a lui C și χ unghiul cuprins între (α) și normala principală a lui C (relativ la V_n). Așadar, formula (14) furnizează legea după care variază, de-a lungul curbei de transport C , înclinarea ψ (pe aceeași C) a unui fascicol de direcții paralele.

Dacă C e geodezică, atunci $\gamma = 0$ și deci $\cos \psi = \text{const.}$, adică: *direcțiile paralele de-a lungul unei geodezice formează permanent același unghi cu geodezica dată.* Acesta nu e decît un caz particular al conservării unghiurilor puse în evidență în §6: e suficient să observăm (ca în paragraful precedent) că direcțiile unei geodezice sînt toate paralele între ele.

Dacă C e o curbă oarecare, dar într-un spațiu euclidian, atunci (14) se reduce la primul grup al formulelor lui Frenet.

9. CAZUL SUPRAFETELOR OBIȘNUITE

Pentru $n = 2$, diferitele direcții care pleacă dintr-un același punct al lui C rămîn univoc determinate de unghiul ψ , cu condiția ca acestuia să i se asocieze și un dat calitativ: sensul în care, pornind din direcția pozitivă a curbei C , trebuie socotit ψ . Rezultă de aici că (după specificarea calitativă necesară), formula (14) e suficientă pentru a defini univoc direcțiile paralele de-a lungul unei curbe generice pe suprafață. Se poate preciza după cum urmează: notînd (q^*) normala principală relativă (proiecție pe planul tangent la suprafață a normalei principale a lui C), să presupunem că socotim ψ către (q^*) (se subînțelege, plecînd de la direcția pozitivă a lui C , trecînd prin unghiul drept pe care aceasta îl formează cu (q^*)). Astfel înțeles, unghiul ψ ar putea să nu fie unghiul minim dintre C și (α) la care se referă (14), ci acela concav care completează rotația; oricum, cosinusul său coincide, în orice caz, cu acel $\cos \psi$ care apare în (14), rezultînd apoi (pentru actualul ψ) $\sin \psi = \cos \chi$.

Ecuția (14) capătă, astfel, forma simplificată

$$(15) \quad \frac{d\psi}{ds} = -\gamma.$$

Ne-am ocupat deja în paragraful precedent de cazul $\gamma = 0$ pentru n oarecare. Pentru suprafețe, se poate adăuga că noțiunea obișnuită de paralelism geodezic este conținută în noțiunea noastră generală de paralelism. Într-adevăr, curbele geodezic paralele au drept traiectorii ortogonale curbe geodezice; deci ele se pot numi paralele (în sensul atribuit de noi termenului) relativ la oricare dintre aceste geodezice, deoarece pentru oricare dintre aceste curbe are loc $\psi = \frac{\pi}{2}$ sau $\psi = \frac{3\pi}{2}$.

Să părăsim cazul unei geodezice C și să luăm un exemplu particular. Să presupunem că e vorba de o suprafață sferică pe care C e un cerc paralel. Direcția (q^*) într-un punct generic e aceea a meridianului către polul lui C . Dacă λ e latitudinea (față de emisfera care conține polul lui C) și dacă R e raza sferei, atunci

$$\gamma = \frac{1}{R \cos \lambda}.$$

Pe de altă parte, dacă presupunem că parcurgem cercul paralel în sensul de creștere a longitudinii ϕ , avem

$$ds = R \cos \lambda d\phi,$$

astfel că (15) se reduce la

$$d\psi = -d\phi.$$

Deci unghiul ψ variază uniform cu longitudinea și descrește cu 2π la o rotație completă. Direcția paralelă uneia dinainte fixate rezultă, astfel, funcție *uniformă* de punctele cercului paralel.

Totuși, o asemenea uniformitate nu are loc, cu necesitate, și pentru alte curbe închise: de exemplu, parcurgând perimetrul unui triunghi geodezic, ψ suferă o creștere de $2\pi - \varepsilon$ (ε e excesul sferic). Asta se recunoaște imediat dacă se ține seamă că ψ rămîne constant de-a lungul laturilor și suferă în vîrfuri creșteri bruște reprezentate de suplementele unghiurilor.

10. SPAȚII CU CURBURĂ CONSTANTĂ – OBSERVAȚIE ASUPRA PARALELISMULUI LUI CLIFFORD

Vrem să arătăm că, pentru spațiile cu curbura constantă¹² (cu oricîte dimensiuni), ecuațiile de paralelism *de-a lungul unei geodezice* se integrează imediat, la fel ca în cazul tocmai examinat al varietăților oarecare, dar cu numai două dimensiuni.

Să ne referim, pentru a fixa ideile, la o V_n cu curbura constantă egală cu 1, ceea ce e permis, fără a prejudicia generalitatea, ori de cîte ori (ca în chestiunea analitică de care vrem să ne ocupăm), nu e necesar să distingem între real și imaginar. În consecință, varietatea noastră V_n poate fi privită ca o hipersferă a unui spațiu euclidian cu $n + 1$ dimensiuni, reprezentată în coordonate carteziane de ecuația

$$(16) \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} y_{\nu}^2 = 1.$$

În acest caz este, poate, mai avantajos să nu recurgem la coordonatele intrinsece ale lui V_n , imaginînd atît punctele, cît și direcțiile ei definite cu ajutorul elementelor care le definesc în spațiul euclidian ambiant: punctele prin coordonatele lor carteziane y_n supuse la relațiile (16), direcțiile (α) prin cosinusurile lor directoare α_{ν} legate, în afară de ecuația:

$$(17) \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_{\nu}^2 = 1,$$

¹²și în legătură cu acest subiect se va lua în considerare nota de subsol 10.

și de condiția de apartenență la V_n (adică la hiperplanul tangent):

$$(18) \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu y_\nu = 0.$$

Dată în V_n o linie geodezică C , să vedem cum trebuie să varieze $\alpha_\nu(s)$ de-a lungul lui C pentru ca fiecare să rămână o direcție paralelă (în V_n). Pentru aceasta să reluăm formulele (I) din §2 și să observăm că restricțiile (1) sînt reprezentate acum de o singură ecuație, anume (16). Procedul clasic al lui Lagrange ne permite să substituim ecuațiilor (I) pe cele explicite

$$(19) \quad \alpha'_\nu = \mu y_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n+1),$$

în care μ desemnează un multiplicator a priori nedeterminat. Considerînd aceste ecuații în sistem cu (18), rezultă definite atît α cît și μ . Ecuația (17) e efectiv compatibilă cu (18), (19) pentru că din acestea rezultă:

$$\frac{d}{ds} \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu^2 = 2 \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu \alpha'_\nu = 2\mu \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu y_\nu = 0.$$

Acestea fiind stabilite, să reamintim că, dacă ψ este unghiul dintre (α) și C , atunci

$$\cos \psi = \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu y'_\nu$$

și că (vezi §8) acest unghi rămîne constant (la variația lui s) în virtutea ipotezei că C e geodezică.

Acum, dacă derivăm (18) și ținem seama de (19) și (16), obținem

$$\mu + \cos \psi = 0,$$

astfel că ecuațiile (19) iau forma

$$\alpha'_\nu = -\cos \psi y_\nu$$

și determinarea cosinusurilor $\alpha_n u$ se reduce la cuadraturi. În realitate, nici de asta nu e nevoie. E suficient să observăm întii că pentru $\cos \psi = 0$, adică *pentru direcțiile ortogonale la C* , rezultă $\alpha'_\nu = 0$, astfel că *paralelismul în V_n e caracterizat de constanța unghiurilor α_ν și deci coincide cu paralelismul uzual din spațiul ambiant. Cît despre direcțiile neortogonale la C , se poate recurge la enunțul final al paragrafului 6, de unde concluzia că în V_n , condiția de paralelism constă în formarea unor aceleași unghiuri cu C și cu $n-1$ direcții fixe (independente) ortogonale la C și, bineînțeles, tangente hipersferei (16).*

Fie, în particular, o V_3 . Comportamentul tocmai pus în evidență al direcțiilor paralele care pleacă ortogonal de pe o geodezică C face vizibil faptul că nu e nici o legătură cu paralelismul lui Clifford. Într-adevăr, dacă se consideră ∞^1 geodezice pornind de pe o geodezică C , paralele în sensul lui Clifford, acestea rezultă cu siguranță normale la C , dar tangentele lor nu sînt paralele în spațiul ambiant¹³.

¹³Pentru a justifica această afirmație se poate raționa după cum urmează. Reamintim întii (cf. L. Bianchi, loc. cit. ¹), pag. 46) că geodezicele care formează o congruență Clifford sînt reprezentate parametric de formule de tipul

$$(1) \quad y_\nu = a_\nu \cos s + \sin s \sum_{\rho=1}^4 c_{\nu\rho} a_\rho \quad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

unde parametrul s se identifică cu arcul, coeficienții constanți $c_{\nu\rho}$, caracteristici congruenței, satisfac dubla condiție de semisimetrie ($c_{\nu\rho} + c_{\rho\nu} = 0$) și de ortogonalitate; a_ν (valorile inițiale

11. REDUCEREA ECUAȚILOR DE PARALELISM LA TIPUL SEMISIMETRIC

Sistemul diferențial (I_a) admite (cf. §6) o integrală pătratică. Asta ne permite să afirmăm¹⁴ că e posibil, după o transformare lineară convenabilă a necunoscutelor să reducem sistemul la forma semisimetrică:

$$(II) \quad \frac{dz_h}{ds} = \sum_{k=1}^n p_{hk} z_k \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

caracterizată de relațiile

$$(20) \quad p_{hk} + p_{kh} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

între coeficienți (care, altfel, sînt presupuși funcții oarecare de s). Pentru aceasta e suficient ca transformarea lineară între $\xi^{(i)}$ și z_h să aducă integrala pătratică la forma canonică:

$$\sum_{h=1}^4 z_h^2 = \text{const.}$$

Concret, punînd în evidență și aspectul geometric al transformării, trebuie să procedăm după cum urmează.

Să presupunem că din fiecare punct P al lui C pleacă, arbitrar, $n - 1$ direcții care, împreună cu cea a lui C , constituie un n -uplu ortogonal Ω . Făcînd să corespundă aceste direcții numerelor $1, 2, \dots, n - 1$, să indicăm cu $\lambda_h^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) parametrii corespunzători celei de pe poziția h , adică sistemul de coordonate contravariant și cu $\lambda_{h/i}$ momentele (sistemul de coordonate covariant). Pentru uniformitatea notației, vom atribui incele n direcții lui C , care completează n -uplul și vom pune corespunzător:

$$(21) \quad x'_i = \lambda_n^{(i)}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j = \lambda_{n/i} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

ale lui y_ν sînt legate de ecuația (16), dar variază (în toate modurile posibile) de la o geodezică la alta a congruenței. Să multiplicăm (1) cu $c_{\mu\nu}$ și să sumăm după ν de la 1 la 4. Ținînd cont de identitățile

$$\sum_{\rho=1}^4 c_{\mu\nu} c_{\nu\rho} = - \sum_{\rho=1}^4 c_{\mu\rho} c_{\rho\nu} = -\varepsilon_{\mu\rho} \quad (\mu, \rho = 1, 2, 3, 4; \varepsilon_{\mu\rho} = 0 \text{ dacă } \mu \neq \rho \text{ și } = 1 \text{ dacă } \mu = \rho),$$

se obține imediat (schimbînd în calculul făcut μ în ν și ν în ρ)

$$(2) \quad \sum_{\rho=1}^4 c_{\nu\rho} y_\rho = \cos s \sum_{\rho=1}^4 c_{\nu\rho} a_\rho - a_\nu \sin s \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Cosinusurile directe ale unei curbe oarecare (1) (într-un punct generic al său) sînt evident reprezentate de derivatele lui y_ν în raport cu arcul:

$$y'_\nu = -a_\nu \sin s + \cos s \sum_{\rho=1}^4 c_{\nu\rho} a_\rho$$

care, în virtutea ecuațiilor (2), se pot exprima în funcție de coordonatele y_ν (ale punctului din care pleacă respectiva geodezică a congruenței) sub forma:

$$y'_\nu = \sum_{\rho=1}^4 c_{\nu\rho} y_\rho, \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Cum determinantul lui $c_{\nu\rho}$ nu se anulează (valoarea sa absolută e 1), la două puncte distincte nu pot corespunde niciodată aceleași sinusuri. E exclusă, deci, existența unei curbe C din ale cărei toate puncte să plece, sub aceeași direcție, geodezice ale unei congruențe Clifford. C.c.t.d.

¹⁴Cf., de ex., Darboux, loc. cit. ⁶).

În consecință, vor fi valabile relațiile caracteristice ale n -uplelor ortogonale:

$$(22) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_{h/i} \lambda_k^{(i)} = \varepsilon_{hk}, \quad (h, k = 1, 2, \dots, n)$$

cu semnificația obișnuită a lui ε_{hk} (0 pentru $h \neq k$, 1 pentru $h = k$).

Vom considera Ω și, prin ea, diferitele λ , funcții cunoscute de s (la fel ca x_i, x'_i).

Cu aceste presupuneri, iată cum se explicitează transformarea lineară dorită. Se iau ca elemente determinante ale direcțiilor paralele, în locul parametrilor $\xi^{(i)}$ (sau al elementelor reciproce ξ_i), cosinusurile z_h ale unghiurilor care se formează în fiecare punct cu direcțiile n -uplei. Identitatea geometrică

$$\sum_{h=1}^n z_h^2 = 1$$

ne asigură că se ajunge la un sistem transformat semisimetric. Să dezvoltăm și calculul pentru a găsi expresia explicită a coeficienților p_{hk} .

Noile necunoscute z_h sînt, prin definiție, legate de $\xi^{(i)}$, respectiv de ξ_i prin ecuațiile:

$$(23_a) \quad z_h = \sum_{i=1}^n \xi^{(i)} \lambda_{h/i},$$

$$(23_b) \quad z_h = \sum_{i=1}^n \xi_i \lambda_h^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ținînd cont de relațiile (22), acestea se pot reduce, respectiv, la formele:

$$(24_a) \quad \xi^{(i)} = \sum_{k=1}^n z_k \lambda_k^{(i)},$$

$$(24_b) \quad \xi_i = \sum_{k=1}^n z_k \lambda_{k/i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Să derivăm (23_a) în raport cu s , luînd în considerare și (I_a) (în care, datorită lui (21), vom scrie $\lambda_n^{(j)}$ în loc de x'_j) și înlocuind în membrii ai doilea (după ce vom fi derivat), cantitățile $\xi^{(i)}$ (sau $\xi^{(l)}$) cu valorile (24_a). Dacă, pentru a scurta, punem

$$(25_a) \quad p_{hk} = \sum_{i=1}^n \frac{d\lambda_{h/i}}{ds} \lambda_k^{(i)} - \sum_{ijl=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & i \end{matrix} \right\} \lambda_n^{(j)} \lambda_k^{(l)} \lambda_{h/i} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

ajungem, evident, la formulele (II). Valorile (25_a) ale coeficienților nu pun, totuși, direct în evidență, caracterul semisimetric care, datorită precedentelor observații, le e în mod necesar propriu. L-am putea deriva folosind transformări materiale, ținînd seamă de (22) și de structura simbolilor lui Christoffel. Dar verificarea se face mai comod observînd că aceleași ecuații diferențiale în z_h la care am ajuns mai înainte, trebuie să se poată obține operînd cu același criteriu, dar nu asupra

formulelor (23_a), (24_a), (I_a), ci asupra echivalentelor lor (23_b), (24_b), (I_b). Calculul efectuat astfel furnizează următoarele noi expresii pentru coeficienții p_{hk} :

$$(25_b) \quad p_{hk} = \sum_{i=1}^n \frac{d\lambda_h^{(i)}}{ds} \lambda_k^{(i)} - \sum_{ijl=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & l \end{matrix} \right\} \lambda_n^{(j)} \lambda_{k/l} \lambda_h^{(i)} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Anunțata demonstrație formală rezultă din compararea formulelor (25_a) și (25_b).

Într-adevăr, adunînd expresia lui p_{hk} dată de (25_a) cu cea a lui p_{kh} dată de (25_b), cele două \sum_{ijl} se elimină identic (așa cum se constată schimbînd într-una dintre ele indicii i și l între ei), și rămîne:

$$p_{hk} + p_{kh} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\lambda_{h/i}}{ds} \lambda_k^{(i)} + \frac{d\lambda_k^{(i)}}{ds} \lambda_{h/i} \right),$$

care se anulează în virtutea formulelor (22).

Sistemul linear (II) cu determinant strîmb e o generalizare evidentă a celui pe care-l întîlnim în cinematica corpurilor rigide pentru a determina mișcarea axelor solidului, atunci cînd se dă viteza unghiulară. Pentru teoria acestor sisteme diferențiale, trimitem la lucrările deja citate în introducere (notele ⁴) la ⁷). Vrem, totuși, să punem în evidență cîteva proprietăți elementare ale lor.

1° Efectuînd asupra necunoscutelor z_h o substituție ortogonală arbitrară (dar cu coeficienți depinzînd de s), sistemul transformat rămîne de aceeași formă. Demonstrația rezultă imediat din observația că integrala pătratică $\sum_{i=1}^n z_h^2 = \text{const.}$ (a cărei existență caracterizează sistemele semisimetrice (II)) nu-și schimbă forma cînd z_h sînt supuse unor transformări ortogonale.

2° Dacă C e geodezică, ecuațiile de paralelism (I_a) sînt satisfăcute (cf. §7) de către $\xi^{(i)} = x'_i = \lambda_n^{(i)}$ și, prin urmare, (datorită lui (22) și (23_a)), ecuațiile (II) sînt satisfăcute de

$$(26) \quad z_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1), \quad z_n = 1.$$

De unde rezultă

$$(27) \quad p_{hn} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n-1),$$

pentru orice valoare a lui s . Reciproc, dacă au loc (27), ecuațiile (II) admit soluția (26), iar C e geodezică.

3° Tot în ipoteza că C e geodezică, reducerea sistemului (II) atunci cînd se cunoaște soluția particulară (26) e, ca să spunem așa, automată. Într-adevăr, în virtutea ecuațiilor (27), în primele $n-1$ ecuații (II) nu apare z_n , iar a n -a se reduce la $dz_n/ds = 0$.

4° Oricare ar fi C , dacă se cunosc m direcții paralele independente, adică m soluții independente ale ecuațiilor originale (I_a), se știe din teoria generală a sistemelor lineare că e posibilă o reducere cu m unități. Vrem să arătăm că și aici se ajunge foarte simplu la reducerea efectivă. Și iată cum.

Se începe (profitînd de observația finală din §6) cu normalizarea celor m soluții cunoscute, deducînd un număr egal de soluții mutual ortogonale (ceea ce se face cu operațiuni raționale). Ne imaginăm apoi că substituim enuplului original de direcții Ω asociat oricărui punct al lui C (care conține direcția lui C și alte $n-1$

ortogonale la ea), un alt enuplu ortogonal Ω^* , în care figurează cele m direcții ale noastre furnizate de ortogonalizarea soluțiilor cunoscute.

Cosinusurile directoare z_h^* (ale unei direcții oarecare) față de Ω^* sînt legate de sinusurile directoare z_h , referitoare la Ω , printr-o substituție ortogonală. Sistemul (II), transformat în z_h^* (ceea ce conservă tipul semisimetric), admite astfel, prin construcție, m soluții distincte de tipul: $n - 1$ dintre z^* nule și a n -a egală cu unitatea. Cu această presupunere pentru cele m soluții despre care e vorba, fie ele $z_n^*, z_{n-1}^*, \dots, z_{n-m+1}^*$, se observă imediat că fiecare p_{hk} trebuie să se anuleze pentru

$$h = 1, 2, \dots, n - m, \quad k = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n,$$

astfel că primele $n - m$ ecuații transformate constituie un sistem redus (tot de tip semisimetric) conținînd numai necunoascutele $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-m}^*$, C.C.T.D.

12. SPAȚII CU TREI DIMENSIUNI

Pentru $n = 3$, sistemul (II) e exact cel de care depinde teoria triedrului mobil¹⁵: nu trebuie decît să punem în evidență cealaltă interpretare a rezultatelor, relativ la paralelismul într-o V_3 , de-a lungul unei curbe C date. Să ne restrîngem la cazul, mai simplu, în care C e geodezică. Conform observației a 3-a din paragraful precedent, sistemul diferențial (II) în z_1, z_2, z_3 se reduce în acest caz (cu $z_3 = \text{const.}$, asociat) la sistemul binar

$$\frac{dz_1}{ds} = p_{12}z_2, \quad \frac{dz_2}{ds} = p_{21}z_1.$$

O dată cu relația $p_{12} + p_{21} = 0$ avem și integrala $z_1^2 + z_2^2 = \text{const.}$; desemnînd constanta cu r^2 , putem pune, corespunzător, $z_1 = r \cos \zeta$, $z_2 = r \sin \zeta$, de unde se obține o singură ecuație în ζ

$$\frac{d\zeta}{ds} = p \quad (p = -p_{12} = p_{21}).$$

După cum se vede, ajungem la o simplă cuadratură.

13. LEGĂTURA CANTITĂȚILOR p_{hk} CU COEFICIENȚII DE ROTAȚIE AI LUI RICCI

Să presupunem că C face parte dintr-o congruență (fixată, dar arbitrară) de curbe în V_n . În această ipoteză, $\lambda^{(i)}$ și, deci, $\lambda_{n/i}$ pot fi privite ca funcții de x_1, x_2, \dots, x_n care se reduc, de-a lungul lui C , folosind (3), la funcțiile de s considerate anterior (§11).

Să ne imaginăm că asociem acestei congruențe, din care face parte C , alte $n - 1$ curbe, astfel încît să constituie un enuplu ortogonal, singura condiție fiind să se identifice cu Ω în punctele lui C . Și fie $\lambda_k^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\lambda_{h/i}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ respectivele sisteme de coordonate contravariante și covariante.

Astfel, de-a lungul lui C vom avea

$$\frac{d\lambda_{h/i}}{ds} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} x_j' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} \lambda_n^{(j)},$$

iar (25_a) (în care, în al doilea termen, schimbăm între ei indicii i și l) se poate scrie

$$p_{hk} = \sum_{i,j=1}^n \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)} \left[\frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ l & \end{matrix} \right\} \lambda_{k/l} \right].$$

¹⁵G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2^e édition, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1914), Chap. II, pp. 27-41.

În cantitatea din paranteză recunoaștem derivata covariantă¹⁶ $\lambda_{h/ij}$, astfel că, reamintindu-ne formulele care definesc *coeficienții de rotație*,

$$\gamma_{hkn} = \sum_{i=1}^n \lambda_{h/ij} \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)},$$

ajungem la concluzia că

$$p_{hk} = \gamma_{hkn}, \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Acum, se știe că, în calitate de coeficient de rotație, $\gamma_{hkn} ds$ admite următoarea interpretare: Când originea enuplului Ω se deplasează cu ds de-a lungul lui C , trecînd de la un punct generic P într-un punct foarte apropiat P' , direcția h ¹⁷ în P' nu rămîne, în general, ortogonală direcției k corespunzătoare din punctul P , ci formează cu ea unghiul $\frac{\pi}{2} - \gamma_{hkn} ds$.

Aceeași interpretare o capătă, deci, și $p_{hk} ds$ astfel că recunoaștem în sistemele (II), și sub acest aspect geometric, generalizarea teoriei elementare a triedrului mobil.

14. VARIETĂȚI CU O CONGRUENȚĂ DE CURBE PARALELE RELATIV LA O TRANSVERSALĂ OARECARE

Fie $\xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sistemul de coordonate covariante al unei congruențe de curbe în V_n . Să presupunem că liniile curbe ale acestei congruențe sînt oriunde paralele, adică satisfac condițiile de paralelism de-a lungul oricărei curbe C . Alegînd, în particular, drept C o linie din congruență, vedem că aceasta trebuie să fie formată din geodezice (§7). În general, totul se reduce la exprimarea faptului că ecuațiile de paralelism (în oricare din formele pe care le-am dat), de exemplu (I_b), sînt verificate în orice punct din V_n ¹⁸ și pentru orice direcție x_j . De unde, explicitînd cantitățile $\frac{d\xi_i}{ds}$, (I_b) se scriu

$$\sum_{j=1}^n x^j \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & l \end{matrix} \right\} \xi_l \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ξ_i trebuind să verifice ecuațiile în număr de n^2

$$(28) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & l \end{matrix} \right\} \xi_l = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

care exprimă anularea identică a sistemului covariant ξ_{ij} , primul derivat al sistemului ξ_i .

Din (28) rezultă, în particular,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i},$$

¹⁶Cf. Ricci și Levi-Civita, loc. cit. ¹).

¹⁷Adică direcția definită de parametrii $\lambda_h^{(i)}$ (sau de momentele $\lambda_{h/i}$).

¹⁸Se înțelege, de obicei, din cea parte a lui V_n luată în considerație, în care sînt presupuse satisfăcute limitările calitative necesare.

de unde se vede că ξ_i sînt derivatele unei aceleiași funcții F . Astfel că (13), ori, eventual, ecuația echivalentă

$$\sum_{i,j=1}^n a^{(ij)} \xi_i \xi_j = 1,$$

devine

$$\Delta F = 1 \quad (\Delta \text{ parametru diferențial de 1-ul ordin}),$$

dovedindu-ne că hipersuprafețele $F = \text{const.}$ (ale căror traiectorii ortogonale sînt curbele congruenței noastre) sînt geodezic paralele.

Săluăm, pentru simplitate, funcția F drept coordonată x_n , asociindu-i drept coordonate x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , cele $n - 1$ integrale independente ale ecuației

$$\nabla(x_n, \Theta) = 0 \quad (\nabla \text{ parametru diferențial mixt}),$$

astfel că hipersuprafețele coordonate $x_h = \text{const.}$ ($h = 1, 2, \dots, n - 1$) sînt ortogonale pe cele cu $x_n = \text{const.}$ Vom avea așadar

$$(29) \quad a^{(nj)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1), \quad a^{(nn)} = 1,$$

ca și

$$\xi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1), \quad \xi_n = 1;$$

iar ecuațiile (28) se vor reduce la

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ n \end{matrix} \right\} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

sau încă, ținînd seamă de identitatea

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ n \end{matrix} \right\} = \sum_{h=1}^n a^{(hn)} a_{ij,h}$$

și de ecuațiile (29), la următoarele:

$$a_{ij,n} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Dacă observăm că ecuațiile (29) sînt echivalente cu cele analoage relativ la elementele reciproce:

$$(29') \quad a_{nj} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n - 1), \quad a_{nn} = 1,$$

și ne aducem aminte că

$$a_{ij,n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{in}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{nj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n} \right),$$

rezultă, în definitiv,

$$(28') \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Ecuațiile (29') și (28') arată că ds^2 capătă forma

$$(30) \quad dx_n^2 + d\sigma^2,$$

unde cu $d\sigma^2$ am notat pătratul unui element linear arbitrar în cele $n - 1$ variabile x_1, x_2, \dots, x_{n-1} (cu coeficienți independenți de x_n).

Deoarece¹⁹ forma (30) e caracteristică varietăților care admit o infinitate simplă de *suprafețe geodezice*²⁰, recunoaștem astfel că *cele două proprietăți ale unei varietăți V_n , de a admite ∞^1 suprafețe geodezice și de a conține o congruență cu paralelism complet, au loc întotdeauna simultan.*

15. DIFERENȚIALE DE ORDINUL AL 2-LEA – DETERMINĂRI INVARIANTE – LEMA LUI RICCI

Într-o cercetare dată, fie fixate variabilele independente, de exemplu x_1, x_2, \dots, x_n . După cum se știe de la analiză, avem întotdeauna dreptul să considerăm nule diferențialele secunde $d^2x_1, d^2x_2, \dots, d^2x_n$. Dar o asemenea convenție nu are caracter invariant relativ la schimbările de variabile. Într-adevăr, dacă înlocuim x_i -urile cu n combinații independente ale lor $x'_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, diferențialele secunde

$$d^2x'_i = \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial x'_i}{\partial x_j \partial x_l} dx_j dx_l$$

(calculate în baza ipotezei $d^2x_i = 0$) rezultă, în general, diferite de zero.

Dacă variabilelor li se asociază o formă diferențială pătratică, să ne gândim, de exemplu, la metrica unei V_n (cu notațiile din §§ precedente), o caracterizare invariantă devine foarte la îndemână. E suficient să presupunem d^2x_i (nenuli, dar) definiți după cum urmează:

$$d^2x_i + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ & i \end{matrix} \right\} dx_j dx_l = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Din ecuațiile geodezicelor (§7), înmulțite cu ds^2 , se vede că asemenea d^2x_i corespund variabilelor de-a lungul geodezicei izvorite din punctul generic (x_1, x_2, \dots, x_n) în direcția, de asemenea generică, $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$. Această interpretare geometrică asigură a priori doritul caracter invariant al convenției mai sus menționate, fără a mai fi necesară o verificare materială, care, de altfel, poate fi făcută într-o manieră evidentă.

La fel în ce privește suprapunerea a două sisteme independente de creșteri dx_i și δx_i . S-ar putea pune $d\delta x_i = \delta dx_i = 0$, dar, în timp ce comutarea creșterilor d și δ are, cum lesne se vede, caracter invariant, nu la fel se întâmplă cu pozițiile $d\delta x_i = 0$. Le vom înlocui cu

$$(31) \quad d\delta x_i + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ & i \end{matrix} \right\} dx_j \delta x_l = 0,$$

care implică

$$(31') \quad d\delta x_i = \delta dx_i,$$

și conțin drept caz particular, pentru $d = \delta$, precedentele expresii ale lui d^2x_i .

Invarianța ecuațiilor (31) la schimbări de variabilă se poate deduce aici și din interpretarea geometrică. E de-ajuns să observăm că, punând $\delta x_i = \varepsilon \xi^{(i)}$ (cu ε constantă infinitezimală), (31) se identifică cu (I_a) , astfel că exprimă felul în care trebuie să se modifice δx_i în urma deplasării $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, pentru a defini

¹⁹Cf. J. Hadamard, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions*, Bulletin des Sciences Mathématiques, t. XXV (1901), pp. 37-40.

²⁰Se numesc suprafețe geodezice acele (eventuale) varietăți cu $n-1$ dimensiuni imersate într-o V_n , care conțin în întregime geodezica lui V_n care conjugă două puncte arbitrare ale lor.

direcții paralele între ele. În afara unei verificări directe, această proprietate de invarianță se poate proba cu un elegant artificiu formal indicat de Riemann²¹ și explicitat de Weber²².

Din (31), ținând seamă că

$$da_{ik} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} dx_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (a_{ij,k} + a_{jk,i}) dx_j = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n \left[a_{lk} \begin{Bmatrix} i & j \\ & l \end{Bmatrix} = a_{li} \begin{Bmatrix} j & k \\ & l \end{Bmatrix} \right] dx_j,$$

rezultă identic

$$(32) \quad d \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \delta x_h \delta x_k = 0,$$

ca și

$$d \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx_h dx_k = 0.$$

Aceste relații sînt echivalente cu binecunoscutul rezultat de calcul diferențial absolut că sistemul derivat covariant al coeficienților a_{ik} ai formei fundamentale se anulează identic (lema lui Ricci).

16. DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR. UN INVARIANT CARE REZUMĂ
SIMBOLURILE LUI RIEMANN, FURNIZÎNDU-LE ÎNTR-UN MOD MAI DIRECT
EXPRESIA EXPLICITĂ

În urma aplicării repetate a formulelor (31), rămîn, cu siguranță, definite (în funcție de diferențialele prime, de simbolurile lui Christoffel și de derivatele lor) și diferențialele superioare de tipul $d' \delta dx_i$, $\delta d' dx_i$, simbolul d' trebuind tratat în același mod cu d și δ .

Nu se poate afirma că $d' \delta dx_i$ coincide cu $\delta d' dx_i$, dimpotrivă, un calcul efectiv arată că lucrurile nu stau așa. Diferențele

$$(33) \quad u^{(i)} = d' \delta dx_i - \delta d' dx_i$$

posedă, totuși, remarcabila proprietate de a constitui un sistem covariant.

Pentru demonstrație, să considerăm un sistem covariant auxiliar p_i , constituit din n funcții de x (fără intervenția diferențialelor) și să pornim prin a observa că (întrucît sistemul p_i e presupus covariant)

$$\sum_{i=1}^n p_i dx_i$$

e un invariant. Invariantă e deci (pentru că și operatorii d' și δ sînt invariante) și diferența

$$G = d' \delta \sum_{i=1}^n p_i dx_i - \delta d' \sum_{i=1}^n p_i dx_i = d' \sum_{i=1}^n (\delta p_i dx_i + p_i \delta dx_i) - \delta \sum_{i=1}^n (d' p_i dx_i + p_i d' dx_i).$$

Dezvoltînd și ținînd seamă că, datorită lui (31'),

$$d' \delta p_i = \delta d' p_i,$$

²¹I. c. 2), p. 381.

²²I. c. 2), p. 388.

se obține

$$G = \sum_{i=1}^n p_i (d' \delta dx_i - \delta d' dx_i) = \sum_{i=1}^n p_i u^{(i)},$$

de unde se vede că și $\sum_{i=1}^n p_i u^{(i)}$ e un invariant. Din această invarianță și din faptul că p_i sînt arbitrare (sînt funcții de x , supuse numai condiției de a se transforma după o lege covariantă atunci cînd se face o schimbare de variabilă), rezultă contravarianța sistemului $u^{(i)}$ definit de (33).

Așadar rezultă invariant

$$(34) \quad I = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u^{(i)} \delta' x_k,$$

unde $\delta' x_k$ reprezintă un sistem arbitrar de creșteri ale variabilelor.

Cum din (31) urmează

$$\begin{aligned} d' \delta dx_i &= -d' \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\} dx_j \delta x_l \\ &= - \sum_{j,l,h=1}^n \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} d' x_h dx_j \delta x_l - \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\} (d' dx_j \delta x_l + dx_j d' \delta x_l), \\ \delta d' dx_i &= -\delta \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\} dx_j d' x_l \\ &= - \sum_{j,l,h=1}^n \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} \delta x_h dx_j d' x_l - \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\} (\delta dx_j d' x_l + dx_j \delta d' x_l), \end{aligned}$$

prin scădere (după ce am schimbat pe h cu l în prima sumă) se ajunge la

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= d' \delta dx_i - \delta d' dx_i \\ &= \sum_{j,l,h=1}^n \left[\frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\}}{\partial x_h} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} j & h \\ i & \end{matrix} \right\}}{\partial x_l} \right] dx_j d' x_l \delta x_h - \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\} (d' dx_j \delta x_l - \delta dx_j d' x_l). \end{aligned}$$

Tot din (31) rezultă

$$d' dx_j = - \sum_{h,t=1}^n \left\{ \begin{matrix} h & t \\ j & \end{matrix} \right\} dx_h d' x_t, \quad \delta dx_j = - \sum_{h,t=1}^n \left\{ \begin{matrix} h & t \\ j & \end{matrix} \right\} dx_h \delta x_t,$$

astfel că, schimbînd indicii în așa fel încît să ajungem la factorul comun $dx_j d' x_l \delta x_h$, ajungem la

$$- \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i & \end{matrix} \right\} (d' dx_j \delta x_l - \delta dx_j d' x_l) = \sum_{j,l,h=1}^n dx_j d' x_l \delta x_h \sum_{t=1}^n \left[\left\{ \begin{matrix} t & h \\ i & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & l \\ t & \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} t & l \\ h & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & h \\ t & \end{matrix} \right\} \right],$$

și obținem, în fine

$$(35) \quad u^{(i)} = \sum_{j,l,h=1}^n dx_j d'x_l \delta x_h \{j i, l h\},$$

unde am notat

$$\{j i, l h\} = \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} j & l \\ i & i \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_h} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} j & h \\ i & i \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_l} + \sum_{t=1}^n \left[\left\{ \begin{smallmatrix} j & l \\ t & t \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} t & h \\ i & i \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} j & h \\ t & t \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} t & l \\ i & i \end{smallmatrix} \right\} \right]$$

simbolurile lui Riemann de a 2-a speță.

Să trecem la cele de prima speță punînd

$$(37) \quad a_{jk, lh} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \{j i, l h\},$$

expresia (34) a lui (I) devine, datorită lui (35)

$$(34') \quad I = \sum_{j,l,h,k=1}^n a_{jk, lh} dx_j d'x_l \delta x_h \delta'x_k$$

și pune direct în evidență caracterul covariant al simbolurilor (37). Dacă nu mă înșel, acesta e modul cel mai rapid pentru a ajunge aici. Cît despre proprietățile acestor simboluri, cuprinse în formulele

$$\begin{aligned} a_{jk, lh} &= -a_{jk, hl}, \\ a_{jk, lh} &= a_{lh, jk}, \end{aligned}$$

nu mai rămîne decît să ne referim la modul obișnuit de a le trata, obținîndu-le (prima imediat, a doua cu cîteva transformări) din formulele de definiție.

Trebuie în schimb să ne îndreptăm atenția asupra interpretării geometrice a invariantului I în cazul deosebit de important în care diferențialele independente se reduc la două, atunci cînd d' coincide cu d și δ' cu δ .

17. PARALELOGRAMOIZI – BAZĂ ȘI SUPRABAZĂ. DEZVOLTAREA COORDONATELOR VÎRFURILOR PLECÎND DE LA BAZĂ

Fie PQ un arc generic de geodezică pe varietatea vnoastră V_n . Să ne imaginăm că din punctele P și Q pleacă alte două geodezice în direcții paralele. Ele formează (§8) cu PQ un același unghi ψ . Considerăm, pe aceste geodezice, două arce egale

$$PP' = QQ' = ds,$$

și unim P' și Q' cu un arc de geodezică. Se obține astfel un patrulater geodezic pe care-l vom numi *paralelogramoid*, desemnînd laturile opuse PQ și $P'Q'$ drept *bază* și *suprabază*.

Vom nota cu $x_i^{(P)}$, $x_i^{(Q)}$, $x_i^{(P')}$, $x_i^{(Q')}$ coordonatele vîrfurilor P , Q , P' , Q' , cu $\xi_P^{(i)}$, $\xi_Q^{(i)}$ parametrii de direcție ai celor două geodezice paralele în punctele lor de origine, cu $\left\{ \begin{smallmatrix} j & l \\ i & i \end{smallmatrix} \right\}_P$, $\left\{ \begin{smallmatrix} j & l \\ i & i \end{smallmatrix} \right\}_Q$ valorile coeficienților lui Christoffel în aceleași puncte.

Din ecuațiile geodezicelor, neglijînd termenii de ordin superior lui 2 în ds , avem

$$(38) \quad \begin{cases} x_i^{(P')} = x_i^{(P)} + ds\xi_P^{(i)} - \frac{1}{2}ds^2 \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\}_P \xi_P^{(j)} \xi_P^{(l)}, \\ x_i^{(Q')} = x_i^{(Q)} + ds\xi_Q^{(i)} - \frac{1}{2}ds^2 \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\}_Q \xi_Q^{(j)} \xi_Q^{(l)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Să notăm cu δx_i diferențele $x_i^{(Q')} - x_i^{(P')}$ și, în general, cu δf variația determinării oricărui element f (numeric sau geometric) f care trece din P în Q . Din (38), obținem prin scădere

$$x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + ds\delta\xi^{(i)} - \frac{1}{2}ds^2\delta \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(j)} \xi^{(l)}$$

Cum, prin chiar construcția lui, ds nu se schimbă la trecerea din P în Q , atunci, considerîndu-l în continuare infinitezimal și punînd, pentru simplitate,

$$dx_i = \xi_P^{(i)} ds,$$

ținînd seamă și de (31) cu $\delta = d$, mai putem scrie:

$$(39) \quad Dx_i = x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + \delta dx_i + \frac{1}{2}\delta d^2 x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Se vede de aici că diferențele Dx_i ale coordonatelor omoloage ale punctelor P' și Q' sînt (cu aproximația convenită relativ la ds) de ordinul întii față de variația δ : cu alte cuvinte, indicînd cu δs arcul PQ și tratîndu-l ca pe o infinitezimală (independent de ds), diferențele Dx_i rezultă de asemenea infinitezimale de primul ordin (cel puțin) față de δs . Așadar, ecuațiile (39) furnizează o expresie care e exactă:

pîna la ordinul al doilea față de ds ;

pîna la ordinul întii față de δs .

Din semnificația simbolurilor d și δ care apar în (39), rezultă imediat că, asemenea lui d^2 , și δd , δd^2 se explicitează conform lui (31). Și e aproape inutil să mai spunem că, în toate calculele făcute, toate funcțiile de poziție se referă la punctul P .

18. LUNGIMEA SUPRABAZEI. – CURBURĂ

Să reprezentăm prin a'_{ik} coeficienții pătratului elementului linear în P' . În virtutea comportamentului deja observat al lui Dx_i , putem privi

$$(40) \quad \sum_{i,k=1}^n a'_{ik} Dx_i Dx_k$$

ca expresie a pătratului distanței $\overline{P'Q'}^2$, neglijînd termenii de ordin superior lui 2, fie în ds , fie în δs .

Merită să menționăm (cu aceeași aproximație) și valorile lui a'_{ik} în punctul P . E suficient, pentru asta, să dezvoltăm de-a lungul geodezicei PP' , neglijînd termenii în ds^3 . O să avem

$$(41) \quad a'_{ik} = a_{ik} + da_{ik} + \frac{1}{2}d^2 a_{ik}.$$

Un transport analog se poate pune în evidență pe o Dx_i generică, adăugînd și scăzînd termenul $\frac{1}{2}d^2\delta x_i$ (și amintindu-ne că $\delta dx_i = d\delta x_i$). Astfel, ecuațiile (39) devin

$$(39') \quad Dx_i = D'\delta x_i - \frac{1}{2}v^{(i)},$$

unde

$$(42) \quad D'\delta x_i = \delta x_i + d\delta x_i + \frac{1}{2}d^2\delta x_i,$$

$$(43) \quad v^{(i)} = d\delta dx_i - \delta d^2x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

După cum se vede, $v^{(i)}$ sînt de ordinul al treilea (al doilea în ds , primul în δs). Astfel că substituirea lor efectivă în (40), neglijînd termenii de ordin (total) mai mare decît patru, furnizează

$$\overline{P'Q'}^2 = \sum_{i,k=1}^n a'_{ik} D'\delta x_i D'\delta x_k - \sum_{i,k=1}^n a'_{ik} v^{(i)} D'\delta x_k.$$

Conform ecuațiilor (41), (42), și cu aceeași aproximație, prima sumă se poate pune sub forma

$$\delta s^2 + d\delta s^2 + \frac{1}{2}d^2\delta s^2,$$

unde

$$\delta s^2 = \overline{PQ}^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \delta x_i \delta x_k,$$

iar a doua sumă se reduce la

$$J = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} v^{(i)} \delta x_k.$$

Acum, ca urmare a lui (33), $d\delta s^2$ se anulează identic; la fel se întîmplă, așadar, și cu $d^2\delta s^2$. Astfel că rămînem cu

$$(44) \quad \overline{P'Q'}^2 = \overline{PQ}^2 - J,$$

dar rămîne să-i atribuim lui J expresia sa definitivă. Aceasta rezultă din faptul că, datorită lui (43), J poate fi considerat ca un caz particular al invariantului I definit de (34): e suficient să luăm d' egal cu d și δ' cu δ . Astfel că din (34') urmează

$$(45) \quad J = \sum_{j,l,h,k=1}^n a_{jk, lh} dx_j dx_l \delta x_h \delta x_k.$$

Sîntem acum în măsură să furnizăm o caracterizare intrinsecă a curburii sub următoarea formă geometrică:

Fie construit în V_n paralelogramoidul infinitesimal $PQP'Q'$. Facem raportul

$$(46) \quad K = \frac{\overline{PQ}^2 - \overline{P'Q'}^2}{(ds\delta s \sin \psi)^2}$$

dintre diferența pătratelor bazei și suprabazei și pătratul ariei paralelogramoidului²³. Așadar, datorită lui (44), acest raport

$$(47) \quad K = \frac{J}{(ds\delta s \sin \psi)^2}$$

constituie curbura riemanniană a lui V_n în P în funcție de înclinarea paralelogramoidului. Coincidența cu expresia obișnuită²⁴ rezultă din (45).

O dată recunoscut K ca depinzând numai de punctul P și de înclinare, din (46) derivă următorul corolar: Toți paralelogramoizii echivalenți care stau pe aceeași bază (și au aceeași înclinare) au suprabaze de lungime egală.

Aș vrea să mai menționez, din punct de vedere sistematic, că, dincolo de a fi stabilit o nouă proprietate a curburii riemanniene, procedeul pe care l-am descris prezintă față de tratarea obișnuită și avantajul de a evita anumite dezvoltări formale. Într-adevăr, de obicei se definește curbura lui V_2 în unul dintre modurile puse în evidență de Gauss; apoi se trece la V_n făcând să apară V_2 -urile formate de geodezicele cu o aceeași înclinare. E, deci, necesar, un calcul destul de complicat pentru a recunoaște că expresia curburii riemanniene a acestor V_2 -uri e dată de (47).

Dacă, în schimb, se adoptă pentru K definiția geometrică (46), pe de o parte reiese mai expresivă traducerea analitică ducând la (47). Iar pe de altă parte, aceeași definiție fiind valabilă și pentru $n = 2$, apare cu claritate că valoarea curburii lui V_n dedusă dintr-un paralelogramoid generic coincide cu aceea a unei V_2 arbitrare care (la limită) conține respectivul paralelogramoid.

NOTĂ CRITICĂ

Am arătat deja în §15 că expresiile (31)

$$d\delta x_i + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \delta x_l = 0$$

ale diferențialelor de ordinul al doilea nu diferă de cele la care se ajunge explicitînd definiția corespunzătoare a lui Riemann.

Din același paragraf mai rezultă și că, folosind aceste expresii ale diferențialelor secunde, avem identitatea (lema lui Ricci):

$$(48) \quad \delta ds^2 = d\delta s^2 = d\Phi = \delta\Phi = 0,$$

unde

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx_i \delta x_k,$$

iar ds^2 , δs^2 , înseamnă, cum bine se înțelege,

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} dx_i dx_k, \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \delta x_i \delta x_k,$$

respectiv.

Așa stînd lucrurile, nu mai pare ambiguă semnificația de atribuit trinomului considerat de Riemann

$$R = \delta^2 ds^2 - 2d\delta\Phi + d^2\delta s^2,$$

²³Mai precis, al oricărei porțiuni de suprafață cu două dimensiuni al cărei contur e paralelogramoidul și care tinde la zero o dată cu el.

²⁴L. Bianchi, loc. cit. ¹), pp. 341-342.

iar o asemenea semnificație, datorită lui (48), implică în mod necesar $R = 0$.

În schimb, Riemann afirmă²⁵: “Haec expressio (adică R) invenietur = J (avînd J valoarea (45)). Weber, în lămuririle sale, se oprește îndelung asupra modului de a introduce diferențialele secunde²⁶, dar, după ce le-a obținut expresia explicită, spune doar²⁷: “woraus man leicht den Ausdruck erhält $R = J$ ”.

Probabil că în R -ul lui Riemann e numai vreun viciu de scriitură care îi înceteșează semnificația. Sînt mîndru că am reconstruit această semnificație, dar n-am putut să-i modific simbolul. Dacă lucrul se poate face, ar fi bine să se dea credit deplin, și în această chestiune particulară, geniului lui Riemann.

Voi termina cu o observație despre calculul curburii în anumite variabile speciale, indicat de Riemann²⁸ și dezvoltat de Weber²⁹. Dar iată despre ce e vorba.

Să alegem coordonate x_1, x_2, \dots, x_n astfel ca, într-un punct P fixat, să se anuleze toate simbolurile $\left\{ \begin{smallmatrix} j & l \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ (lucru posibil întotdeauna, după cum foarte bine explică Weber). Fie două sisteme independente de diferențiale $dx_i, \delta x_i$, considerînd nule toate diferențialele secunde $d^2 x_i, d\delta x_i, \delta dx_i, \delta^2 x_i$. Să notăm cu P' și Q punctele de coordonate $x_i + dx_i, x_i + \delta x_i$; și cu a'_{hk} coeficienții pătratului elementului linear în P' . În particular, să punem

$$(\delta s^2)_{P'} = \sum_{h,k=1}^n a'_{hk} \delta x_h \delta x_k,$$

și să aplicăm lui a' dezvoltarea Taylor relativ la creșterile d , pînă la ordinul al doilea inclusiv. Cu această aproximație avem

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{2} \sum_{h,k,j,l=1}^n \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j \partial x_l} dx_j dx_l \delta x_h \delta x_k,$$

δs^2 și derivatele secunde referindu-se, evident, la P . Așa cum arată Weber, din felul cum au fost alese variabilele, au loc relații speciale între derivatele secunde ale lui a_{hk} în P . Ținînd cont de ele, cu cîteva transformări, găsim

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{3} \sum_{h,k,j,l=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{hj}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_h \partial x_j} \right] dx_j dx_l \delta x_h \delta x_k.$$

Suma poate fi privită drept expresia pe care, în baza formulei (45), o ia $-I$, cînd se particularizează ca mai sus variabilele x .

De unde, ținînd seamă de (47), obținem

$$(49) \quad \frac{(\delta s^2)_{P'} - \delta s^2}{(ds \delta s \sin \psi)^2} = -\frac{1}{3} K,$$

pe care Riemann, în pasajul citat, o enunță în cuvinte (multiplicînd ambii membri cu 4, pentru a pune în evidență la numitor aria triunghiului $PP'Q$).

²⁵l.c. 2), p. 381.

²⁶Adăugînd, fără nici o justificare, condițiile suplimentare

$$d^2 \delta s^2 = \delta^2 ds^2 = -2d\delta\Phi.$$

Conform lui (48) (și dacă formulele trebuie citite așa cum sînt efectiv scrise) totul se anulează.

²⁷l.c. 2), p. 388.

²⁸l.c. 2), p. 261.

²⁹l.c.2), p. 384–387.

Ajung în fine la observația mea.

Să notăm Q' extremitatea elementului linear $(\delta s)_{P'}$ (corespunzător creșterilor δx_i). Acum (49) se scrie

$$(49') \quad \frac{\overline{P'Q'^*}^2 - \overline{PQ}^2}{(ds\delta s \sin \psi)^2} = -\frac{1}{3}K;$$

în timp ce (46) (cu semn schimbat) furnizează

$$(46') \quad \frac{\overline{P'Q'^2} - \overline{PQ}^2}{(ds\delta s \sin \psi)^2} = -K$$

Membrii din dreapta stau, după cum se vede, în raportul 1 la 3. În mod evident, necoincidența lor se datorește faptului că punctul Q' (al patrulea vîrf al paralelogramoidului), la care se ajunge prin procedeul invariant, e perfect distinct de punctul Q^* al lui Riemann, definit analitic în funcție de niște variabile speciale.

Pentru a localiza diferența dintre formule, e util să exprimăm și procedeul nostru la variabilele speciale ale lui Riemann (așa cum e, în mod natural permis, dat fiind caracterul invariant). Atunci (31) dau în punctul P

$$d^2 x_i = d\delta x_i = \delta dx_i = \delta^2 x_i = 0;$$

dar nu rezultă de aici că în acel punct trebuie să se anuleze și diferențialele superioare, ca $\delta d^2 x_i$, $d^2 \delta x_i$ etc. În schimb, calculul lui Riemann se bazează pe ipoteza că se anulează toate diferențialele de ordin superior lui 1: ipoteză legitimă și ea, dar nu dotată cu un caracter invariant (la schimbări de variabile). Așa că nu trebuie să ne surprindă faptul că rezultatele diferă; vom observa mai curînd împlătoarea analogie a formulilor (49') și (46'), ai căror membri dreپți diferă numai printr-un factor numeric.

Padova, noiembrie 1916.

TULLIO LEVI-CIVITA

INDICE

Introducere	1
1. Preliminarii	3
2. Direcții paralele în V_n de-a lungul unei curbe fixate	5
3. Forma intrinsecă a condițiilor de paralelism	6
4. Comparație cu comportamentul euclidian. Proprietatea sa caracteristică cu privire la paralelism	7
5. Altă formă a ecuațiilor (I_a). Dependența de o singură funcție	7
6. Integrală pătratică – Conservarea unghiurilor. Compunerea soluțiilor ortogonale	9
7. Geodezice – Proprietatea lor caracteristică în ce privește direcția	10
8. Înclinarea pe curba de transport	10
9. Cazul suprafețelor obișnuite	11
10. Spații cu curbură constantă – Observație asupra paralelismului lui Clifford	12
11. Reducerea ecuațiilor de paralelism la tipul semisimetric	14
12. Spații cu trei dimensiuni	17
13. Legătura cantităților p_{hk} cu coeficienții de rotație ai lui Ricci	17

14. Varietăți cu o congruență de curbe paralele relativ la o transversală oarecare	18
15. Diferențiale de ordinul al 2-lea – Determinări invariante – Lema lui Ricci	20
16. Diferențiale de ordin superior. Un invariant care rezumă simbolurile lui Riemann, furnizându-le într-un mod mai direct expresia explicită	21
17. Paralelogramoizi – Bază și suprabază. Dezvoltarea coordonatelor vîrfurilor plecînd de la bază	23
18. Lungimea suprabazei. – Curbură	24
NOTĂ CRITICĂ	26