NOŢIUNEA DE PARALELISM ÎNTR-O VARIETATE OARECARE ŞI DETERMINAREA GEOMETRICĂ CORESPUNZĂTOARE A CURBURII RIEMANNIENE

Memoriu de T. LEVI-CIVITA (Padova)

Şedinţa din 24 decembrie 1916.

INTRODUCERE

Teoria gravitaţiei a lui Einstein (a cărei acceptatare se datoreşte explicării faimoasei inegalităţi seculare observate în periheliul lui Mercur şi care nu e prevăzută de legea lui Newton) consideră că fenomenele fizice care au loc în spaţiul ambiant sînt intim legate de proprietăţile geometrice ale acestuia şi le determină într-o oarecare măsură; spre deosebire de teoriile clasice care presupun întreg spaţiul fizic un dat *a priori*. În dezvoltarea matematică a grandioasei concepţii a lui Einstein (care îşi găseşte în calculul diferenţial al lui Ricci instrumentul algoritmic natural), intervine ca un element esenţial curbura unei anumite varietăţi cu patru dimensiuni şi simbolurile corespunzătoare ale lui Riemann. Întîlnirea şi, mai ales, mînuirea continuă a acestor simboluri în chestiuni de un mare interes general m-au condus la a cerceta dacă nu s-ar putea reduce întrucîtva aparatul formal care serveşte îndeobşte la introducerea lor şi la stabilirea comportamentului lor covariant[1].

O perfecţionare în acest domeniu este efectiv posibilă şi constituie substanţa paragrafelor 15 şi 16 din prezenta lucrare care, concepută iniţial cu numai acest scop, s-a tot amplificat pentru a face locul cuvenit şi interpretării geometrice.

Am crezut la început că voi găsi, fără doar şi poate, interpretarea geometrică în lucrările originale ale lui Riemann "Über die Hypothesen welche Geometrie zu Grunde liegen" şi "Commentatio mathematica..."[2]; dar nu era decît un embrion. Într-adevăr, pe de o parte, apropiindu-te de sursele citate ai impresia că Riemann chiar avea în minte acea caracterizare a curburii intrinsece şi invariante care va fi precizată aici (§17-18). Totuşi, pe de altă parte, nici în Riemann, nici în comentariul explicativ datorat lui Weber[3], nu există nici o urmă despre acele specificări (noţiunea de direcţii paralele într-o varietate oarecare şi considerarea unui patrulater geodezic infinitezimal cu două laturi paralele) pe care le vom recunoaşte ca indispensabile din punct de vedere geometric. În plus, nu se reuşeşte - eu, cel puţin, nu am reuşit - justificarea trecerii formale cu care, după Riemann, s-ar ajunge de la presupunerile iniţiale inatacabile la tot atît de perfecta formulă finală a curburii.

[1]Cf., de exemplu, L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I (Pisa, Spoerri, 1902), pp. 69-72.

[2]B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke* (Leipzig, Teubner 1876), pp. 261-263, 381-382.

[3]*loc. cit.* [2]), pp. 384-389.

Voi prezenta cititorului, într-o notă critică finală, această îndoială a mea, furnizîndu-i şi elementele necesare judecăţii.

Prima şi cea mai extinsă parte a memoriului (§1-14) e destinată introducerii şi ilustrării noţiunii de paralelism într-o V_n cu metrică oarecare.

Începem din domeniul infinitezimal, încercînd să caracterizăm paralelismul a două direcţii (α), (α') care pornesc din două puncte foarte apropiate P şi P'. E necesar să reamintim că orice varietate V_n se poate privi ca imersată într-un spaţiu euclidian S_N cu un număr sufiecient de mare de dimensiuni şi, mai ales că, fixînd prin P o direcţie generică (f) alui S_N, paralelismul obişnuit într-un asemenea spaţiu ar cere

$$\text{unghiul}\widehat{(f)(\alpha)} = \text{unghiul}\widehat{(f)(\alpha')},$$

pentru oricare (f). Altfel spus, paralelismul în V_n se defineşte limitînd validitatea condiţiei la *toate direcţiile* (f) *care aparţin la* V_n (adică la partea din S_N tangentă în P la V_n).

Pentru justificarea acestei definiţii se va nota că, în timp ce ea reproduce, aşa cum e firesc, comportamentul elementar pentru acele V_n euclidiene, are, în orice caz, caracter intrinsec pentru că, în definitiv, rezultă dependentă doar de metrica lui V_n, nu şi de spaţiul ambiant auxiliar S_N. Într-adevăr, traducerea analitică a noţiunii noastre de paralelism se concretizează după cum urmează: Raportată V_n la coordonate generale x_i $(i = 1, 2, ..., n)$, fie dx_i creşterile corespunzătoare trecerii de la P la P'; $\xi^{(i)}$ parametrii unei direcţii generice (α) pornind din P; $\xi^{(i)} + d\xi^{(i)}$ aceia ai unei direcţii infinit apropiate (α'), ieşind din P'. Condiţia de paralelism e exprimată de cele n ecuaţii

$$(A) \qquad d\xi^{(i)} + \textstyle\sum_{j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} dx_j \xi^{(l)} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

unde $\begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix}$ desemnează cunoscutele simboluri ale lui Christoffel.

O dată găsită legea prin care se trece de la un punct la unul infinit vecin, sîntem, fără îndoială, pregătiţi să efectuăm transportul direcţiilor paralele de-a lungul unei curbe oarecare C. Dacă $x_i = x_i(s)$ sînt ecuaţiile ei parametrice, e evident suficient ca în (A) să privim x_i şi, în consecinţă $\begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix}$ ca funcţii cunoscute, $\xi^{(i)}$ ca funcţii de determinat, depinzînd de parametrul s şi avem sistemul liniar ordinar

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx_j}{ds}\, \xi^{(l)} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

reductibil la o formă tipică (zis cu determinant strîmb) care a apărut deja în alte cercetări şi a făcut obiectul unor studii sistematice din partea domnilor Eiesland[4], Laura[5], Darboux[6], Vessiot[7].

Iată cîteva consecinţe geometrice:

1° Într-un punct generic P, direcţia paralelă la o direcţie (α) care pleacă dintr-un punct oarecare P_0 depinde, în general, de drumul pe care se trece de la P_0 la P. Independenţa de drum este proprietatea exclusivă a varietăţilor euclidiene.

2° De-a lungul unei aceleiaşi geodezice, direcţiile tangentelor sînt paralele, ceea ce generalizează o caracteristică evidentă a dreptei din spaţiile euclidiene (chiar aceea pe care Euclid o pune la începutul elementelor ca intuiţie primordială a dreptei).

3° Transportul prin paralelism, de-a lungul unui drum oarecare, păstrează unghiul a două direcţii concurente. Vreau să spun prin asta că unghiul format de două direcţii generice plecînd dintr-un acelaşi punct e egal cu unghiul format de paralelele la acestea într-un alt punct oarecare. Ţinînd seamă şi de proprietatea de mai sus a geodezicelor, se obţine corolarul conform căruia, de-a lungul unei geodezice, direcţiile paralele sînt mereu egal înclinate pe geodezică. Dacă e vorba, în particular, de o V_2, această condiţie e şi suficientă, astfel că, pentru suprafeţele uzuale, paralelismul de-a lungul unei geodezice echivalează cu izogonalitatea.

Nu am indicat, în ordine, conţinutul diverselor paragrafe. Va fi de ajuns o privire la sumarul de la sfîrşitul lucrării.

1. Preliminarii

Fie (cu simbolurile obişnuite)

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_i dx_k$$

expresia pătratului elementului liniar al unei varietăţi oarecare V_n.

După cum bine se cunoaşte, se poate, totdeauna, privi V_n imersată într-un spaţiu euclidian S_N cu un număr de dimensiuni suficient de mare (nu superior lui $\frac{n(n+1)}{2}$). Fie y_ν $(\nu = 1, 2, ..., N)$ coordonatele carteziene ale unui asemenea spaţiu. În el, vom considera V_n definită cu ajutorul expresiilor parametrice

$$y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (\nu = 1, 2, ..., N) \tag{1}$$

ale coordonatelor carteziene în funcţie de cele intrinseci, rezultînd în consecinţă

$$ds^2 = \sum_{\nu=1}^{n} dy_\nu^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_i dx_k. \tag{2}$$

---

[4]J. Eiesland, *On the integration of a system of differential equations in kinematics*, American Journal of Mathematics, vol. XXVIII (1906), pp. 17-42.

[5]E. Laura, *Sulla integrazione di un sistemma di quattro equazioni differenziali lineari a deteminante gobbo per mezzo di due equazioni di Riccati*, Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XLII (1906-1907), pp. 1089-1108; vol. XLIII (1907-1908), pp. 358-378.

[6]G. Darboux, *Sur certains systèmes d'équations linéaires*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLVIII (1^{er} semestre 1909) şi *Sur les systèmes d'equations différentielles homogènes* (Ibid., pp. 673-679 şi pp. 745-754).

[7]E. Vessiot, *Sur l'intégration des systèmes linéaires à déterminant gauche*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLVIII (1^{er} semestre 1909), pp. 332-335.

Să considerăm în V_n o curbă C arbitrară şi fie

$$(3) \qquad x_i = x_i(s) \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

ecuaţiile sale parametrice, s desemnînd arcul (măsurat cu începere de la o origine arbitrară). Curba C aparţine în mod natural şi spaţiului ambiant S_N, ca atare rămîne definită de expresiile parametrice $y_\nu(s)$ ale coordonatelor carteziene ale punctelor sale. Aceste expresii parametrice sînt, desigur, oferite de (1) în care se atribuie lui x_i valorile (3). Derivîndu-le în raport cu s şi indicînd cu accente derivatele faţă de acest argument, avem

$$(4) \qquad y'_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} x'_i \qquad (\nu = 1, 2, ..., N).$$

Să ne referim la o valoare generică, dar bine determinată, a lui s, adică la un punct P oarecare al curbei C. Evident, valorile y'_ν constituie cosinusurile directoare ale lui C în P relativ la axele coordonate ale spaţiului euclidian S_N; valorile x'_i sînt *parametrii directori* (ai lui C în acelaşi punct P) faţă de V_n.

Să mai amintim[8] că, dacă se pune

$$(5) \qquad y''_\nu = c q_\nu,$$

cu $c \geq 0$ şi $\sum_{\nu=1}^{N} q_\nu^2 = 1$, rezultă curbura c a lui C în P şi (cu excepţia cazului limită $c = 0$), cu ajutorul cosinusurilor directoare q_ν, o direcţie (q), zisă *normală principală absolută* în punctul P. Proiectînd-o (ortogonal) pe hiperplanul tangent la V_n în P, se pune în evidenţă o direcţie (q^*), tot normală curbei, zisă *normală principală relativă*.

Vom desemna prin q^*_ν cosinusurile directoare ale lui (q^*); cu Φ unghiul cuprins între (q) şi (q^*) şi, în fine, cu α_ν cosinusurile directoare ale unei (α) generice care pleacă din P şi aparţine lui V_n (adică hiperplanului său tangent). Va fi clar că

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu q_\nu = \cos\Phi \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu q^*_\nu,$$

deci, multiplicînd cu c şi ţinînd cont de (5),

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu y''_\nu = c\cos\Phi \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu q^*_\nu.$$

Trebuie menţionat că membrul al doilea are caracter intrinsec relativ la varietatea V_n, aşadar poate fi interpretat independent de spaţiul euclidian ambiant. Întradevăr,

$$c\cos\Phi = \gamma$$

nu e altceva decît curbura geodezică a lui C iar $\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu q^*_\nu$ e cosinusul director al unghiului χ dintre (α) şi normala principală relativ la (q^*), direcţii care, ambele, aparţin lui V_n. Aşa că are loc, pentru orice direcţie (α) a lui V_n (dar depinzînd de curba C), relaţia

$$(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu y''_\nu = c\cos\chi.$$

[8] L. Bianchi, *loc. cit.* [1]), pp.365-367.

2. Direcţii paralele în V_n de-a lungul unei curbe fixate

Să presupunem că fiecărui punct P al lui C îi corespunde o direcţie (α) care aparţine lui V_n. Astfel, parametrii directori $\xi^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., N)$ care definesc (α) în V_n, ca şi cosinusurile directoare α_ν $(i = 1, 2, ..., N)$ care o individualizează în spaţiul ambiant vor fi funcţii de s; şi vom avea (la fel ca pentru direcţia lui C, după cum rezultă din (4))

$$\alpha_\nu = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \xi^{(l)}. \tag{7}$$

Să ne imaginăm că variem P de-a lungul lui C. Condiţia de paralelism obişnuit al (α)-urilor (faţă de spaţiul ambiant S_N) implică egalitatea unghiurilor pe care le formează ele cu o aceeaşi direcţie, aleasă arbitrar.

Pentru a ajunge la o noţiune de paralelism care să privească doar V_n, să considerăm fenomenul elementar, adică trecerea de la P la un punct infinit de apropiat.

Fie (f) o direcţie generică *fixă* din S_N, f_ν cosinusurile directoare respective. Cînd s creşte cu ds, cosinusul unghiului dintre (α) şi (f),

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu f_\nu,$$

suportă o creştere de

$$ds \sum_{\nu=1}^{N} \alpha'_\nu f_\nu.$$

Paralelismul obişnuit ar cere anularea acestei creşteri pentru toate direcţiile (f), deci ar duce la constanţa α_ν-urilor.

Să ne mulţumim a cere ca unghiul dintre (α) *şi o* (f) *să rămînă neschimbat pentru direcţiile* (f) *care aparţin lui* V_n, altfel spus să nu cerem anularea creşterii $ds \sum_{\nu=1}^{N} \alpha'_\nu f_\nu$ pentru toate direcţiile (f), ci doar pentru direcţiile tangenţiale.

Vom observa că aceste direcţii sînt toate, şi numai ele, compatibile cu restricţiile (1), aşadar condiţia enunţată e evident echivalentă (înlocuind f_ν cu cantităţi proporţionale) cu următoarea:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha'_\nu \delta y_\nu = 0 \tag{I}$$

pentru toate deplasările δy_ν *care satisfac cerinţele* (1).

Cum, chiar în baza formulelor (1), avem

$$\delta y_\nu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \delta x_k$$

cu δx_k complet arbitrare, (1) se sparge în n ecuaţii

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha'_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, ..., n), \tag{8}$$

care constituie traducerea formală a paralelismului (α)-urilor de-a lungul lui C.

3. Forma intrinsecă a condiţiilor de paralelism

În ecuaţiile (8) apar cantităţile α_ν şi y_ν care sînt legate de spaţiul ambient. Ne putem elibera de ele, făcînd să intervină în (8) doar elemente care depind de metrica lui V_n.

Începem prin a substitui cosinusurile directoare α_ν cu expresiile lor (7), funcţii de parametrii directori $\xi^{(l)}$. Avem, derivînd în raport cu arcul s al lui C,

$$\alpha'_\nu = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \partial x_l} x'_j \xi^{(l)}.$$

Pe de altă parte, în virtutea lui (2),

$$a_{kl} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}, \qquad (k, l = 1, 2, ..., n),$$

de unde rezultă, pentru simbolurile lui Christoffel de prima specie,

$$\begin{aligned} a_{jl,k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right)\right] \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \partial x_l}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \qquad (i, l, k = 1, 2..., n). \end{aligned}$$

Astfel, ecuaţiile (8) devin

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \frac{d\xi^{(l)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl,k} x'_j \xi^{(l)} = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., n).$$

Din acestea, multiplicînd cu $a^{(ik)}$[9], sumînd după k (de la 1 la n) şi ţinînd cont de definiţiile

$$\begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl,k} a^{(ik)} \qquad (j, l, i = 1, 2, ..., n)$$

ale simbolurilor lui Christoffel de a doua specie, se obţin equaţiile echivalente

$$(I_a) \qquad \frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} x'_j \xi^{(l)} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

care definesc variaţia parametrilor $\xi^{(i)}$ de-a lungul lui C în baza condiţiei ca direcţiile puse în evidenţă de aceşti parametri să se menţină paralele.

Dacă C e dinainte fixată (şi cu ea expresiile lui x şi x' în funcţie de s), coeficienţii $\sum_{j=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} x'_j$ ale fiecărui $\xi^{(l)}$ din (I_a) pot fi priviţi ca funcţii cunoscute în variabila independentă s. Ca atare, chiar ecuaţiile (I_a) arată ca n ecuaţii diferenţiale ordinare în tot atîtea cantităţi $\xi^{(i)}$. Rezultă, în baza cunoscutelor teoreme de existenţă, că, o dată aleasă arbitrar o direcţie într-un punct oarecare P_0 al lui C, direcţiile paralele prin oricare alt punct P al curbei rămîn determinate.

---

[9] Cu $a^{(ik)}$ se notează, de obicei, coeficienţii formei reciproce formei fundamentale $ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_i dx_k$.

4. Comparaţie cu comportamentul euclidian. Proprietatea sa caracteristică cu privire la paralelism

Din ceea ce s-a văzut pînă acum, de-a lungul curbei C se păstrează proprietatea elementară că dintr-un punct P pleacă o singură direcţie paralelă alteia fixate prin P_0. Trebuie, totuşi, menţionat că, pe cînd în spaţiile euclidiene paralela prin P e unică în sens absolut, în spaţiul noastru V_n cu metrică oarecare ea e, în general, dependentă de C, adică de drumul de-a lungul căruia se trece de la P_0 la P.

Mai mult, se poate adăuga că, *dacă* (printr-un punct P oarecare dintr-un domeniu arbitrar) *paralela* (la o direcţie oarecare ce pleacă dintr-un alt punct P_0 al domeniului) *e independentă de drum, spaţiul V_n este* (în acel domeniu) *în mod necesar euclidian.*

Într-adevăr, să observăm că, din ecuaţiile (I_a), multiplicînd cu ds şi punînd, pentru simplitate

$$X_j^{(i)} = \sum_{l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} \xi^{(l)},$$

rezultă

$$d\xi^{(i)} = -\sum_{j=1}^{n} X_j^{(i)} dx_j. \tag{9}$$

Independenţa de drum dorită presupune ca $d\xi^{(i)}$, şi o dată cu ele membrul drept din (9), să fie diferenţiale exacte; adică, notînd cu δx_j un al doilea sistem de creşteri ale lui x_j, independente de dx_j şi astfel încît $d\delta x_j = \delta dx_j$, se obţin n identităţi

$$\delta \sum_{j=1}^{n} X_j^{(i)} dx_j = d \sum_{j=1}^{n} X_j^{(i)} \delta x_j \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Explicitînd şi observînd că egalitatea trebuie să subziste oricare ar fi cele două sisteme de creşteri dx_j, δx_j, ca şi valorile (cele iniţiale, deci şi cele generice) lui $\xi^{(l)}$, ajungem automat la a spune că se anulează toate simbolurile lui Riemann[10], cu alte cuvinte că e vorba de o varietate euclidiană. c.c.t.d.

5. Altă formă a ecuaţiilor (I_a). Dependenţa de o singură funcţie

Parametrii directori $\xi^{(i)}$ ($=\frac{dx_i}{ds}$, unde ds reprezintă lungimea unui element ales pe direcţia (α) şi dx_i creşterea corespunzătoare a coordonatei x_i) apar în (I_a) ca elemente determinante pentru direcţiile paralele (α). Aceşti $\xi^{(i)}$ constituie un sistem contravariant[11] (faţă de orice transformare a coordonatelor generale x_i). E util, atunci, să punem în evidenţă, în loc de sistemul contravariant $\xi^{(i)}$, sistemul covariant reciproc

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi^{(k)}, \tag{10}$$

adică aşa-numitele *momente.*

---

[10] Socotim că tratarea simbolurilor lui Riemann aşa cum e expusă în §§15–19 e efectiv de preferat tratării obişnuite. Astfel că, din punct de vedere metodologic, teorema din text ar trebui să figureze după acele paragrafe. Am anticipat-o pentru comoditatea cititorului căruia îi sînt familiare simbolurile lui Riemann.

[11] Conform G. Ricci, T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Mathematische Annalen, Bd. LIV (1900), p. 125-201.

Pentru a transforma corespunzător ecuaţiile (I_a), să derivăm direct poziţiile (10), introducînd pentru $\frac{d\xi^{(k)}}{ds}$ expresiile furnizate de (I_a). Se obţine (după ce se schimbă în ultimul termen indicele de sumare din k în l):

$$\frac{d\xi_i}{ds} = -\sum_{k,j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ k \end{Bmatrix} a_{ik} x'_j \xi^{(l)} + \sum_{l=1}^{n} \frac{da_{il}}{ds} \xi^{(l)}.$$

Deoarece

$$\sum_{k,j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ k \end{Bmatrix} = a_{jl,i},$$

şi

$$\frac{da_{il}}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} x'_j = \sum_{j=1}^{n} (a_{jl,i} + a_{ij,l}) x'_j,$$

rămîne

$$\frac{d\xi_i}{ds} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)}. \tag{11}$$

În locul lui $\xi^{(l)}$, trebuie să facem să apară şi în membrul al doilea momentele: lucru foarte uşor, datorită ecuaţiilor (10) care, rezolvate, dau

$$\xi^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} a^{lk} \xi_k.$$

Cu aceasta, ţinînd seama de expresiile coeficienţilor lui Christoffel de specia a doua deja reamintite în paragraful precedent, rezultă:

$$\sum_{j,l=1}^{n} a_{ij,l} x'_j \xi^{(l)} = \sum_{j,k=1}^{n} \begin{Bmatrix} i\ j \\ k \end{Bmatrix} x'_j \xi_k,$$

şi se obţin astfel, punînd din nou l pentru k drept indice de sumare, ecuaţiile transformate

$$\frac{d\xi_i}{ds} = \sum_{j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} i\ j \\ l \end{Bmatrix} \xi_l, \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{I_b}$$

Se va observa că acest sistem (I_b) e *adjunctul* precedentului (I_a). Într-adevăr, coeficientul lui ξ_i în a i-a ecuaţie (I_b) e egal şi opus coeficientului lui $\xi^{(i)}$ în a l-a ecuaţie (I_a).

Ecuaţiilor în chestiune li se mai poate atribui şi o a treia înfăţişare care aminteşte, chiar dacă este, de fapt, mai puţin expresivă, forma lagrangiană clasică a ecuaţiilor dinamicii.

Analogia constă în aceea că se poate ajunge la o singură funcţie de $3n$ argumente x_i, x'_i, $\xi^{(i)}$,

$$B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}, \tag{12}$$

bilineară în $\xi^{(j)}$ (care sînt pe post de necunoscute) şi în x'_i (care sînt, ca şi x_i, funcţii de s).

Din (10) se obţine

$$\xi_i = \frac{\partial B}{\partial x_i'},$$

şi se constată imediat (cu schimbări evidente de indici) că, deoarece

$$a_{ij,l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\right),$$

al doilea membru al lui (11) se mai poate scrie:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x_i'} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial B}{\partial x_i'}x_j' - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}}\xi^{(j)}\right).$$

Cu aceasta, chiar din ecuaţiile (11) care sînt, esenţialmente, echivalente cu (I_a) şi cu (I_b), se obţine forma anunţată în care intervine doar B:

$$(I_c)\qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial B}{\partial x_i'} = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial x_i'} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial B}{\partial x_i'}x_j' - \frac{\partial B}{\partial \xi^{(i)}}\xi^{(j)}\right).$$

6. Integrală pătratică – Conservarea unghiurilor. Compunerea soluţiilor ortogonale

Ecuaţiile liniare (I_a) admit integrala pătratică

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi^{(i)}\xi^{(j)} = \text{const.}$$

Acest lucru se recunoaşte uşor observînd că, datorită lui (10), primul membru se scrie

$$\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)}\xi_i,$$

şi are derivata

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\xi^{(i)}}{ds}\xi_i + \frac{d\xi_i}{ds}\xi^{(i)}\right),$$

care, datorită lui (I_a) şi a echivalentelor (I_b), se anulează identic.

De altfel, chiar fără o verificare directă, folosind o proprietate cunoscută a sistemelor adjuncte, cum $\xi^{(i)}$ şi ξ_i sînt soluţii ale unor asemenea sisteme, se poate afirma constanţa expresiei $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi^{(i)}\xi^{(j)}$.

Corolar evident al existenţei integralei pătratice este că, dacă valorile iniţiale ale lui $\xi^{(i)}$ sînt efectiv parametri directori şi, ca atare, verifică

$$(13)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi^{(i)}\xi^{(j)} = 1,$$

aceeaşi relaţie rămîne adevărată pentru orice s, adică soluţiile $\xi^{(i)}$ păstrează caracterul de parametri directori de-a lungul lui C: circumstanţă implicită în punerea problemei, dar care nu e evidentă a priori în (I_a).

Alt corolar demn de semnalat e conservarea, de-a lungul lui C, a unghiului σ a două direcţii care se transportă prin paralelism. Într-adevăr, fie $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ parametrii acestor două direcţii şi fie ξ_i, η_i momentele respective. Avem

$$\cos\sigma = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi^{(i)}\eta^{(j)} = \sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)}\eta_i = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta^{(i)}.$$

Să ne referim, de exemplu, la ultima expresie pe care să o derivăm substituind lui $\dfrac{d\xi_i}{ds}$ valorile furnizate de (I_b), iar lui $\dfrac{d\eta^{(i)}}{ds}$ pe acelea furnizate de de (I_a). Rezultatul este, şi aici, identic nul, c.c.t.d

Din linearitatea ecuaţiilor de paralelism – să ne uităm, de exemplu, la (I_a) – urmează că orice combinaţie lineară cu coeficienţi constanţi a unor soluţii $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ este, încă, soluţie. Să presupunem, în particular, că $\xi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$ sînt parametrii a două direcţii nu doar paralele, ci şi ortogonale între ele şi fie

$$\zeta^{(i)} = \cos\sigma\xi^{(i)} + \sin\sigma\eta^{(i)}$$

cu σ constant. Avem, evident:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\zeta^{(i)}\zeta^{(j)} = 1; \quad \sum_{i=1}^{n}\zeta^{(i)}\xi_i = \cos\sigma, \quad \sum_{i=1}^{n}\zeta^{(i)}\eta_i = \sin\sigma,$$

astfel că $\zeta^{(i)}$ constituie parametrii unei direcţii care, în timp ce satisface condiţia de paralelism de-a lungul lui C, aparţine planului determinat de primele două, formînd cu acestea, în orice punct, aceleaşi unghiuri σ şi $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

Observaţia aceasta se extinde cu uşurinţă la oricîte soluţii mutual ortogonale şi dă naştere următorului enunţ expresiv: *Orice direcţie care, deplasîndu-se de-a lungul lui C, se menţine legată rigid de direcţii paralele, satisface ea însăşi condiţia de paralelism.*

7. Geodezice – Proprietatea lor caracteristică în ce priveşte direcţia

E bine cunoscut că ecuaţiile geodezicelor lui V_n sînt

$$x_i'' + \sum_{j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} x_j' x_l' = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Din ele se deduce că, dacă C e geodezică, ecuaţiile (I_a) admit soluţia $\xi^{(i)} = x_i'$ şi reciproc. Ca urmare: *Direcţia unei geodezice, într-un punct oarecare al ei, e totdeauna paralelă cu direcţia iniţială; reciproc, orice curbă care se bucură de această proprietate e geodezică.*

Astfel se extinde la geodezicele unui spaţiu oarecare o proprietate definitorie a dreptelor din spaţiile euclidiene. Şi, în acelaşi timp, e clar că, în mod necesar, au loc simultan conservarea direcţiei şi proprietatea integrală de minimizare a distanţei (cealaltă caracteristică definitorie a geodezicelor).

8. Înclinarea pe curba de transport

Merită pusă în evidenţă o combinaţie lineară semnificativă a ecuaţiilor (I_a). Pentru a evita dezvoltări complicate, să ne reîntoarcem la formula (I) din care provin ecuaţiile diferenţiale cu care, în esenţă, e echivalentă. Respectiva formulă trebuie să aibă loc pentru orice deplasare δy_ν, deci pentru orice direcţie, aparţinînd lui V_n. Să considerăm, în particular, direcţia tangentă la C, punînd în (I) y'_ν în locul lui δy_ν. Rezultă

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha'_\nu y'_\nu = 0$$

care se mai poate scrie

$$\frac{d}{ds}\sum_{i=1}^{N} \alpha'_\nu y'_\nu = \sum_{i=1}^{N} \alpha'_\nu y''_\nu .$$

Numind ψ unghiul pe care îl face C cu direcţia (α) (de al cărei paralelism ne ocupăm) şi folosind (6), obţinem relaţia pe care voiam să o stabilim:

$$\frac{d}{ds}\cos\psi = \gamma\cos\chi. \tag{14}$$

Amintim (§1) că γ reprezintă curbura geodezică a lui C şi χ unghiul cuprins între (α) şi normala principală a lui C (relativ la V_n). Aşadar, formula (14) furnizează legea după care variază, de-a lungul curbei de transport C, înclinarea ψ (pe aceeaşi C) a unui fascicol de direcţii paralele.

Dacă C e geodezică, atunci $\gamma = 0$ şi deci $\cos\psi = const.$, adică: *direcţiile paralele de-a lungul unei geodezice formează permanent acelaşi unghi cu geodezica dată.* Acesta nu e decît un caz particular al conservării unghiurilor puse în evidenţă în §6: e suficient să observăm (ca în paragraful precedent) că direcţiile unei geodezice sînt toate paralele între ele.

Dacă C e o curbă oarecare, dar într-un spaţiu euclidian, atunci (14) se reduce la primul grup al formulelor lui Frenet.

9. Cazul suprafeţelor obişnuite

Pentru $n = 2$, diferitele direcţii care pleacă dintr-un acelaşi punct al lui C rămîn univoc determinate de unghiul ψ, cu condiţia ca acestuia să i se asocieze şi un dat calitativ: sensul în care, pornind din direcţia pozitivă a curbei C, trebuie socotit ψ. Rezultă de aici că (după specificarea calitativă necesară), formula (14) e suficientă pentru a defini univoc direcţiile paralele de-a lungul unei curbe generice pe suprafaţă. Se poate preciza după cum urmează: notînd (q^*) normala principală relativă (proiecţie pe planul tangent la suprafaţă a normalei principale a lui C), să presupunem că socotim ψ către (q^*) (se subînţelege, plecînd de la direcţia pozitivă a lui C, trecînd prin unghiul drept pe care aceasta îl formează cu (q^*)). Astfel înţeles, unghiul ψ ar putea să nu fie unghiul minim dintre C şi (α) la care se referă (14), ci acela concav care completează rotaţia; oricum, cosinusul său coincide, în orice caz, cu acel $\cos\psi$ care apare în (14), rezultînd apoi (pentru actualul ψ) $\sin\psi = \cos\chi$.

Ecuaţia (14) capătă, astfel, forma simplificată

$$\frac{d\psi}{ds} = -\gamma. \tag{15}$$

Ne-am ocupat deja în paragraful precedent de cazul $\gamma = 0$ pentru n oarecare. Pentru suprafeţe, se poate adăuga că noţiunea obişnuită de paralelism geodezic este conţinută în noţiunea noastră generală de paralelism. Într-adevăr, curbele geodezic paralele au drept traiectorii ortogonale curbe geodezice; deci ele se pot numi paralele (în sensul atribuit de noi termenului) relativ la oricare dintre aceste geodezice, deoarece pentru oricare dintre aceste curbe are loc $\psi = \frac{\pi}{2}$ sau $\psi = \frac{3\pi}{2}$.

Să părăsim cazul unei geodezice C şi să luăm un exemplu particular. Să presupunem că e vorba de o suprafaţă sferică pe care C e un cerc paralel. Direcţia (q^*) într-un punct generic e aceea a meridianului către polul lui C. Dacă λ e latitudinea (faţă de emisfera care conţine polul lui C) şi dacă R e raza sferei, atunci

$$\gamma = \frac{1}{R\cos\lambda}.$$

Pe de altă parte, dacă presupunem că parcurgem cercul paralel în sensul de creştere a longitudinii ϕ, avem

$$ds = R\cos\lambda d\phi,$$

astfel că (15) se reduce la

$$d\psi = -d\phi.$$

Deci unghiul ψ variază uniform cu longitudinea şi descreşte cu 2π la o rotaţie completă. Direcţia paralelă uneia dinainte fixate rezultă, astfel, funcţie *uniformă* de punctele cercului paralel.

Totuşi, o asemenea uniformitate nu are loc, cu necesitate, şi pentru alte curbe închise: de exemplu, parcurgînd perimetrul unui triunghi geodezic, ψ suferă o creştere de $2\pi - \varepsilon$ (ε e excesul sferic). Asta se recunoaşte imediat dacă se ţine seamă că ψ rămîne constant de-a lungul laturilor şi suferă în vîrfuri creşteri bruşte reprezentate de suplementele unghiurilor.

10. Spaţii cu curbură constantă – Observaţie asupra paralelismului lui Clifford

Vrem să arătăm că, pentru spaţiile cu curbura constantă[12] (cu oricîte dimensiuni), ecuaţiile de paralelism *de-a lungul unei geodezice* se integrează imediat, la fel ca în cazul tocmai examinat al varietăţilor oarecare, dar cu numai două dimensiuni.

Să ne referim, pentru a fixa ideile, la o V_n cu curbura constantă egală cu 1, ceea ce e permis, fără a prejudicia generalitatea, ori de cîte ori (ca în chestiunea analitică de care vrem să ne ocupăm), nu e necesar să distingem între real şi imaginar. În consecinţă, varietatea noastră V_n poate fi privită ca o hipersferă a unui spaţiu euclidian cu $n+1$ dimensiuni, reprezentată în coordonate carteziene de ecuaţia

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} y_\nu^2 = 1. \tag{16}$$

În acest caz este, poate, mai avantajos să nu recurgem la coordonatele intrinsece ale lui V_n, imaginînd atît punctele, cît şi direcţiile ei definite cu ajutorul elementelor care le definesc în spaţiul euclidian ambiant: punctele prin coordonatele lor carteziene y_n supuse la relaţiile (16), direcţiile (α) prin cosinusurile lor directoare α_ν legate, în afară de ecuaţia:

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu^2 = 1, \tag{17}$$

[12] Şi în legătură cu acest subiect se va lua în considerare nota de subsol 10.

şi de condiţia de apartenenţă la V_n (adică la hiperplanul tangent):

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu y_\nu = 0. \tag{18}$$

Dată în V_n o linie geodezică C, să vedem cum trebuie să varieze $\alpha_\nu(s)$ de-a lungul lui C pentru ca fiecare să rămînă o direcţie paralelă (în V_n). Pentru aceasta să reluăm formulele (I) din §2 şi să observăm că restricţiile (1) sînt reprezentate acum de o singură ecuaţie, anume (16). Procedeul clasic al lui Lagrange ne permite să substituim ecuaţiilor (I) pe cele explicite

$$\alpha'_\nu = \mu y_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{19}$$

în care μ desemnează un multiplicator a priori nedeterminat. Considerînd aceste ecuaţii în sistem cu (18), rezultă definite atît α cît şi μ. Ecuaţia (17) e efectiv compatibilă cu (18), (19) pentru că din acestea rezultă:

$$\frac{d}{ds}\sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu^2 = 2\sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu \alpha'_\nu = 2\mu \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu y_\nu = 0.$$

Acestea fiind stabilite, să reamintim că, dacă ψ este unghiul dintre (α) şi C, atunci

$$\cos\psi = \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu y'_\nu$$

şi că (vezi §8) acest unghi rămîne constant (la variaţia lui s) în virtutea ipotezei că C e geodezică.

Acum, dacă derivăm (18) şi ţinem seama de (19) şi (16), obţinem

$$\mu + \cos\psi = 0,$$

astfel că ecuaţiile (19) iau forma

$$\alpha'_\nu = -\cos\psi y_\nu$$

şi determinarea cosinusurilor $\alpha_n u$ se reduce la cuadraturi. În realitate, nici de asta nu e nevoie. E suficient să observăm întîi că pentru $\cos\psi = 0$, adică *pentru direcţiile ortogonale la* C, rezultă $\alpha'_\nu = 0$, astfel că *paralelismul în* V_n *e caracterizat de constanţa unghiurilor* α_ν *şi deci coincide cu paralelismul uzual din spaţiul ambiant. Cît despre direcţiile neortogonale la* C, se poate recurge la enunţul final al paragrafului 6, de unde concluzia că *în* V_n, *condiţia de paralelism constă în formarea unor aceleaşi unghiuri cu* C *şi cu* $n-1$ *direcţii fixe (independente) ortogonale la* C *şi, bineînţeles, tangente hipersferei* (16).

Fie, în particular, o V_3. Comportamentul tocmai pus în evidenţă al direcţiilor paralele care pleacă ortogonal de pe o geodezică C face vizibil faptul că nu e nici o legătură cu paralelismul lui Clifford. Într-adevăr, dacă se consideră ∞^1 geodezice pornind de pe o geodezică C, paralele în sensul lui Clifford, acestea rezultă cu siguranţă normale la C, dar tangentele lor *nu* sînt paralele în spaţiul ambiant[13].

[13]Pentru a justifica această afirmaţie se poate raţiona după cum urmează. Reamintim întîi (cf. L. Bianchi, loc. cit. [1]), pag. 46) că geodezicele care formează o congruenţă Clifford sînt reprezentate parametric de formule de tipul

$$y_\nu = a_\nu \cos s + \sin s \sum_{\rho=1}^{4} c_{\nu\rho} a_\rho \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

unde parametrul s se identifică cu arcul, coeficienţii constanţi $c_{\nu\rho}$, caracteristici congruenţei, satisfac dubla condiţie de semisimetrie ($c_{\nu\rho} + c_{\rho\nu} = 0$) şi de ortogonalitate; a_ν (valorile iniţiale

11. Reducerea ecuaţiilor de paralelism la tipul semisimetric

Sistemul diferenţial (I_a) admite (cf. §6) o integrală pătratică. Asta ne permite să afirmăm[14] că e posibil, după o transformare lineară convenabilă a necunoscutelor să reducem sistemul la forma semisimetrică:

$$(II) \qquad \frac{dz_h}{ds} = \sum_{k=1}^{n} p_{hk} z_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

caracterizată de relaţiile

$$(20) \qquad p_{hk} + p_{kh} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

între coeficienţi (care, altfel, sînt presupuşi funcţii oarecare de s). Pentru aceasta e suficient ca transformarea lineară între $\xi^{(i)}$ şi z_h să aducă integrala pătratică la forma canonică:

$$\sum_{h=1}^{4} z_h^2 = const.$$

Concret, punînd în evidenţă şi aspectul geometric al transformării, trebuie să procedăm după cum urmează.

Să presupunem că din fiecare punct P al lui C pleacă, arbitrar, $n-1$ direcţii care, împreună cu cea a lui C, constituie un n-uplu ortogonal Ω. Făcînd să corespundă aceste direcţii numerelor $1, 2, \ldots, n-1$, să indicăm cu $\lambda_h^{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ parametrii corespunzători celei de pe poziţia h, adică sistemul de coordonate contravariant şi cu $\lambda_{h/i}$ momentele (sistemul de coordonate covariant). Pentru uniformitatea notaţiei, vom atribui inicele n direcţiei lui C, care completează n-uplul şi vom pune corespunzător:

$$(21) \qquad x_i' = \lambda_n^{(i)}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' = \lambda_{n/i} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

---

ale lui y_ν) sînt legate de ecuaţia (16), dar variază (în toate modurile posibile) de la o geodezică la alta a congruenţei. Să multiplicăm (1) cu $c_{\mu\nu}$ şi să sumăm după ν de la 1 la 4. Ţinînd cont de identităţile

$$\sum_{\rho=1}^{4} c_{\mu\nu} c_{\nu\rho} = -\sum_{\rho=1}^{4} c_{\mu\nu} c_{\rho\nu} = -\varepsilon_{\mu\rho} \quad (\mu, \rho = 1, 2, 3, 4;\ \varepsilon_{\mu\rho} = 0 \text{ dacă } \mu \neq \rho \text{ şi } = 1 \text{ dacă } \mu = \rho),$$

se obţine imediat (schimbînd în calculul făcut μ în ν şi ν în ρ)

$$(2) \qquad \textstyle\sum_{\rho=1}^{4} c_{\nu\rho} y_\rho = \cos s \sum_{\rho=1}^{4} c_{\nu\rho} a_\rho - a_\nu \sin s \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Cosinusurile directoare ale unei curbe oarecare (1) (într-un punct generic al său) sînt evident reprezentate de derivatele lui y_ν în raport cu arcul:

$$y_\nu' = -a_\nu \sin s + \cos s \sum_{\rho=1}^{4} c_{\nu\rho} a_\rho$$

care, în virtutea ecuaţiilor (2), se pot exprima în funcţie de coordonatele y_ν (ale punctului din care pleacă respectiva geodezică a congruenţei) sub forma:

$$y_\nu' = \sum_{\rho=1}^{4} c_{\nu\rho} y_\rho, \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Cum determinantul lui $c_{\nu\rho}$ nu se anulează (valoarea sa absolută e 1), la două puncte distincte nu pot corespunde niciodată aceleaşi cosinusuri. E exclusă, deci, existenţa unei curbe C din ale cărei toate puncte să plece, sub aceeaşi direcţie, geodezice ale unei congruenţe Clifford. C.c.t.d.

[14]Cf., de ex., Darboux, loc. cit. [6]).

În consecinţă, vor fi valabile relaţiile caracteristice ale n-uplelor ortogonale:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{h/i} \lambda_k^{(i)} = \varepsilon_{hk}, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

cu semnificaţia obişnuită a lui ε_{hk} (0 pentru $h \neq k$, 1 pentru $h = k$).

Vom considera Ω şi, prin ea, diferitele λ, funcţii cunoscute de s (la fel ca x_i, x'_i).

Cu aceste presupuneri, iată cum se explicitează transformarea lineară dorită. Se iau ca elemente determinante ale direcţiilor paralele, în locul parametrilor $\xi^{(i)}$ (sau al elementelor reciproce ξ_i), cosinusurile z_h ale unghiurilor care se formează în fiecare punct cu direcţiile n-uplei. Identitatea geometrică

$$\sum_{h=1}^{n} z_h^2 = 1$$

ne asigură că se ajunge la un sistem transformat semisimetric. Să dezvoltăm şi calculul pentru a găsi expresia explicită a coeficienţilor p_{hk}.

Noile necunoscute z_h sînt, prin definiţie, legate de $\xi^{(i)}$, respectiv de ξ_i prin ecuaţiile:

$$z_h = \sum_{i=1}^{n} \xi^{(i)} \lambda_{h/i}, \tag{23_a}$$

$$z_h = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_h^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23_b}$$

Ţinînd cont de relaţiile (22), acestea se pot reduce, respectiv, la formele:

$$\xi^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} z_k \lambda_k^{(i)}, \tag{24_a}$$

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} z_k \lambda_{k/i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24_b}$$

Să derivăm (23_a) în raport cu s, luînd în considerare şi (I_a) (în care, datorită lui (21), vom scrie $\lambda_n^{(j)}$ în loc de x'_j) şi înlocuind în membrii ai doilea (după ce vom fi derivat), cantităţile $\xi^{(i)}$ (sau $\xi^{(l)}$) cu valorile (24_a). Dacă, pentru a scurta, punem

$$p_{hk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\lambda_{h/i}}{ds} \lambda_k^{(i)} - \sum_{ijl=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} \lambda_n^{(j)} \lambda_k^{(l)} \lambda_{h/i} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{25_a}$$

ajungem, evident, la formulele (II). Valorile (25_a) ale ceficienţilor nu pun, totuşi, direct în evidenţă, caracterul semisimetric care, datorită precedentelor observaţii, le e în mod necesar propriu. L-am putea deriva folosind transformări materiale, ţinînd seamă de (22) şi de structura simbolilor lui Christoffel. Dar verificarea se face mai comod observînd că aceleaşi ecuaţii diferenţiale în z_h la care am ajuns mai înainte, trebuie să se poată obţine operînd cu acelaşi criteriu, dar nu asupra formulelor (23_a), (24_a), (I_a), ci asupra echivalentelor lor (23_b), (24_b), (I_b). Calculul efectuat astfel furnizează următoarele noi expresii pentru coeficienţii p_{hk}:

$$(25_b) \qquad p_{hk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\lambda_h^{(i)}}{ds} \lambda_k^{(i)} - \sum_{ijl=1}^{n} \begin{Bmatrix} i\ j \\ l \end{Bmatrix} \lambda_n^{(j)} \lambda_{k/l} \lambda_h^{(i)} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Anunţata demonstraţie formală rezultă din compararea formulelor (25_a) şi (25_b).

Într-adevăr, adunînd expresia lui p_{hk} dată de (25_a) cu cea a lui p_{hk} dată de (25_b), cele două $\sum_{ijl}$ se elimină identic (aşa cum se constată schimbînd într-una dintre ele indicii i şi l între ei), şi rămîne:

$$p_{hk} + p_{kh} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\lambda_{h/i}}{ds} \lambda_k^{(i)} + \frac{d\lambda_k^{(i)}}{ds} \lambda_{h/i}\right),$$

care se anulează în virtutea formulelor (22).

Sistemul linear (II) cu determinant strîmb e o generalizare evidentă a celui pe care-l întîlnim în cinematica corpurilor rigide pentru a determina mişcarea axelor solidului, atunci cînd se dă viteza unghiulară. Pentru teoria acestor sisteme diferenţiale, trimitem la lucrările deja citate în introducere (notele [4)] la [7)]). Vrem, totuşi, să punem în evidenţă cîteva proprietăţi elementare ale lor.

1° Efectuînd asupra necunoscutelor z_h o substituţie ortogonală arbitrară (dar cu coeficienţi depinzînd de s), sistemul transformat rămîne de aceeaşi formă. Demonstraţia rezultă imediat din observaţia că integrala pătratică $\sum_{i=1}^{n} z_h^2$ =const. (a cărei existenţă caracterizează sistemele semisimetrice (II)) nu-şi schimbă forma cînd z_h sînt supuse unor transformări ortogonale.

2° Dacă C e geodezică, ecuaţiile de paralelism (I_a) sînt satisfăcute (cf. §7) de către $\xi^{(i)} = x'_i = \lambda_n^{(i)}$ şi, prin urmare, (datorită lui (22) şi (23_a)), ecuaţiile (II) sînt satisfăcute de

$$(26) \qquad z_h = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1), \quad z_n = 1.$$

De unde rezultă

$$(27) \qquad p_{hn} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1),$$

pentru orice valoare a lui s. Reciproc, dacă au loc (27), ecuaţiile (II) admit soluţia (26), iar C e geodezică.

3° Tot în ipoteza că C e geodezică, reducerea sistemului (II) atunci cînd se cunoaşte soluţia particulară (26) e, ca să spunem aşa, automată. Într-adevăr, în virtutea ecuaţiilor (27), în primele $n-1$ ecuaţii (II) nu apare z_n, iar a n-a se reduce la $dz_n/ds = 0$.

4° Oricare ar fi C, dacă se cunosc m direcţii paralele independente, adică m soluţii independente ale ecuaţiilor originale (I_a), se ştie din teoria generală a sistemelor lineare că e posibilă o reducere cu m unităţi. Vrem să arătăm că şi aici se ajunge foarte simplu la reducerea efectivă. Şi iată cum.

Se începe (profitînd de observaţia finală din §6) cu normalizarea celor m soluţii cunoscute, deducînd un număr egal de soluţii mutual ortogonale (ceea ce se face cu operaţiuni raţionale). Ne imaginăm apoi că substituim enuplului originar de direcţii Ω asociat oricărui punct al lui C (care conţine direcţia lui C şi alte $n-1$

ortogonale la ea), un alt enuplu ortogonal Ω^*, în care figurează cele m direcţii ale noastre furnizate de ortogonalizarea soluţiilor cunoscute.

Cosinusurile directoare z_h^* (ale unei direcţii oarecare) faţă de Ω^* sînt legate de cosinusurile directoare z_h, referitoare la Ω, printr-o substituţie ortogonală. Sistemul (II), transformat în z_h^* (ceea ce conservă tipul semisimetric), admite astfel, prin construcţie, m soluţii distincte de tipul: $n-1$ dintre z^* nule şi a n-a egală cu unitatea. Cu această presupunere pentru cele m soluţii despre care e vorba, fie ele $z_n^*, z_{n-1}^*, \dots, z_{n-m+1}^*$, se observă imediat că fiecare p_{hk} trebuie să se anuleze pentru

$$h = 1, 2, \dots, n-m, \qquad k = n-m+1, n-m+2, \dots, n,$$

astfel că primele $n-m$ ecuaţii transformate constituie un sistem redus (tot de tip semisimetric) conţinînd numai necunoascutele $z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-m}^*$, C.C.T.D.

12. Spaţii cu trei dimensiuni

Pentru $n=3$, sistemul (II) e exact cel de care depinde teoria triedrului mobil[15]: nu trebuie decît să punem în evidenţă cealaltă interpretare a rezultatelor, relativ la paralelismul într-o V_3, de-a lungul unei curbe C date. Să ne restrîngem la cazul, mai simplu, în care C e geodezică. Conform observaţiei a 3-a din paragraful precedent, sistemul diferenţial (II) în z_1, z_2, z_3 se reduce în acest caz (cu z_3 =const., asociat) la sistemul binar

$$\frac{dz_1}{ds} = p_{12} z_2, \qquad \frac{dz_2}{ds} = p_{21} z_1.$$

O dată cu relaţia $p_{12} + p_{21} = 0$ avem şi integrala $z_1^2 + z_2^2$ =const; desemnînd constanta cu r^2, putem pune, corespunzător, $z_1 = r\cos\zeta$, $z_2 = r\sin\zeta$, de unde se obţine o singură ecuaţie în ζ

$$\frac{d\zeta}{ds} = p \qquad (p = -p_{12} = p_{21}).$$

După cum se vede, ajungem la o simplă cuadratură.

13. Legătura cantităţilor p_{hk} cu coeficienţii de rotaţie ai lui Ricci

Să presupunem că C face parte dintr-o congruenţă (fixată, dar arbitrară) de curbe în V_n. În această ipoteză, $\lambda^{(i)}$ şi, deci, $\lambda_{n/i}$ pot fi privite ca funcţii de $x_1, x_2, \dots, x_n$ care se reduc, de-a lungul lui C, folosind (3), la funcţiile de s considerate anterior (§11).

Să ne imaginăm că asociem acestei congruenţe, din care face parte C, alte $n-1$ curbe, astfel încît să constituie un enuplu ortogonal, singura condiţie fiind să se identifice cu Ω în punctele lui C. Şi fie $\lambda_k^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\lambda_{h/i}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ respectivele sisteme de coordonate contravariante şi covariante.

Astfel, de-a lungul lui C vom avea

$$\frac{d\lambda_{h/i}}{ds} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} x_j' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} \lambda_n^{(j)},$$

iar (25_a) (în care, în al doilea termen, schimbăm între ei indicii i şi l) se poate scrie

$$p_{hk} = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)} \left[\frac{\partial \lambda_{h/i}}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{n} \begin{Bmatrix} i\, j \\ l \end{Bmatrix} \lambda_{k/l} \right].$$

[15] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2e édition, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1914), Chap. II, pp. 27–41.

În cantitatea din paranteză recunoaştem derivata covariantă[16] $\lambda_{h/ij}$, astfel că, reamintindu-ne formulele care definesc *coeficienţii de rotaţie*,

$$\gamma_{hkn} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{h/ij} \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)},$$

ajungem la concluzia că

$$p_{hk} = \gamma_{hkn}, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Acum, se ştie că, în calitate de coeficient de rotaţie, $\gamma_{hkn} ds$ admite următoarea interpretare: Cînd originea enuplului Ω se deplasează cu ds de-a lungul lui C, trecînd de la un punct generic P într-un punct foarte apropiat P', direcţia h[17] în P' nu rămîne, în general, ortogonală direcţiei k corespunzătoare din punctul P, ci formează cu ea unghiul $\frac{\pi}{2} - \gamma_{hkn} ds$.

Aceeaşi interpretare o capătă, deci, şi $p_{hk} ds$ astfel că recunoaştem în sistemele (II), şi sub acest aspect geometric, generalizarea teoriei elementare a triedrului mobil.

14. Varietăţi cu o congruenţă de curbe paralele relativ la o transversală oarecare

Fie $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sistemul de coordonate covariante al unei congruenţe de curbe în V_n. Să presupunem că liniile curbe ale acestei congruenţe sînt oriunde paralele, adică satisfac condiţiile de paralelism de-a lungul oricărei curbe C. Alegînd, în particular, drept C o linie din congruenţă, vedem că aceasta trebuie să fie formată din geodezice (§7). În general, totul se reduce la exprimarea faptului că ecuaţiile de paralelism (în oricare din formele pe care le-am dat), de exemplu (I_b), sînt verificate în orice punct din V_n[18] şi pentru orice direcţie x'_j. De unde, explicitînd cantităţile $\frac{d\xi_i}{ds}$, (I_b) se scriu

$$\sum_{j=1}^{n} x'j \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{n} \left\{ {i\,j \atop l} \right\} \xi_l \right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ξ_i trebuind să verifice ecuaţiile în număr de n^2

$$(28) \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{n} \left\{ {i\,j \atop l} \right\} \xi_l = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

care exprimă anularea identică a sistemului covariant ξ_{ij}, primul derivat al sistemului ξ_i.

Din (28) rezultă, în particular,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i},$$

---

[16]Cf. Ricci şi Levi-Civita, loc. cit. [1]).

[17]Adică direcţia definită de parametrii $\lambda_h^{(i)}$ (sau de momentele $\lambda_{h/i}$).

[18]Se înţelege, de obicei, din acea parte a lui V_n luată în consideraţie, în care sînt presupuse satisfăcute limitările calitative necesare.

de unde se vede că ξ_i sînt derivatele unei aceleiaşi funcţii F. Astfel că (13), ori, eventual, ecuaţia echivalentă

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{(ij)}\xi_i\xi_j = 1,$$

devine

$$\Delta F = 1 \qquad (\Delta \text{ parametru diferenţial de 1-ul ordin}),$$

dovedindu-ne că hipersuprafeţele $F=$const. (ale căror traiectorii ortogonale sînt curbele congruenţei noastre) sînt geodezic paralele.

Săluăm, pentru simplitate, funcţia F drept coordonată x_n, asociindu-i drept coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, cele $n-1$ integrale independente ale ecuaţiei

$$\nabla(x_n, \Theta) = 0 \qquad (\nabla \text{ parametru diferenţial mixt}),$$

astfel că hipersuprafeţele coordonate x_h =const. $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ sînt ortogonale pe cele cu x_n =const. Vom avea aşadar

$$a^{(nj)} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad a^{(nn)} = 1, \tag{29}$$

ca şi

$$\xi_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad \xi_n = 1;$$

iar ecuaţiile (28) se vor reduce la

$$\begin{Bmatrix} i\ j \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

sau încă, ţinînd seamă de identitatea

$$\begin{Bmatrix} i\ j \\ n \end{Bmatrix} = \sum_{h=1}^{n} a^{(hn)} a_{ij,h}$$

şi de ecuaţiile (29), la următoarele:

$$a_{ij,n} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă observăm că ecuaţiile (29) sînt echivalente cu cele analoage relativ la elementele reciproce:

$$a_{nj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad a_{nn} = 1, \tag{29'}$$

şi ne aducem aminte că

$$a_{ij,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{in}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{nj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n}\right),$$

rezultă, în definitiv,

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{28'}$$

Ecuaţiile (29′) şi (28′) arată că ds^2 *capătă forma*

$$dx_n^2 + d\sigma^2, \tag{30}$$

unde cu $d\sigma^2$ am notat pătratul unui element linear arbitrar în cele $n-1$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (cu coeficienţi independenţi de x_n).

Deoarece[19] forma (30) e caracteristică varietăţilor care admit o infinitate simplă de *suprafeţe geodezice*[20], recunoaştem astfel că *cele două proprietăţi ale unei varietăţi V_n, de a admite ∞^1 suprafeţe geodezice şi de a conţine o congruenţă cu paralelism complet, au loc întotdeauna simultan.*

15. Diferenţiale de ordinul al 2-lea – Determinări invariante – Lema lui Ricci

Într-o cercetare dată, fie fixate variabilele independente, de exemplu $x_1, x_2, \ldots, x_n$. După cum se ştie de la analiză, avem întotdeauna dreptul să considerăm nule diferenţialele secunde $d^2x_1, d^2x_2, \ldots, d^2x_n$. Dar o asemenea convenţie nu are caracter invariant relativ la schimbările de variabile. Într-adevăr, dacă înlocuim x_i-urile cu n combinaţii independente ale lor $x'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, diferenţialele secunde

$$d^2x'_i = \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j \partial x_l} dx_j dx_l$$

(calculate în baza ipotezei $d^2x_i = 0$) rezultă, în general, diferite de zero.

Dacă variabilelor li se asociază o formă diferenţială pătratică, să ne gîndim, de exemplu, la metrica unei V_n (cu notaţiile din §§ precedente), o caracterizare invariantă devine foarte la îndemînă. E suficient să presupunem d^2x_i (nenuli, dar) definiţi după cum urmează:

$$d^2x_i + \sum_{j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} dx_j dx_l = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Din ecuaţiile geodezicelor (§7), înmulţite cu ds^2, se vede că asemenea d^2x_i corespund variabilelor de-a lungul geodezicei izvorîte din punctul generic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în direcţia, de asemenea generică, $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$. Această interpretare geometrică asigură a priori doritul caracter invariant al convenţiei mai sus menţionate, fără a mai fi necesară o verificare materială, care, de altfel, poate fi făcută într-o manieră evidentă.

La fel în ce priveşte suprapunerea a două sisteme independente de creşteri dx_i şi δx_i. S-ar putea pune $d\delta x_i = \delta dx_i = 0$, dar, în timp ce comutarea creşterilor d şi δ are, cum lesne se vede, caracter invariant, nu la fel se întîmplă cu poziţiile $d\delta x_i = 0$. Le vom înlocui cu

$$d\delta x_i + \sum_{j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} dx_j \delta x_l = 0, \tag{31}$$

care implică

$$d\delta x_i = \delta dx_i, \tag{31'}$$

şi conţin drept caz particular, pentru $d = \delta$, precedentele expresii ale lui d^2x_i.

Invarianţa ecuaţiilor (31) la schimbări de variabilă se poate deduce aici şi din interpretarea geometrică. E de-ajuns să observăm că, punînd $\delta x_i = \varepsilon\xi^{(i)}$ (cu ε constantă infinitezimală), (31) se identifică cu (I_a), astfel că exprimă felul în care trebuie să se modifice δx_i în urma deplasării $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, pentru a defini

[19] Cf. J. Hadamard, *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions*, Bulletin des Sciences Mathématiques, t. XXV (1901), pp. 37–40.

[20] Se numesc suprafeţe geodezice acele (eventuale) varietăţi cu $n-1$ dimensiuni imersate într-o V_n, care conţin în întregime geodezica lui V_n care conjugă două puncte arbitrare ale lor.

direcţii paralele între ele. În afara unei verificări directe, această proprietate de invarianţă se poate proba cu un elegant artificiu formal indicat de Riemann[21] şi explicitat de Weber[22].

Din (31), ţinînd seamă că

$$da_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} dx_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij,k} + a_{jk,i})dx_j = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n}\left[a_{lk}\left\{ {i\ j \atop l} \right\} = a_{li}\left\{ {j\ k \atop l} \right\}\right] dx_j,$$

rezultă identic

$$d\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\delta x_h \delta x_k = 0, \tag{32}$$

ca şi

$$d\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_h dx_k = 0.$$

Aceste relaţii sînt echivalente cu binecunoscutul rezultat de calcul diferenţial absolut că sistemul derivat covariant al coeficienţilor a_{ik} ai formei fundamentale se anulează identic (lema lui Ricci).

16. Diferenţiale de ordin superior. Un invariant care rezumă simbolurile lui Riemann, furnizîndu-le într-un mod mai direct expresia explicită

În urma aplicării repetate a formulelor (31), rămîn, cu siguranţă, definite (în funcţie de diferenţialele prime, de simbolurile lui Christoffel şi de derivatele lor) şi diferenţiale superioare de tipul $d'\delta dx_i$, $\delta d' dx_i$, simbolul d' trebuind tratat în acelaşi mod cu d şi δ.

Nu se poate afirma că $d'\delta dx_i$ coincide cu $\delta d' dx_i$, dimpotrivă, un calcul efectiv arată că lucrurile nu stau aşa. Diferenţele

$$u^{(i)} = d'\delta dx_i - \delta d' dx_i \tag{33}$$

posedă, totuşi, remarcabila proprietate de a constitui un sistem covariant.

Pentru demonstraţie, să considerăm un sistem covariant auxiliar p_i, constituit din n funcţii de x (fără intervenţia diferenţialelor) şi să pornim prin a observa că (întrucît sistemul p_i e presupus covariant)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$$

e un invariant. Invariantă e deci (pentru că şi operatorii d' şi δ sînt invarianţi) şi diferenţa

$$G = d'\delta\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i - \delta d'\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = d'\sum_{i=1}^{n}(\delta p_i dx_i + p_i \delta dx_i) - \delta\sum_{i=1}^{n}(d' p_i dx_i + p_i d' dx_i).$$

Dezvoltînd şi ţinînd seamă că, datorită lui (31′),

$$d'\delta p_i = \delta d' p_i,$$

[21] l. c. [2]), p. 381.
[22] l. c. [2]), p. 388.

se obţine

$$G=\sum_{i=1}^{n}p_i(d'\delta dx_i-\delta d'dx_i)=\sum_{i=1}^{n}p_iu^{(i)},$$

de unde se vede că şi $\sum_{i=1}^{n}p_iu^{(i)}$ e un invariant. Din această invarianţă şi din faptul că p_i sînt arbitrare (sînt funcţii de x, supuse numai condiţiei de a se transforma după o lege covariantă atunci cînd se face o schimbare de variabilă), rezultă contravarianţa sistemului $u^{(i)}$ definit de (33).

Aşadar rezultă invariant

$$I=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u^{(i)}\delta'x_k, \tag{34}$$

unde $\delta'x_k$ reprezintă un sistem arbitrar de creşteri ale variabilelor.

Cum din (31) urmează

$$\begin{aligned}
d'\delta dx_i&=-d'\sum_{j,l=1}^{n}\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}dx_j\delta x_j\\
&=-\sum_{j,l,h=1}^{n}\frac{\partial\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}}{\partial x_h}d'x_hdx_j\delta x_l-\sum_{j,l=1}^{n}\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}(d'dx_j\delta x_l+dx_jd'\delta x_l),\\
\delta d'dx_i&=-\delta\sum_{j,l=1}^{n}\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}dx_jd'x_j\\
&=-\sum_{j,l,h=1}^{n}\frac{\partial\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}}{\partial x_h}\delta x_hdx_jd'x_l-\sum_{j,l=1}^{n}\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}(\delta dx_jd'x_l+dx_j\delta d'x_l),
\end{aligned}$$

prin scădere (după ce am schimbat pe h cu l în prima sumă) se ajunge la

$$\begin{aligned}
u^{(i)}&=d'\delta dx_i-\delta d'dx_i\\
&=\sum_{j,l,h=1}^{n}\left[\frac{\partial\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}}{\partial x_h}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}j\ h\\ i\end{matrix}\right\}}{\partial x_l}\right]dx_jd'x_l\delta x_h-\sum_{j,l=1}^{n}\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}(d'dx_j\delta x_l-\delta dx_jd'x_l).
\end{aligned}$$

Tot din (31) rezultă

$$d'dx_j=-\sum_{h,t=1}^{n}\left\{\begin{matrix}h\ t\\ j\end{matrix}\right\}dx_hd'x_t,\qquad \delta dx_j=-\sum_{h,t=1}^{n}\left\{\begin{matrix}h\ t\\ j\end{matrix}\right\}dx_h\delta x_l,$$

astfel că, schimbînd indicii în aşa fel încît să ajungem la factorul comun $dx_jd'x_l\delta x_h$, ajungem la

$$-\sum_{j,l=1}^{n}\left\{\begin{matrix}j\ l\\ i\end{matrix}\right\}(d'dx_j\delta x_l-\delta dx_jd'x_l)=\sum_{j,l,h=1}^{n}dx_jd'x_l\delta x_h\sum_{t=1}^{n}\left[\left\{\begin{matrix}t\ h\\ i\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}j\ l\\ t\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}t\ l\\ h\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}j\ h\\ t\end{matrix}\right\}\right],$$

şi obţinem, în fine

$$u^{(i)} = \sum_{j,l,h=1}^{n} dx_j d'x_l \delta x_h \{ji, lh\}, \tag{35}$$

unde am notat

$$\{ji, lh\} = \frac{\partial \begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_h} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} j\,h \\ i \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_{t=1}^{n} \left[\begin{Bmatrix} j\,l \\ t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t\,h \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} j\,h \\ t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t\,l \\ i \end{Bmatrix} \right]$$

simbolurile lui Riemann de a 2-a speţă.

Să trecem la cele de prima speţă punînd

$$a_{jk,lh} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \{ji, lh\}, \tag{37}$$

expresia (34) a lui (I) devine, datorită lui (35)

$$I = \sum_{j,l,h,k=1}^{n} a_{jk,lh} dx_j d'x_l \delta x_h \delta' x_k \tag{34'}$$

şi pune direct în evidenţă caracterul covariant al simbolurilor (37). Dacă nu mă înşel, acesta e modul cel mai rapid pentru a ajunge aici. Cît despre proprietăţile acestor simboluri, cuprinse în formulele

$$a_{jk,lh} = -a_{jk,hl},$$
$$a_{jk,lh} = a_{lh,jk},$$

nu mai rămîne decît să ne referim la modul obişnuit de a le trata, obţinîndu-le (prima imediat, a doua cu cîteva transformări) din formulele de definiţie.

Trebuie în schimb să ne îndreptăm atenţia asupra interpretării geometrice a invariantului I în cazul deosebit de important în care diferenţialele independente se reduc la două, atunci cînd d' coincide cu d şi δ' cu δ.

17. Paralelogramoizi – Bază şi suprabază. Dezvoltarea coordonatelor vîrfurilor plecînd de la bază

Fie PQ un arc generic de geodezică pe varietatea vnoastră V_n. Să ne imaginăm că din punctele P şi Q pleacă alte două geodezice în direcţii paralele. Ele formează (§8) cu PQ un acelaşi unghi ψ. Considerăm, pe aceste geodezice, două arce egale

$$PP' = QQ' = ds,$$

şi unim P' şi Q' cu un arc de geodezică. Se obţine astfel un patrulater geodezic pe care-l vom numi *paralelogramoid*, desemnînd laturile opuse PQ şi $P'Q'$ drept *bază* şi *suprabază*.

Vom nota cu $x_i^{(P)}$, $x_i^{(Q)}$, $x_i^{(P')}$, $x_i^{(Q')}$ coordonatele vîrfurilor P, Q, P', Q', cu $\xi_P^{(i)}$, $\xi_Q^{(i)}$ parametrii de direcţie ai celor două geodezice paralele în punctele lor de origine, cu $\begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix}_P$, $\begin{Bmatrix} j\,l \\ i \end{Bmatrix}_Q$ valorile coeficienţilor lui Christoffel în aceleaşi puncte.

Din ecuaţiile geodezicelor, neglijînd termenii de ordin superior lui 2 în ds, avem

$$(38)\qquad \begin{cases} x_i^{(P')} = x_i^{(P)} + ds\xi_P^{(i)} - \dfrac{1}{2}ds^2 \displaystyle\sum_{j,l=1}^{n} \left\{ {j\,l \atop i} \right\}_P \xi_P^{(j)}\xi_P^{(l)}, \\ x_i^{(Q')} = x_i^{(Q)} + ds\xi_Q^{(i)} - \dfrac{1}{2}ds^2 \displaystyle\sum_{j,l=1}^{n} \left\{ {j\,l \atop i} \right\}_Q \xi_Q^{(j)}\xi_Q^{(l)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

Să notăm cu δx_i diferenţele $x_i^{(Q)} - x_i^{(P)}$ şi, în general, cu δf variaţia determinării oricărui element f (numeric sau geometric) f care trece din P în Q. Din (38), obţinem prin scădere

$$x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + ds\delta\xi^{(i)} - \frac{1}{2}ds^2\delta \sum_{j,l=1}^{n} \left\{ {j\,l \atop i} \right\} \xi^{(j)}\xi^{(l)}$$

Cum, prin chiar construcţia lui, ds nu se schimbă la trecerea din P în Q, atunci, considerîndu-l în continuare infinitezimal şi punînd, pentru simplitate,

$$dx_i = \xi_P^{(i)} ds,$$

ţinînd seamă şi de (31) cu $\delta = d$, mai putem scrie:

$$(39)\qquad Dx_i = x_i^{(Q')} - x_i^{(P')} = \delta x_i + \delta dx_i + \tfrac{1}{2}\delta d^2 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Se vede de aici că diferenţele Dx_i ale coordonatelor omoloage ale punctelor P' şi Q' sînt (cu aproximaţia convenită relativ la ds) de ordinul întîi faţă de variaţia δ: cu alte cuvinte, indicînd cu δs arcul PQ şi tratîndu-l ca pe o infinitezimală (independent de ds), diferenţele Dx_i rezultă de asemenea infinitezimale de primul ordin (cel puţin) faţă de δs. Aşadar, ecuaţiile (39) furnizează o expresie care e exactă:

pînă la ordinul al doilea faţă de ds;

pînă la ordinul întîi faţă de δs.

Din semnificaţia simbolurilor d şi δ care apar în (39), rezultă imediat că, asemenea lui d^2, şi δd, δd^2 se explicitează conform lui (31). Şi e aproape inutil să mai spunem că, în toate calculele făcute, toate funcţiile de poziţie se referă la punctul P.

18. Lungimea suprabazei. – Curbură

Să reprezentăm prin a'_{ik} coeficienţii pătratului elementului linear în P'. În virtutea comportamentului deja observat al lui Dx_i, putem privi

$$(40)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik} Dx_i Dx_k$$

ca *expresie a pătratului distanţei* $\overline{P'Q'}^{\,2}$*, neglijînd termenii de ordin superior lui* 2*, fie în* ds*, fie în* δs.

Merită să menţionăm (cu aceeaşi aproximaţie) şi valorile lui a'_{ik} în punctul P. E suficient, pentru asta, să dezvoltăm de-a lungul geodezicei PP', neglijînd termenii în ds^3. O să avem

$$(41)\qquad a'_{ik} = a_{ik} + da_{ik} + \tfrac{1}{2}d^2 a_{ik}.$$

Un transport analog se poate pune în evidenţă pe o Dx_i generică, adăugînd şi scăzînd termenul $\frac{1}{2}d^2\delta x_i$ (şi amintindu-ne că $\delta dx_i = d\delta x_i$). Astfel, ecuaţiile (39) devin

$$(39') \qquad Dx_i = D'\delta x_i - \tfrac{1}{2}v^{(i)},$$

unde

$$(42) \qquad D'\delta x_i = \delta x_i + d\delta x_i + \tfrac{1}{2}d^2\delta x_i,$$

$$(43) \qquad v^{(i)} = d\delta dx_i - \delta d^2 x_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

După cum se vede, $v^{(i)}$ sînt de ordinul al treilea (al doilea în ds, primul în δs). Astfel că substituirea lor efectivă în (40), neglijînd termenii de ordin (total) mai mare decît patru, furnizează

$$\overline{P'Q'}^{\,2} = \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik} D'\delta x_i D'\delta x_k - \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik} v^{(i)} D'\delta x_k.$$

Conform ecuaţiilor (41), (42), şi cu aceeaşi aproximaţie, prima sumă se poate pune sub forma

$$\delta s^2 + d\delta s^2 + \frac{1}{2}d^2\delta s^2,$$

unde

$$\delta s^2 = \overline{PQ}^{\,2} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\delta x_i \delta x_k,$$

iar a doua sumă se reduce la

$$J = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} v^{(i)} \delta x_k.$$

Acum, ca urmare a lui (33), $d\delta s^2$ se anulează identic; la fel se întîmplă, aşadar, şi cu $d^2\delta s^2$. Astfel că rămînem cu

$$(44) \qquad \overline{P'Q'}^{\,2} = \overline{PQ}^{\,2} - J,$$

dar rămîne să-i atribuim lui J expresia sa definitivă. Aceasta rezultă din faptul că, datorită lui (43), J poate fi considerat ca un caz particular al invariantului I definit de (34): e suficient să luăm d' egal cu d şi δ' cu δ. Astfel că din (34′) urmează

$$(45) \qquad J = \sum_{j,l,h,k=1}^{n} a_{jk,lh} dx_j dx_l \delta x_h \delta x_k.$$

Sîntem acum în măsură să furnizăm o caracterizare intrinsecă a curburii sub următoarea formă geometrică:

Fie construit în V_n paralelogramoidul infinitezimal $PQP'Q'$. Facem raportul

$$(46) \qquad K = \frac{\overline{PQ}^{\,2} - \overline{P'Q'}^{\,2}}{(ds\delta s \sin\psi)^2}$$

dintre diferenţa pătratelor bazei şi suprabazei şi pătratul ariei paralelogramoidului[23]. *Aşadar, datorită lui* (44), *acest raport*

$$K = \frac{J}{(ds\delta s \sin\psi)^2} \tag{47}$$

constituie curbura riemanniană a lui V_n în P în funcţie de înclinarea paralelogramoidului. Coincidenţa cu expresia obişnuită[24] rezultă din (45).

O dată recunoscut K ca depinzînd numai de punctul P şi de înclinare, din (46) derivă următorul corolar: Toţi paralelogramoizii echivalenţi care stau pe aceeaşi bază (şi au aceeaşi înclinare) au suprabaze de lungime egală.

Aş vrea să mai menţionez, din punct de vedere sistematic, că, dincolo de a fi stabilit o nouă proprietate a curburii riemanniene, procedeul pe care l-am descris prezintă faţă de tratarea obişnuită şi avantajul de a evita anumite dezvoltări formale. Într-adevăr, de obicei se defineşte curbura lui V_2 în unul dintre modurile puse în evidenţă de Gauss; apoi se trece la V_n făcînd să apară V_2-urile formate de geodezicele cu o aceeaşi înclinare. E, deci, necesar, un calcul destul de complicat pentru a recunoaşte că expresia curburii riemanniene a acestor V_2-uri e dată de (47).

Dacă, în schimb, se adoptă pentru K definiţia geometrică (46), pe de o parte reiese mai expresivă traducerea analitică ducînd la (47). Iar pe de altă parte, aceeaşi definiţie fiind valabilă şi pentru $n = 2$, apare cu claritate că valoarea curburii lui V_n dedusă dintr-un paralelogramoid generic coincide cu aceea a unei V_2 arbitrare care (la limită) conţine respectivul paralelogramoid.

Notă critică

Am arătat deja în §15 că expresiile (31)

$$d\delta x_i + \sum_{j,l=1}^{n} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} dx_j \delta x_l = 0$$

ale diferenţialelor de ordinul al doilea nu diferă de cele la care se ajunge explicitînd definiţia corespunzătoare a lui Riemann.

Din acelaşi paragraf mai rezultă şi că, folosind aceste expresii ale diferenţialelor secunde, avem identitatea (lema lui Ricci):

$$\delta ds^2 = d\delta s^2 = d\Phi = \delta\Phi = 0, \tag{48}$$

unde

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_i \delta x_k,$$

iar ds^2, δs^2, înseamnă, cum bine se înţelege,

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_i dx_k, \qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \delta x_i \delta x_k,$$

respectiv.

Aşa stînd lucrurile, nu mai pare ambiguă semnificaţia de atribuit trinomului considerat de Riemann

$$R = \delta^2 ds^2 - 2d\delta\Phi + d^2\delta s^2,$$

[23]Mai precis, al oricărei porţiuni de suprafaţă cu două dimensiuni al cărei contur e paralelogramoidul şi care tinde la zero o dată cu el.

[24]L. Bianchi, loc. cit. [1]), pp. 341–342.

iar o asemenea semnificaţie, datorită lui (48), implică în mod necesar $R = 0$.

În schimb, Riemann afirmă[25]: "Haec expressio (adică R) invenietur $=J$ (avînd J valoarea (45)). Weber, în lămuririle sale, se opreşte îndelung asupra modului de a introduce diferenţialele secunde[26], dar, după ce le-a obţinut expresia explicită, spune doar[27]: "woraus man leicht den Ausdruck erhält $R = J$".

Probabil că în R-ul lui Riemann e numai vreun viciu de scriitură care îi înceţoşează semnificaţia. Sînt mîndru că am reconstruit această semnificaţie, dar n-am putut să-i modific simbolul. Dacă lucrul se poate face, ar fi bine să se dea credit deplin, şi în această chestiune particulară, geniului lui Riemann.

Voi termina cu o observaţie despre calculul curburii în anumite variabile speciale, indicat de Riemann[28] şi dezvoltat de Weber[29]. Dar iată despre ce e vorba.

Să alegem coordonate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel ca, *într-un punct P fixat*, să se anuleze toate simbolurile $\left\{ \begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix} \right\}$ (lucru posibil întotdeauna, după cum foarte bine explică Weber). Fie două sisteme independente de diferenţiale dx_i, δx_i, considerînd nule toate diferenţialele secunde d^2x_i, $d\delta x_i$, δdx_i, $\delta^2 x_i$. Să notăm cu P' şi Q punctele de coordonate $x_i + dx_i$, $x_i + \delta x_i$; şi cu a'_{hk} coeficienţii pătratului elementului linear în P'. În particular, să punem

$$(\delta s^2)_{P'} = \sum_{h,k=1}^{n} a'_{hk} \delta x_h \delta x_k,$$

şi să aplicăm lui a' dezvoltarea Taylor relativ la creşterile d, pînă la ordinul al doilea inclusiv. Cu această aproximaţie avem

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{2} \sum_{h,k,j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j \partial x_l} dx_j dx_l \delta x_h \delta x_k,$$

δs^2 şi derivatele secunde referindu-se, evident, la P. Aşa cum arată Weber, din felul cum au fost alese variabilele, au loc relaţii speciale între derivatele secunde ale lui a_{hk} în P. Ţinînd cont de ele, cu cîteva transformări, găsim

$$(\delta s^2)_{P'} = \delta s^2 + \frac{1}{3} \sum_{h,k,j,l=1}^{n} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{hj}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_h \partial x_j} \right] dx_j dx_l \delta x_h \delta x_k.$$

Suma poate fi privită drept expresia pe care, în baza formulei (45), o ia $-I$, cînd se particularizează ca mai sus variabilele x.

De unde, ţinînd seamă de (47), obţinem

$$\frac{(\delta s^2)_{P'} - \delta s^2}{(ds\delta s \sin\psi)^2} = -\frac{1}{3} K, \tag{49}$$

pe care Riemann, în pasajul citat, o enunţă în cuvinte (multiplicînd ambii membri cu 4, pentru a pune în evidenţă la numitor aria triunghiului $PP'Q$).

---

[25] l.c. [2]), p. 381.

[26] Adăugînd, fără nici o justificare, condiţiile suplimentare

$$d^2\delta s^2 = \delta^2 ds^2 = -2d\delta\Phi.$$

Conform lui (48) (şi dacă formulele trebuie citite asa cum sînt efectiv scrise) totul se anulează.

[27] l.c. [2]), p. 388.

[28] l.c. [2]), p. 261.

[29] l.c. [2]), p. 384–387.

Ajung în fine la observaţia mea.

Să notăm Q' extremitatea elementului linear $(\delta s)_{P'}$ (corespunzător creşterilor δx_i). Acum (49) se scrie

$$\frac{\overline{P'Q^*}^{\,2} - \overline{PQ}^{\,2}}{(ds\delta s \sin\psi)^2} = -\frac{1}{3}K; \tag{49'}$$

în timp ce (46) (cu semn schimbat) furnizează

$$\frac{\overline{P'Q'}^{\,2} - \overline{PQ}^{\,2}}{(ds\delta s \sin\psi)^2} = -K \tag{46'}$$

Membrii din dreapta stau, după cum se vede, în raportul 1 la 3. În mod evident, necoincidenţa lor se datoreşte faptului că punctul Q' (al patrulea vîrf al paralelogramoidului), la care se ajunge prin procedeul invariant, e perfect distinct de punctul Q^* al lui Riemann, definit analitic în funcţie de nişte variabile speciale.

Pentru a localiza diferenţa dintre formule, e util să exprimăm şi procedeul nostru la variabilele speciale ale lui Riemann (aşa cum e, în mod natural permis, dat fiind caracterul invariant). Atunci (31) dau în punctul P

$$d^2x_i = d\delta x_i = \delta dx_i = \delta^2 x_i = 0;$$

dar nu rezultă de aici că în acel punct trebuie să se anuleze şi diferenţialele superioare, ca $\delta d^2 x_i$, $d^2\delta x_i$ etc. În schimb, calculul lui Riemann se bazează pe ipoteza că se anulează toate diferenţialele de ordin superior lui 1: ipoteză legitimă şi ea, dar *nu* dotată cu un caracter invariant (la schimbări de variabile). Aşa că nu trebuie să ne surprindă faptul că rezultatele diferă; vom observa mai curînd întîmplătoarea analogie a formulelor (49′) şi (46′), ai căror membri drepţi diferă numai printr-un factor numeric.

Padova, noiembrie 1916.

TULLIO LEVI-CIVITA

INDICE