SINTEZA LUCRARII TE_46, NR. 83/2010, ANUL 2012

MARIUS VLĂDOIU

INTRODUCERE

In perioada ianuarie–decembrie 2012, membrii grantului UEFISCDI, avand numarul 83/2010, PNII-RU cod TE_46/2010, program Resurse Umane, cu titlul "Modelarea algebrica a unor obiecte combinatoriale si aplicatii computationale", au elaborat sase lucrari [9], [23], [21], [25], [14], [12], dintre care una a fost acceptata spre publicare in J. Pure Applied Algebra, patru au fost submise, iar a sasea este in curs de finalizare. Mentionam ca pentru aceste lucrari vor fi disponibile linkuri din pagina de web a grantului http://gta.math.unibuc.ro/pages/mv/em.htm. De asemenea, in anul 2012, a aparut articolul [1] raportat in anul 2011 si de asemenea a fost acceptat spre publicare articolul [19] (vezi detaliile publicatiilor la bibliografie). In cele ce urmeaza prezentam detaliat rezultatele principale obtinute in lucrarile finalizate [9], [23], [21], [25], [14], care au fost finalizate in acest an si submise la jurnale cotate ISI. Dorim sa mentionam ca pentru acest an am avut prevazute realizarea unui articol care sa fie trimis spre publicare si aparitia unui articol (vezi [19], [1]), dar dupa cum se poate vedea de mai sus am depasit acest numar.

1. REZULTATE STIINTIFICE PRINCIPALE

1. Lucrarea "Squarefree monomial ideals with constant depth function" [23] a fost elaborata in colaborare de J. Herzog si M. Vladoiu si a fost acceptata spre publicare in Journal of Pure and Applied Algebra. Pentru un ideal omogen I in inelul de polinoame $S = K[x_1,\dots,x_n]$ peste un corp K functia depth a lui I se defineste ca fiind functia numerica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto \operatorname{depth} S/I^k$. Aceasta functie a fost studiata de numerosi autori in [18],[5],[19]. Una din principalele probleme in acest context este sa caracterizam acele functii numerice care sunt functiile depth ale unui ideal omogen. Un raspuns complet la aceasta problema nu a fost inca gasit. Insa, in aceasta directie exista un rezultat clasic al lui Brodmann [6] care spune ca orice functie depth este constanta de la un anumit rang incolo. Cu alte cuvinte, pentru orice ideal graduat $I \subset S$ exista un intreg t_0 astfel incat $\operatorname{depth} S/I^t$ este constanta pentru orice $t \geq t_0$. Numim aceasta constanta "limit depth" si o notam cu $\lim_{t\to\infty} \operatorname{depth} S/I^t$. Teorema lui Brodmann este de fapt valabila intr-un context mai general, mai precis pentru orice ideal intr-un inel local noetherian. Cu toate acestea, in lucrarea [23] autorii se restrang doar la cazul idealelor monomiale. Cu toate ca functia depth nu a fost complet inteleasa in general, s-a aratat in [18] ca orice functie numerica crescatoare marginita poate fi realizata ca functia depth a unui anumit ideal monomial, care poate fi construit explicit. In paralel cu acest rezultat este conjecturat de cativa autori [15] ca functia depth a unui ideal monomial liber de patrate este o functie numerica descrescatoare. Pentru aceasta conjectura este esentiala ipoteza ca idealul I este liber de patrate, altfel fiind aratat recent in [5] ca daca idealul monomial I nu este liber de patrate, atunci functia sa depth poate avea orice numar de puncte de maxim local.

In lucrarea [23], dorinta autorilor este sa clasifice acele ideale monomiale a caror functie depth este constanta. Cu ajutorul teoremei lui Brodmann [6] orice putere suficienta de mare a unui ideal are functia depth constanta. De aceea, autorii restrictioneaza problema clasificarii la ideale monomiale libere de patrate. In acest caz $\operatorname{depth} S/I \geq \operatorname{depth} S/I^k$ deoarece $\operatorname{depth} \sqrt{J} \geq \operatorname{depth} J$ pentru orice ideal monomial J, vezi de exemplu [22, Theorem 2.6]. In aceeasi lucrare [22] si de asemenea in [4] este studiata intrebarea, legata strans de problema noastra, cand anumite clase de ideale monomiale cu un radical dat au acelasi depth. Considerand puterile unui ideal I, asa cum a fost facut in aceasta lucrare, exista un rezultat clasic de Waldi [32, Korollar 1], care afirma ca daca I este generic intersectie completa si toate puterile lui I au depth maximal, adica sunt Cohen–Macaulay, atunci I este intersectie completa. Pe de alta parte, clasa idealelor monomiale libere de patrate avand functia depth constanta, ale caror puteri nu sunt Cohen–Macaulay, este mult mai mare.

In prima sectiune a lucrarii, autorii descriu o metoda de constructie a idealelor monomiale libere de patrate care au functia depth constanta. In Teorema 1.1 este aratat ca daca I si J sunt ideale monomiale libere de patrate in multimi disjuncte de variabile ale caror inele Rees sunt Cohen–Macaulay atunci $I+J$ are functia depth constanta daca si numai daca I si J au aceasta proprietate. O afirmatie identica are lor pentru IJ. Demonstratia acestui rezultat este mai putin evidenta decat s-ar putea astepta. Chiar si in cazul simplu in care f este un element regulat modulo I nu este momentan cunoscut cum functia depth a idealului I este legata de cea a lui (I, f). Demonstratia Teoremei 1.1. se bazeaza pe urmatorul fapt fundamental, prezentat in Corolarul 1.7, care afirma ca un ideal monomial I, al carui inel Rees este Cohen–Macaulay, are functia depth constanta daca si numai daca $\operatorname{depth} S/I = n - \ell(I)$, unde $\ell(I)$ reprezinta dispersia analitica a lui I. Acest criteriu este o consecinta imediata a unui rezultat [13, Proposition 3.3] al lui Eisenbud si Huneke.

Prin aplicarea iterativa a Teoremei 1.1 autorii obtin ca un caz special, urmatoarea clasa de ideale $\mathscr{C}$ cu functia depth constanta: $I \in \mathscr{C}$ daca si numai daca $I = I_1 + \cdots + I_k$, unde idealele I_j sunt definite in multimi disjuncte de variabile doua cate doua si unde fiecare I_j este un un produs de ideale monomiale prime definite pe multimi disjuncte de variabile. Din pacate, asa cum este aratat in Exemplul 1.4. nu toate idealele monomiale libere de patrate avand functia depth constanta sunt de forma descrisa in Exemplul 1.4. Cu atat mai mult este surprinzator ca orice ideal muchie (Teorema 2.2), orice ideal matroidal (Teorema 2.3), precum si orice ideal fateta a unui complex simplicial pur de tip ”forest” conex in codimensiune 1 (Teorema 2.6) care are functia depth constanta apartine clasei $\mathscr{C}$.

2. Lucrarea ”The power of pyramid decomposition in Normaliz” e scrisa in colaborare de Winfried Bruns, Bogdan Ichim si Christof Söger, vezi [9]. A fost trimisa spre publicare la Mathematical Programing.

De la bun început programul Normaliz a folosit triangulari lexicografice (a se vedea [11] si [8]). Calculul triangularilor lexicografice asa cum este descris in [11] si [8] are doua mari neajunsuri legate de: (i) stocarea datelor (utilizarea memoriei poate depasi rapid capacitatea calculatoarelor actuale); (ii) procesarea paralela a datelor.

Descompunerea in piramide este ideea de baza care a permis Normaliz calculul de triangulari in dimensiune 24 de marime aproximativ $5 \cdot 10^{11}$, într-un timp acceptabil pe sisteme multiprocesor standard (cum ar fi SUN XFire 4450 sau Dell PowerEdge R910).

Descompunerea in piramide in forma pura este extrem de prietenoasa cu memoria, dar timpii de calcul sunt chiar mai prosti decât cei obtinuti la o triangulare lexicografica pura, deoarece prea multe eliminari Fourier-Motzkin pot fi necesare, si aproape toate dintre ele conduc la timp pierdut. Cu toate acestea Normaliz poate face fata triangularilor extrem de mari si acest lucru se datoreaza unei combinatii bine echilibrate a celor doua strategii, descrisa în sectiunea "The current implementation". Pentru calculul seriilor Hilbert Normaliz foloseste descompuneri Stanley [31]. Ca aceasta descopuneri pot fi calculate eficient se bazeaza în mod crucial pe o idee introdusa de Köppe si Verdoolaege [27].

Domeniul de aplicare al calculelor Normaliz este documentat în sectiunea "Computational results". Exemplele principale provin din teoria combinatorica a voturilor pe care le-am gasit în lucrarea lui Schürmann [29]. Dorinta de a efectua calculele de serii Hilbert cerute in [29] a fost un stimul important în dezvoltarea recenta a programului Normaliz.

Pentru calculul bazelor Hilbert descompunerea in piramide are un alt avantaj care este uneori imens: se poate evita triangularea acelor piramide pentru care este a priori clar ca nu vor furniza noi candidati pentru baza Hilbert. Aceasta observatie, pe care se bazeaza contributia autorilor Normaliz la lucrarea [7], a declansat utilizarea descompunerii in piramide ca un principiu general.

Un alt aspect important al descompunerii in piramide este faptul ca paralelizarea devine naturala: piramidele pot fi tratate independent una de celalalta. Precizam faptul ca triangulari de marimea mentionata mai sus pot fi foarte greu obtinute prin calcul serial.

3. Lucrarea "How to compute the multigraded Hilbert depth of a module" e scrisa in colaborare de Bogdan Ichim si Julio José Moyano-Fernández, vezi [25]. A fost recent trimisa spre publicare la Journal of Algebra.

Fie $S = K[x_1,\dots,x_n]$ inelul de polinoame in n variabile cu multigraduarea standard. Scopul acestei lucrari este de a furniza o metoda de calcul pentru Hilbert depth a unui R-modul finit generat multigraduat M. Procedura prezentata în sectiunea "A method for computing the multigraded Hilbert depth of a module" poate fi vazuta ca o generalizare naturala a metodei introduse în [24] pentru calculului Stanley depth a idealurilor monomiale ale lui R — in acest caz putem remarca faptul ca Hilbert depth coincide cu Stanley depth — dar acesta metoda nu poate fi extinsa cu usurinta la cazul general al unui R-modul multigraduat. Folosind noul concept de partitie Hilbert (cf. Definitiei 3.1), precum si tehnicile functoriale expuse de E. Miller în [28], se obtine o metoda de calcul pentru Hilbert depth, în cazul general al unui R-modul finit generat multigraduat M (a se vedea Teorema 3.3 si Corolarul 3.4).

În sectiunea "A method for computing the Stanley depth of a module" este prezentata o posibila abordare a problemei calculului Stanley depth a unui R-modul finit generat multigraduat M bazata pe Teorema 3.3. Se demonstreaza ca într-un *numar finit* de pasi, se poate decide daca o partitie Hilbert induce o descompunere Stanley sau nu (reciproca este întotdeauna adevarata: orice descompunere Stanley induce o partitie Hilbert), iar rezultatul este prezentat in Propozitia 4.4. Se concluzioneaza ca se poate calcula Stanley depth prin analiza tuturor partitiile Hilbert si selectarea celor care induc descompuneri Stanley (Corolarul 4.7).

În ultima sectiune se arata ca metodele prezentate mai sus pot fi efectiv utilizate si se deduc rezultate legate de extinderea si restrictia scalarilor.

4. In cele ce urmeaza prezentam rezultatele obtinute in lucrarea [14]. Avem nevoie de reamintirea catorva rezultate importante pentru descrierea rezultatelor principale ale [14]. In lucrarea [1] sunt studiate domeniile de integritate D care satisfac urmatoarea conditie: pentru orice $I \supseteq AB$ cu I, A si B ideale nenule ale lui D, exista idealele $A' \supseteq A$ si $B' \supseteq B$ astfel incat $I = A'B'$ (pe acestea le numim *domenii sharp*). Se demonstreaza ca domeniile sharp sunt domenii Prüfer pseudo-Dedekind de dimensiune Krull 1. In cazul local, domeniile sharp sunt exact domeniile pseudo-Dedekind (adica domenii de valuare cu grupul valuarii un subgrup complet al grupului aditiv al numerelor reale).

In [2] conceptul de domeniu sharp este extins in contextul star operatiilor.

Pentru un domeniu integru D si o star operatie $*$ pe D, spunem ca D este $*$-sharp daca pentru orice $I \supseteq AB$ cu I, A si B ideale nenule, exista H si J ideale astfel incat $I^* = (HJ)^*$, $H^* \supseteq A$ si $J^* \supseteq B$. In acest caz dimensiunea Krull nu mai este limitata.

Cum o mare parte a rezultatelor din [1] si [2] este demonstrata folosind preponderent argumente ce implica doar structuta multiplicativa din inel este naturala incercarea de a extinde rezultatele in cauza la un context si mai general. Acest cadru natural este oferit de [16]. Introducem acum conceptul cheie din [14]. A se vedea [16] pentru notiunile nedefinite in cele ce urmeaza.

Fie H un monoid si r un sistem de ideale pe H. Atentie, in cele ce urmeaza, prin monoid se intelege exact notiunea folosita in [16] adica un monoid in sensul clasic care este inzestrat in plus cu un element nul. Acest context apare in mod natural daca in cazul inelelor daca se omite structura aditiva dar nu si elementul sau neutru. Spunem ca H este un monoid *r-sharp* daca pentru orice r-ideal I si orice doua submultimi nevide Y si Z ale lui H cu $I \supseteq YZ$, exista r-idealele A si B astfel incat $I = (AB)_r$, $A \supseteq Y$ si $B \supseteq Z$.

Primul rezultat extins din [1] este chiar caracterizarea din propozitia 2. Fie H un monoid si r un sistem de ideale pe H. Atunci Heste un monoid *r-sharp* daca si numai daca pentru orice r-ideal I si orice submultime nenula X a lui H, avem

$$I = [I : [I : X]] \cdot_r [I : X]$$

unde impartirile sunt efectuate in H.

Fie H un monoid si r un sistem de ideale pe H. Amintim ca in [16, (23.3)] un monoid H este definit ca fiind r-Dedekind daca orice r-ideal fractionar nenul l este r-inversabil. Ca un corolar se obtine faptul ca orice monoid r-Dedekind este r-sharp, adica traducerea in contextul sistemelor de ideale a faptului ca orice domeniu Dedekind este sharp din [1].

Fie H un monoid si r un sistem de ideale pe H. In [17, Definition 4.1] monoidul H este numit (r,v)-Dedekind daca orice v-ideal fractionar nenul este r-inversabil. Mai mult, H este numit monoid r-GCD daca orice v-ideal nenul si v-finit generat este r-inversabil. Astfel, orice monoid (r,v)-Dedekind este si monoid r-GCD.

Rezultatul ce urmeaza este echivalentul propozitiei 4 din [1]. Fie H un monoid si r un sistem de ideale pe H astfel incat H este r-sharp. Atunci H este un monoid (r,v)-Dedekind. In particular, H este un monoid r-GCD complet intreg inchis.

Stabilitatea conditiei r-sharp la trecerea la fractii sau la considerarea unui sistem de ideale mai fin rezulta din traducerea propozitiei 2.2 din [2] in contextul sistemelor de ideale pentru monoizi. Iata si rezultatul.

Fie H un monoid, $S \subseteq H$ o submultime multiplicativa, r un sistem de ideale pe H si q un sistem de ideale pe H_S astfel incat $I_r \subseteq (IH_S)_q$ pentru orice s-ideal I nenul al lui H. Daca H este r-sharp, atunci monoidul de fractii H_S este q-sharp.

Rezultatul central urmarit in [14] este extinderea caracterizarii formulate in [1, Proposition 6] a domeniilor sharp in cazul domeniilor de valuare (adica exact cazul sharp local) in contextul sistemelor de ideale si in functie de grupul de valuare al monoizilor de valuare.

5. In final prezentam rezultatele obtinute de catre J. Herzog si D. Stamate in lucrarea [21]. Fie (R,m,k) un inel local (sau local graduat). Conul sau tangent A este k–algebra graduata asociata filtrarii m-adice pe R. Sunt studiate o serie de invarianti pentru A precum regularitatea Castelnuovo-Mumford sau numarul de ecuatii ce definesc pe A. Se demonstreaza ca daca (R,m) este inel local Cohen-Macaulay, in cazul in care $\operatorname{depth} A \geq \dim A - 1$, atunci are loc $\operatorname{reg} A < e(A)$, unde $e(A)$ este multiplicitatea algebrei A.

Sunt furnizate exemple din care rezulta ca aceasta margine este cea mai buna in ipotezele noastre. Gasirea de majoranti pentru regularitate este un obiectiv important in algebra comutativa si in geometria algebrica, alaturi de ceilalti invarianti asociati rezolutiilor.

O alta problema de interes este studiul numarului minim de ecuatii pentru conul tangent (primele numere Betti) in functie de generatorii algebrei R. Este considerat cazul algebrelor semigrupale $R = k[H]$ asociate semigrupurilor numerice H. Se stie ca daca H este 2- sau 3-generat, atunci R este dat de maxim trei ecuatii, iar daca numarul de generatori pentru H este mai mare strict decat 3, atunci numarul de relatii ce definesc R poate creste arbitrar.

In [21] se arata, surprinzator, ca exista o familie de semigrupuri 3-generate pentru care numarul de ecuatii ce definesc conul tangent al algebrei semigrupale $A = \operatorname{gr} k[H]$ este arbitrar de mare. Mai mult, pentru toate aceste semigrupuri se obtine ca $\operatorname{reg}(A) = e(A) - 1$, exact marginea prezisa de teorema anterioara intr-un cadru mai larg.

Pornind cu un semigrup H generat de n numere naturale, se obtine in mod natural o familie de semigrupuri H_i ai caror generatori se obtin marind cu i generatorii lui H. O problema interesanta este persistenta/evolutia diverselor proprietati intr-o astfel de familie. Autorii demonstreaza ca $\operatorname{reg}(\operatorname{gr} k[H_i])$ tinde la infinit odata cu cresterea parametrului i. De asemenea, restrangandu-si atentia la semigrupuri in $\mathbb{N}$ 3-generate, $H = \langle a, b, c \rangle$, autorii arata ca, conul tangent $A_i = \operatorname{gr} k[H_i]$ devine Cohen-Macaulay pentru i suficient de mare. Sunt determinate de asemenea margini superioare simple pentru aceste praguri in functie de generatorii a, b, c.

2. Rezultate stiintifice obtinute in paralel

In luna iunie a anului 2012 a fost lansata versiunea 2.8 a programului Normaliz (vezi [10]) impreuna cu interfata grafica jNormaliz 1.2 (vezi [3]). Folosind aceasta varianta a programului (versinea 2.8) am reusit sa rezolvam exemple computationale extrem de dificile provenite din teoria combinatoriala a voturilor [9].

3. Diseminarea rezultatelor

In scopul diseminarii rezultatelor s-au tinut zece prezentari de catre echipa grantului in cadrul seminariul de algebra al Institutului de Matematica "Simion Stoilow". De asemenea s-au tinut trei prezentari in cadrul Scolii Nationale de Algebra "Discrete Invariants in Commutative Algebra and Algebraic Geometry", Mangalia, 02–08 Septembrie 2012 de catre Bogdan Ichim, Dumitru Stamate si Mihai Epure (dintre organizatori facand parte Bogdan Ichim si Dumitru Stamate). In luna mai, in perioada 10.05.2012–12.05.2012, s-a tinut la Constanta a doua editie a "Workshop for young researchers in Mathematics", cu o sesiune speciala de algebra comutativa, ai carei organizatori au fost Marius Vladoiu, Bogdan Ichim si Dumitru Stamate. S-au tinut in cadrul acestei conferinte si cate o prezentare de catre Marius Vladoiu, Dumitru Stamate si Mihai Epure.

Marius Vladoiu a participat la 3 stagii de cercetare in strainatate, in Germania si Grecia, care s-au materializat cu scrierea a 2 articole in colaborare cu profesori de la universitatile gazda, unul deja acceptat spre publicare [23], iar cel de-al doilea [12] fiind in curs de finalizare. Bogdan Ichim a participat la 3 stagii de cercetare in strainatate, in Germania, care s-au finalizat cu scrierea a 2 articole in colaborare cu profesori de la universitatile gazda [9], [25] care au fost deja submise spre publicare. De asemenea a tinut o prezentare cu titlul "Introduction to Normaliz" la Universitatea Rostock pe data de 09-05-2012 si o prezentare cu titlul "How to compute the multigraded Hilbert depth of a module" la Universitatea Osnabrück pe data de 20-11-2012. Dumitru Stamate a participat la un stagiu de cercetare in strainatate, in Germania, care s-a finalizat cu scrierea unui articol in colaborare cu profesorul de la universitatea gazda. Epure Mihai urmeaza sa participe la o conferinta internationala la Graz, "Commutative rings, integer-valued polynomials and polynomial functions", in perioada 16-22 Decembrie 2012, la care va tine o prezentare cu titlul "A Schreier domain type condition and its star operation extensions", in care va prezenta ultimele rezultate obtinute anul acesta.

BIBLIOGRAFIE

[1] Z. Ahmad, T. Dumitrescu and M. Epure, A Schreier domain type condition, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 2012, 241-247, 55(3).
[2] Z. Ahmad, T. Dumitrescu and M. Epure, A Schreier domain type condition II, http://arxiv.org/abs/1112.1236.
[3] V. Almendra and B. Ichim, *jNormaliz. A graphical interface for Normaliz.*Available at http://www.math.uos.de/normaliz.
[4] A. Aslam, V. Ene, Simplicial complexes with rigid depth, arXiv:1201.3325v2 [math.AC].
[5] S. Bandari, J. Herzog, T. Hibi, Monomial ideals whose depth function has any given number of strict local maxima, arXiv:1205.1348v1 [math.AC].
[6] M. Brodmann, The asymptotic nature of the analytic spread, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **86**, 35–39 (1979)
[7] W. Bruns, R. Hemmecke, B. Ichim, M. Köppe, and C. Söger, *Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics*. Exp. Math., in press.
[8] W. Bruns and B. Ichim, *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones.* J. Algebra **324** (2010), 1098–1113.
[9] W. Bruns, B. Ichim and C. Söger, *The power of pyramid decomposition in Normaliz.* Preprint 2012. Available at http://arxiv.org/abs/1206.1916.
[10] W. Bruns, B. Ichim and C. Söger, *Normaliz. Algorithms for rational cones and affine monoids.* Available at `http://www.math.uos.de/normaliz`.
[11] W. Bruns and R. Koch, *Computing the integral closure of an affine semigroup.* Univ. Iagel. Acta Math. **39** 59–70 (2001).
[12] H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, Markov Bases of Lattice Ideals, preprint 2012.
[13] D. Eisenbud, C. Huneke, Cohen–Macaulay Rees algebras and their specialization, J. Algebra **81**, 202–224 (1983).
[14] M. Epure, A Schreier domain type condition in the ideal systems setting, preprint 2012.
[15] C. Francisco, H. Tai Ha, A. Van Tuyl, A conjecture on critical graphs and connections to the persistence of associated primes, Discrete Math. **310**, 2176–2182 (2010).
[16] F. Halter-Koch, *Ideal Systems: an Introduction to Multiplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker, New York 1998.
[17] F. Halter-Koch, Mixed invertibility and Prufer-like monoids and domains, Commutative Algebra and Applications, 1-12 de Gruyter 2009.
[18] J. Herzog, T. Hibi, The depth of powers of an ideal, J. Algebra **291**, 534–550 (2005).
[19] J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu, The stable set of associated prime ideals of a polymatroidal ideal, J. Algebraic Combinatorics, DOI 10.1007/s10801-012-0367-z.
[20] J. Herzog, D. Popescu, M. Vladoiu, *Stanley depth and size of a monomial ideal.* arXiv:1011.6462v1.
[21] J. Herzog, D. Stamate, *On the regularity of the tangent cone of a Cohen-Macaulay local ring*, in pregatire.
[22] J. Herzog, Y. Takayama, N. Terai, On the radical of a monomial ideal, Arch. Math. **85**, 397–408 (2005).
[23] J. Herzog, M. Vladoiu, *Squarefree monomial ideals with constant depth function,* arXiv:1209.5890v1, acceptata spre publicare in J. Pure Appl. Algebra.
[24] J. Herzog, M. Vladoiu, X. Zheng, *How to compute the Stanley depth of a monomial ideal.* J.Algebra **322**, 3151–3169 (2009).
[25] B. Ichim, J. Moyano, *How to compute the multigraded Hilbert depth of a module.* Preprint 2012. Available at http://arxiv.org/abs/1209.0084.
[26] G. Lyubeznik, *On the Arithmetical Rank of Monomial ideals.* J. Algebra **112**, 86–89 (1988).
[27] M. Köppe and S. Verdoolaege, *Computing parametric rational generating functions with a Primal Barvinok algorithm.* Electr. J. Comb. **15** (2008), R16, 1–19.
[28] E. Miller, *The Alexander duality functors and local duality with monomial support,* J. Algebra **231**, (2000) 180–234.
[29] A. Schürmann, *Exploiting polyhedral symmetries in social choice.* Social Choice and Welfare, in press.
[30] Y. Shen,*Stanley depth of complete intersection monomial ideals and upper-discrete partitions.* J. Algebra **321**, 1285–1292 (2009).
[31] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology.* Invent. Math. **68**, 175–193, (1982).
[32] R. Waldi, Vollständige Durchschnitte in Cohen–Macaulay–Ringen, Arch. Math. (Basel) **31**, 439–442 (1978/1979).