Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei

Bernhardt Riemann

1 Planul cercetării

Se cunoaște faptul că geometria presupune, ca un dat, fie conceptul de spațiu, fie primele concepte fundamentale pentru construcțiile în spațiu. Acestora li se dau numai definiții nominale, în timp ce determinările esențiale apar sub formă de axiome. Relația dintre aceste presupoziții rămîne, deci, în umbră; nu se vede dacă sau în ce măsură este necesară o legătură între ele, nici dacă ea este *a priori* posibilă.

Din vremea lui Euclid și pînă la Legendre, ca să-l amintim pe cel mai faimos dintre edificatorii moderni ai geometriei, această obscuritate nu a fost depășită nici de matematicieni, nici de filozofi. Aceasta din cauză că nu a fost deloc elaborat conceptul general de mărime multiplu extinsă care include mărimile spațiale. Mi-am propus, așadar, să construiesc, în primul rînd, conceptul de mărime multiplu extinsă, plecînd de la conceptele generale de mărime. Va rezulta că o mărime multiplu extinsă poate suporta diverse relații metrice și că spațiul nu constituie decît un caz particular de mărime tri-extinsă. Rezultă de aici, cu necesitate, că teoremele de geometrie nu se pot deriva din conceptele generale de mărime, dar că acele proprietăți, datorită cărora se deosebește spațiul de alte mărimi tri-extinse imaginabile, se pot deduce numai din experiență. Ceea ce ridică problema căutării faptelor celor mai simple plecînd de la care se pot determina relațiile metrice ale spațiului, sarcină care, prin natura sa, nu e complet determinată: într-adevăr, se pot indica diverse sisteme de fapte simple, suficiente pentru a determina relațiile metrice ale spațiului; cel mai important, pentru scopul actual, fiind cel formulat de Euclid ca fundament al geometriei. Aceste fapte – ca și orice alte fapte – nu sînt logic necesare, ci au doar siguranță empirică, sînt ipoteze. Li se poate, deci, măsura probabilitatea care, totuși, în limitele observației, e foarte ridicată și se poate, apoi, decide asupra posibilității extinderii lor în afara limitelor observației, fie spre nemăsurabilul mare, fie înspre nemăsurabilul mic.

2 Conceptul de mărime n-extinsă

Pornind acum la rezolvarea primei dintre aceste probleme, dezvoltarea conceptului de mărime multiplu extinsă, cred îndreptățit și solicit îngăduință, fie pentru că am o experiență săracă în asemenea chestiuni de natură filozofică, în care dificultatea stă mai curînd în concepte decît în construcție, fie pentru că mi-a fost imposibil să utilizez vreun studiu precedent, în afara unor foarte scurte indicații pe care Consilierul Aulic Gauss le-a dat în al doilea memoriu asupra reziduurilor bipătratice, în „Göttingische gelehrte Anzeigen“ și în cartea pentru jubileul de la Göttingen, ca și unele cercetări filozofice ale lui Herbart.

2.1 Varietăți continue și discrete. Părți determinate ale unei varietăți se numesc cuante. Împărțirea teoriei mărimilor continue în teoria:

1) **relațiilor simple ale domeniului, în care nu e presupusă independența de loc a mărimii,**

2) **relațiilor metrice, în care atare independență trebuie presupusă.**

Conceptele de mărime sînt posibile numai acolo unde există deja un concept general care admite ipostaze particulare. Aceste ipostaze particulare formează o varietate continuă sau discretă după cum există sau nu o trecere continuă de la una la alta. În primul caz, ipostazele individuale se numesc puncte, în cel de-al doilea, elemente ale varietății. Conceptele ale căror ipostazieri formează o varietate discretă sînt atît de frecvente încît, cel puțin în limbile mai evoluate, se poate găsi, pentru orice colecție de obiecte, un concept care să le subsumeze (astfel că, matematicienii, în teoria mărimilor discrete, au putut considera fără ezitare că obiecte diferite sînt de același tip). În schimb, ocaziile pentru formarea conceptelor ale căror ipostaze să formeze o varietate continuă sînt atît de rare în viața de zi cu zi, încît culoarea și poziția obiectelor sensibile sînt, poate, unicele concepte simple ale căror ipostaze formează o varietate pluriextinsă. Ocazii mai frecvente pentru apariția și dezvoltarea acestor concepte se găsesc doar în matematica superioară.

Porțiuni determinate ale unei varietăți, distinse de o marcă sau de o demarcație, se numesc cuante. Ele se compară, din punctul de vedere al cantității, prin numărare în cazul mărimilor discrete, prin măsurare în cazul celor continue. Măsurarea constă în suprapunerea mărimilor de măsurat. Pentru a măsura e, așadar, necesar un mijloc de a individualiza o mărime drept standard de măsură pentru o alta; altfel, două mărimi se pot compara doar dacă una e parte a alteia și în acest caz se poate stabili numai care dintre ele e mai mare sau mai mică, dar nu cît reprezintă fiecare. În acest caz, cercetările care se pot face asupra lor constituie o parte generală a teoriei mărimilor, independentă de determinările metrice, în care cantitățile sînt considerate ca domenii ale unei varietăți, nu ca existînd independent de poziție și nefiind exprimabile cu ajutorul unei unități. Asemenea cercetări au devenit o necesitate în numeroase domenii ale matematicii, în special în tratarea funcțiilor analitice multi-valuate și, probabil, în chiar absența lor ar trebui căutată cauza principală a faptului că celebra teoremă a lui Abel și descoperirile lui Lagrange, Pfaff și Jacobi, despre teoria generală a ecuațiilor diferențiale, au rămas atîta timp nefructificate. Pentru obiectivele pe care ni le propunem aici, va fi, totuși, suficient să reliefăm doar două aspecte ale acestei părți generale ale teoriei mărimilor extinse în care nu se presupune nimic care să nu fie deja implicit în conceptul însuși. Primul dintre aceste aspecte privește apariția conceptului de varietate multiextinsă, al doilea privește posibilitatea reducerii determinărilor de poziție pe o varietate dată la determinări cantitative e lămurirea caracterului specific al unei extensiuni n-uple.

2.2 Elaborarea conceptului de varietate mono-, bi-, n-extinsă

Într-un concept ale cărui ipostaze formează o varietate continuă, la trecerea, conform unei modalități bine definite, de la o ipostază la alta, ipostazele prin care se trece formează o varietate monoextinsă a cărei caracteristică esențiale e că, plecînd din orice punct al său, putem forma o succesiune continuă în doar două direcții, înainte și înapoi. Dacă ne imaginăm că acestă varietate se transformă într-o alta, complet diferită, bineînțeles, din nou într-un mod bine determinat și astfel încît fiecare punct al uneia trece printr-un punct determinat al celeilalte, ipostazele astfel obținute formează o varietate biextinsă. Analog se obține o varietate triextinsă, imaginîndu-ne că o varietate biextinsă se transformă, conform unor modalități definite, în una complet diferită și e ușor de văzut cum se poate continua această construcție. Dacă, în loc să se considere fix conceptul, se consideră că obiectul său variază, atunci această construcție poate fi indicată ca o compunere a unei variabilități cu $n+1$ dimensiuni, formată dintr-o variabilitate cu n dimensiuni și din una cu o singură dimensiune.

Reducerea determinării poziției la determinări cantitative. Caracteristica esențială a unei varietăți n-extinse

Voi arăta cum se poate, reciproc, împărți o variabilitate cu domeniul dat într-o variabilitate cu o dimensiune și o variabilitate cu mai puține dimensiuni. Pentru aceasta, să ne imaginăm o parte variabilă dintr-o varietate cu o singură dimensiune – calculată plecînd de la o origine fixă, astfel ca valorile sale să fie mutual comparabile –, în care fiecărui punct al varietății date îi corespunde o valoare bine definită care variază continuu odată cu punctul; cu alte cuvinte, se presupune dată pe varietate o funcție continuă de poziție care, în plus, nu e constantă de-a lungul nici unei porțiuni a varietății. Orice sistem de puncte pe care funcția are o valoare constantă formează o varietate continuă cu un număr de dimensiuni inferior celei date. Aceste varietăți se transformă continuu una în alta odată cu variația funcției. Se poate, deci, presupune că toate derivă dintr-una singură și asta se poate realiza, în general, în așa fel încît fiecare punct al uneia să se transforme într-un punct bine determinat al celeilalte; se poate renunța aici la studiul cazurilor excepționale care este, desigur, important. În acest fel, determinarea poziției pe varietatea dată e redusă la o determinare a unei mărimi și la o determinare de poziție într-o varietate cu mai puține dimensiuni. E, acum, ușor de arătat că aceasta din urmă are $n-1$ dimensiuni dacă varietatea e n-extinsă. Repetînd de n ori acest procedeu, determinarea poziției, într-o varietate n-dimensională, se reduce la n determinări numerice; așadar, determinarea poziției într-o varietate dată se reduce, ori de cîte ori e posibil, la un număr finit de determinări cantitative. Există, totuși, varietăți în care determinarea poziției cere nu un număr finit, ci unul infinit sau o varietate continuă de determinări de mărime. De exemplu, asemenea varietăți formează valorile posibile ale unei funcții într-o regiune dată, formele posibile ale unei figuri spațiale etc.

3 Relațiile metrice de care e susceptibilă o varietate cu n dimensiuni presupunînd că liniile posedă o lungime independentă de poziție, adică orice linie poate fi măsurată de oricare alta

După ce am construit conceptul de varietate n-extinsă și am găsit caracteristica sa esențială în faptul că determinarea poziției pe ea se poate reduce la n determinări de mărime, urmează să ne ocupăm de a doua sarcină indicată mai sus, o cercetare asupra relațiilor metrice de care e susceptibilă varietatea și asupra condițiilor suficiente pentru determinarea acestora. Aceste relații metrice se pot studia numai în legătură cu concepte abstracte de mărime și se pot exprima coerent numai cu ajutorul formulelor. Totuși, în anumite ipoteze, e posibil să le împărțim în relații care, luate separat, sînt susceptibile de o reprezentare geometrică, făcînd astfel posibilă exprimarea geometrică a rezultatelor calculului. Vrînd să ajungem pe un teren sigur, va fi, deci, inevitabilă o cercetare abstractă, folosind formule, ale cărei rezultate vor putea îmbrăca haina geometrică. În ambele cazuri, fundamentele sînt cuprinse de celebrul tratat al Consilierului Aulic Gauss, asupra suprafețelor curbe.

3.1 Expresia elementului liniar. Se consideră plane acele varietăți în care elementul liniar se poate exprima prin rădăcina sumei pătratelor de diferențiale totale

Determinările metrice necesită independența mărimii de poziție; aceasta se poate realiza în mai multe feluri. Prima ipoteză care se prezintă și pe care intenționez să o urmez aici e că lungimea liniilor e independentă de poziție și, deci, că orice linie e măsurabilă cu ajutorul oricărei alta. Dacă determinarea poziției se reduce la determinări de mărime, adică poziția unui punct în varietatea n-extinsă se exprimă cu ajutorul a n mărimi variabile x_1, x_2, x_3 și așa mai departe pînă la x_n, atunci determinarea unei linii va fi echivalentă cu a da mărimea x ca funcție de o variabilă. Prin urmare, problema constă în elaborarea unei expresii matematice pentru lungimea liniilor și pentru aceasta, mărimile x trebuie considerate ca putînd fi exprimate în unități. Voi trata această problemă doar între anumite limite și mă voi mărgini la început la acele linii pentru care relațiile între mărimile dx – adică variațiile corespunzătoare mărimilor x – variază continuu. Liniile se pot privi, acum, ca fiind compuse din elemente în care relațiile între cantitățile dx pot fi considerate constante și problema se reduce la a elabora, în fiecare punct, o expresie generală a elementului liniar ds, care va conține mărimile x și dx. În al doilea rînd, presupun că mărimea elementului liniar, pînă la mărimi de ordinul al doilea, nu se schimbă cînd toate punctele sale suferă o aceeași variație infinitezimală a poziției, adică presupun că dacă toate mărimile dx cresc în același raport, și elementul de linie crește în acel raport. Conform acestei presupuneri, elementul liniar va putea fi o funcție omogenă oarecare, de gradul 1 în mărimile dx, invariantă la schimbarea semnului tuturor mărimilor dx și în care constantele arbitrare sînt funcții continue de mărimile x. Pentru a găsi cazurile cele mai simple, voi căuta, înainte de toate, o expresie pentru varietățile cu extensie $(n-1)$-tuplă, care sînt, în fiecare punct al lor, echidistante de originea elementului liniar; adică voi căuta o funcție continuă de poziție care să le distingă una de cealaltă. Această funcție a trebui ori să crească, ori să descrească în orice direcție ne-am deplasa față de punctul inițial. În consecință, dacă derivatele sale de primul și de al doilea ordin sînt finite, diferențiala de primul ordin trebuie să se anuleze, iar cea de ordinul al doilea nu poate fi niciodată negativă; voi presupune că rămîne întotdeauna pozitivă. Ca urmare, această expresie diferențială de ordinul al doilea rămîne constantă atîta vreme cît ds e constantă și crește pătratic cînd mărimile dx, și cu ele ds, variază în același raport. Rezultă că expresia e egală cu ds^2, multiplicat cu o constantă, astfel că ds este egală cu rădăcina pătrată a unei funcții întregi, omogene, de gradul al doilea în mărimile dx, ale cărei coeficienți sînt funcții continue de mărimile x. Pentru spațiu, dacă se exprimă poziția punctelor folosind coordonate ortogonale, se obține că ds este egal cu $\sqrt{\sum (dx)^2}$; așadar, spațiul e inclus în acest caz foarte simplu. Cazul succesiv, în ordinea complexității, ar îmbrățișa, probabil, varietățile în care elementul liniar se poate exprima cu ajutorul rădăcinii pătrate a unei expresii diferențiale de gradul al patrulea. Cu siguranță că studiul acestei clase mai generale nu ar necesita principii esențial diferite, dar față de timpul destul de mare pe care ni l-ar lua, ar arunca prea puțină lumină asupra teoriei spațiului, mai ales deoarece rezultatele nu s-ar putea exprima în termeni geometrici. Așa că mă voi limita la varietăți în care elementul liniar se exprimă prin rădăcina pătrată a unei expresii diferențiale de gradul al doilea. Aceasta se poate transforma în una de același fel înlocuind cele n variabile independente cu funcții de alte, noi, n variabile independente. Totuși, în acest mod nu se poate transforma orice expresie în oricare alta, deoarece expresia conține $n\frac{n+1}{2}$ coeficienți care sînt funcții arbitrare de variabilele independente, pe cînd, introducînd noile variabile, se pot satisface doar n relații, adică se pot egala numai n coeficienți cu mărimi date. Ceilalți $n\frac{n-1}{2}$ sînt deja complet determinați de natura varietății pe care o reprezentăm. Ca urmare, pentru determinarea relațiilor lor metrice se cer $n\frac{n-1}{2}$ funcții de poziție. Varietățile în care elementul liniar poate fi pus sub forma $\sqrt{\sum (dx)^2}$, ca în cazul planului sau al spațiului, constituie doar un caz particular al varietăților de care ne ocupăm aici. Ele merită, cu siguranță, un nume special: în consecință, vom numi plane acele varietăți în care pătratul elementului liniar se poate reduce la suma pătratelor unor diferențiale totale. Acum, pentru a avea o vedere de ansamblu asupra diferențelor esențiale dintre varietățile reprezentabile în forma presupusă, e necesar să le excludem proprietățile care depind de modul de reprezentare, ceea ce se poate obține alegînd mărimile variabile conform unui principiu bine definit.

3.2. Studiul varietăților n-extinse în care elementul liniar se poate reprezenta prin rădăcina pătrată a unei expresii diferențiale de gradul al doilea. Măsura depărtării lor de planaritate (măsura de curbură) într-un punct determinat și într-o direcție de suprafață dată. Pentru determinarea relațiilor sale metrice (cu anumite limitări), e admisibil și suficient ca măsura de curbură să fie dată arbitrar, în orice punct, în $n\frac{n-1}{2}$ direcții de suprafață.

În acest scop, ne imaginăm că am construit sistemul celor mai scurte linii care pleacă dintr-un punct dat. Poziția unui punct oarecare poate fi determinată cu ajutorul direcției inițiale a celei mai scurte linii pe care se află și a distanței pe aceasta de punctul origine; deci se poate exprima prin rapoartele mărimilor dx^0, adică a mărimilor dx în origine și prin lungimea s a acestei linii. Acum, în locul cantităților dx^0, putem introduce expresii liniare $d\alpha$ formate cu ele în așa fel încît valoarea inițială a pătratului elementului liniar să fie egală cu suma pătratelor acestor expresii, astfel că variabilele independente vor fi mărimile s și rapoartele mărimilor $d\alpha$. În fine, în loc de $d\alpha$, să alegem mărimile $x_1, \ldots, x_n$, proporționale cu ele și cu suma pătratelor egală cu s^2. Dacă se introduc aceste mărimi, atunci pentru valori infinit mici, pătratul elementului liniar rezultă egal cu $\sum(dx)^2$, în timp ce termenul de ordin succesiv în dezvoltarea sa va fi egal cu o expresie omogenă de gradul al doilea în cele $n\frac{n-1}{2}$ mărimi $(x_1dx_2 - x_2dx_1), (x_1dx_3 - x_3dx_1), \ldots$, mărime infinitezimală cu patru dimensiuni care, împărțită la pătratul ariei triunghiului infinit mic în ale cărui vîrfuri variabilele au valorile $(0, 0, \ldots), (x_1, x_2, x_3, \ldots), (dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$ furnizează o mărime finită. Această mărime păstrează aceeași valoarea atîta timp cît mărimile x și dx sînt conținute în aceleași forme liniare binare, sau pînă cînd ambele linii cele mai scurte, de la valoarea 0 pînă la x și de la 0 pînă la dx rămîn același element de suprafață și depind doar de poziția și de direcția de pe aceasta. E evident egală cu zero dacă varietatea e plană, adică dacă pătratul elementului liniar e reductibil la $\sum(dx)^2$ și poate fi considerată ca măsură a depărtării varietății de planaritate în acel punct, în acea direcție de suprafață. Multiplicată cu $-\frac{3}{4}$, ea devine egală cu mărimea pe care Consilierul Aulic Gauss a numit-o măsură de curbură a unei suprafețe. Am văzut mai sus că, pentru a determina relațiile metrice ale unei suprafețe n-extinse sînt necesare $n\frac{n-1}{2}$ funcții de poziție. Deci, dacă se dă măsura curburii în fiecare punct, în $n\frac{n-1}{2}$ direcții de suprafață, se pot determina relațiile metrice ale varietății, cu condiția ca printre aceste valori să nu se găsească vreo relație identică, ceea ce, în general, nu se întîmplă. În consecință, relațiile metrice ale acestor varietăți, în care elementul liniar e reprezentabil cu ajutorul rădăcinii pătrate a unei expresii diferențiale de gradul al doilea, se pot exprima complet independent de alegerea mărimilor variabile. Se poate urma o cale întru totul asemănătoare și pentru varietățile în care elementul liniar e dat de o expresie mai puțin simplă, de exemplu prin rădăcina pătrată a unei expresii diferențiale de gradul al patrulea. În acest caz, elementul liniar nu s-ar mai putea, în general, pune sub forma rădăcinii pătrate a unei sume de pătrate de expresii diferențiale; va fi o mărime infinitezimală cu două dimensiuni, în timp ce în primul caz era o mărime infinitezimală cu patru dimensiuni. Astfel, caracteristica acestor varietăți s-ar putea defini ca planaritate în regiuni foarte mici. Totuși, pentru scopul de față, caracteristica cea mai relevantă a acestor varietăți, singura care motivează studiul lor, este că relațiile metrice ale varietăților biextinse sînt reprezentabile geometric prin suprafețe și relațiile celor pluriextinse pot fi reduse la suprafețe pe care le conțin, chestiune care necesită acum o mică discuție.

3.3. Explicație geometrică

În conceperea suprafețelor, poziția lor față de puncte situate în afara lor se combină întotdeauna cu relațiile metrice intrinseci în care se consideră numai lungimea drumurilor trasate pe ele. Cu toate acestea, se poate face abstracție de relațiile extrinseci considerînd variații care invariază lungimea liniilor trasate pe ele; adică imaginîndu-ne că suprafețele sînt curbate arbitrar, dar fără deformare, și socotind echivalente toate suprafețele care se obțin așa una din cealaltă. De exemplu, suprafețele cilindrice sau conice arbitrare sînt echivalente cu un plan, din moment ce se pot forma plecînd de la un plan printr-o simplă îndoire, în timp ce rămîn invariante relațiile metrice intrinseci și toate teoremele care le privesc – deci toată planimetria – își păstrează validitatea. Însă ele sînt fundamental diferite de sferă, care nu se poate transforma într-un plan fără deformare. Conform celor spuse mai sus, relațiile metrice ale unei mărimi biextinse cu elementul liniar exprimabil prin rădăcina pătrată a unei expresii diferențiale de gradul al doilea sînt caracterizate, în orice punct, de măsura de curbură. Putem acum să dăm acestei mărimi, pentru cazul suprafețelor, semnificația intuitivă a produsului celor două curburi ale suprafeței în acest punct, sau încă, mai putem spune că produsul ei, într-un triunghi infinit de mic, format de linii de lungime minimă, este (proporțional cu raza) egal cu jumătate din valoarea cu care suma unghiurilor sale e superioară la două unghiuri drepte. Prima definiție ar presupune teorema conform căreia, pe o suprafață, produsul celor două raze de curbură e invariant la deformări simple; a doua, teorema conform căreia în orice punct, valoarea cu care suma unghiurilor unui triunghi infinitezimal e superioară la două unghiuri drepte e proporțională cu aria triunghiului. Pentru a da o semnificație geometrică măsurii de curbură pe o varietate n-extinsă, într-un punct dat și într-o direcție de suprafață dată prin acel punct, trebuie să plecăm de la ipoteza că o linie de lungime minimă care pleacă dintr-un punct e complet determinată de direcția sa inițială. Drept urmare, se va obține o suprafață determinată prelungind toate direcțiile inițiale dintr-un punct dat în linii de lungime minimă; și această suprafață are, în punctul dat, o măsură de curbură determinată care e, în același timp, măsura de curbură a varietății n-extinse, în punctul dat și în direcția de suprafață dată.

3.4. Varietățile plane (în care măsura de curbură e peste tot egală cu zero), pot fi considerate ca un caz particular al varietăților cu măsură de curbură constantă. Ele se pot defini și ca acelea în care mărimile n-extinse sînt independente de poziție (posibilitatea mutării lor fără deformare).

Înainte de a trece la aplicațiile în cazul spațiului, e necesar să mai dezvoltăm aici unele considerații asupra varietăților plane în general, adică asupra varietăților în care pătratul elementului liniar se reprezintă prin suma pătratelor unor diferențiale totale.

Măsura de curbură este zero în orice punct și în orice direcție a unei varietăți n-extinse plane; conform celor spuse mai sus, pentru a determina relațiile metrice e suficient să cunoaștem că, în orice punct, măsura de curbură e zero în $n\frac{n-1}{2}$ direcții de suprafață independente. Varietățile a căror măsură de curbură este peste tot egală cu zero pot fi considerate ca un caz particular al acelor varietăți a căror măsură de curbură e peste tot constantă. Caracterul comun al acestor varietăți cu măsura de curbură constantă se poate exprima și prin aceea că figurile care se găsesc pe ele se pot mișca fără a le deforma. Pentru că e clar că figurile nu s-ar putea deplasa și roti dacă măsura curburii nu ar fi aceeași în fiecare punct și în toate direcțiile. Totuși, pe de altă parte, relațiile metrice ale varietății sînt complet determinate de măsura de curbură; așadar, sînt exact aceleași pentru orice punct, în toate direcțiile; deci, plecînd din orice punct se pot face aceleași construcții, astfel că pe varietățile cu măsură de curbură constantă figurilor li se poate da orice poziție. Relațiile metrice ale acestor varietăți depind doar de valoarea măsurii de curbură și, cît privește formularea analitică, se poate observa că, dacă se notează această valoare cu α, expresia elementului liniar se poate pune sub forma:

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\cdot\sqrt{\sum(dx)^2}.$$

3.5. Suprafețe cu măsura de curbură constantă

Pentru o expunere geometrică, poate fi utilă tratarea suprafețelor cu măsuri de curbură constantă. E ușor de văzut că suprafețelor a căror măsură de curbură e pozitivă se vor putea rula întotdeauna pe o sferă cu raza 1 împărțit la rădăcina măsurii de curbură. Dar pentru o privire generală asupra mulțimii acestor varietăți, să-i dăm uneia forma unei sfere, iar celorlalte forma unor suprafețe de rotație care o ating de-a lungul ecuatorului. Suprafețele cu măsura de curbură mai mare decît cea a sferei o vor atinge în interior, iar forma lor va semăna cu aceea a părții exterioare a unui inel, partea cea mai îndepărtată de axă; ele se vor putea rula pe zone sferice cu rază mai mică, dar se vor înfășura de mai multe ori. Suprafețele cu măsura de curbură pozitivă mai mică se obțin decupînd din suprafețe sferice cu rază mai mare o porțiune delimitată de două semicircumferințe maxime și lipind marginile acestora. Suprafața cu măsură de curbură zero va fi una cilindrică, tangentă ecuatorului; suprafețele cu măsura de curbură negativă vor fi tangente în exterior acestui cilindru și vor avea forma părții interioare, dinspre axă, a suprafeței unui inel. Dacă ne gîndim la aceste suprafețe ca mulțime a pozițiilor posibile pentru fragmente de suprafață, așa cum este spațiul pentru corpuri, atunci, în toate aceste suprafețe, fragmentele de suprafață se pot deplasa fără a fi deformate. Suprafețele cu măsura de curbură pozitivă se pot construi, întotdeauna, în așa fel ca fragmentele de suprafață să se poată deplasa chiar fără a le îndoi, așa ca pe sferă; acest lucru nu e posibil pe cele cu măsură de curbură negativă. Pe suprafețele cu măsură de curbură zero, în afara acestei independențe de poziție a fragmentelor de suprafață, are loc și independența de poziție a direcțiilor, ceea ce nu se întîmplă pe celelalte suprafețe.

4 Aplicație la spațiu

4.1. Sisteme de fapte suficiente pentru a determina relațiile metrice ale spațiului, așa cum sînt postulate de geometrie

În urma acestor investigații asupra determinării relațiilor metrice ale unei mărimi n-extinse, e posibil să indicăm care sînt condițiile necesare și suficiente pentru determinarea relațiilor metrice ale spațiului, presupunînd independența liniilor de poziție și a reprezentării elementului liniar prin rădăcina pătrată a unei expresii diferențiale de gradul al doilea, deci a planarității în regiuni foarte mici.

În primul rînd, aceste condiții se pot exprima prin aceea că măsura de curbură, în orice punct, e egală cu zero în trei direcții de suprafață; drept urmare, relațiile metrice ale spațiului sînt determinate de îndată ce suma unghiurilor unui triunghi e egală cu două unghiuri drepte.

Dacă, în al doilea rînd, se postulează, totuși, asemenea lui Euclid, o existență independentă de poziție nu doar pentru linii, ci și pentru corpuri, atunci urmează că măsura de curbură e constantă peste tot, așadar suma unghiurilor e determinată în orice triunghi odată ce e determinată într-unul singur.

În fine, în al treilea rînd, în loc de a presupune lungimea liniilor ca fiind independentă de poziție sau direcție, s-ar putea presupune independența de poziție a lungimii și a direcției lor. În acest caz, variațiile de poziție sau diferențele de poziție sînt mărimi complexe exprimabile prin trei unități independente.

4.2. Pînă la ce punct e probabilă validitatea acestor determinări empirice, dincolo de limita observației, la distanțe incomensurabil de mari?

Pe parcursul considerațiilor făcute pînă aici, am deosebit, mai întîi, relațiile de extensiune sau de domeniu de relațiile metrice și am găsit că, în prezența unor relații de extensiune egale pot fi imaginate relații metrice diferite; am căutat apoi sisteme de determinări metrice simple cu ajutorul cărora se pot determina complet relațiile metrice ale spațiului și de la care decurg, cu necesitate, toate teoremele relativ la ele. Mai rămîne acum să punem întrebarea: cum, în ce grad și în ce măsură sînt aceste ipoteze garantate de experiență. În această privință, avem o diferență esențială între simplele relații de extensiune și relațiile metrice, întrucît în primele, unde cazurile posibile formează o varietate discretă, rezultatele experienței, chiar dacă nu pot fi pe de-a-ntregul sigure, nu sînt, totuși, imprecise; pe cînd în a doua situație, unde cazurile posibile formează o varietate continuă, orice determinare bazată pe experiență rămîne, întotdeauna, imprecisă, oricît de mare ar fi probabilitatea apropierii de certitudine. Această împrejurare devine importantă atunci cînd se extind aceste determinări empirice dincolo de limitele observației, în domeniul incomensurabil de mare și în cel incomensurabil de mic; într-adevăr, e evident că primul tip de relații devine din ce în ce mai precis dincolo de limitele observației, în timp ce al doilea nu.

Cînd se extind construcțiile spațiale în incomensurabilul mare, trebuie să distingem între nelimitat și infinit; unul aparține relațiilor de extensiune, celălalt relațiilor metrice. Că spațiul e o varietate nemărginită triextinsă, e o presupoziție care-și găsește aplicație în oricare teorie despre lumea externă și conform ei, în orice moment, domeniul percepțiilor reale e integrat unui domeniu mai cuprinzător și sînt construite pozițiile posibile ale unui obiect căutat; această presupoziție e continuu reconfirmată în astfel de aplicații. Nemărginirea spațiului posedă, deci, o anume certitudine empirică mai mare decît oricare altă experiență exterioară. Totuși, de aici nu se poate sub niciun chip deduce infinitatea sa; mai degrabă, dacă s-ar presupune independența corpurilor de poziție și i s-ar atribui, astfel, spațiului o măsură de curbură constantă, spațiul ar fi în mod necesar finit de îndată ce această măsură de curbură ar avea chiar cea mai mică valoare pozitivă. Prelungind în drumuri de lungime minimă direcțiile inițiale care se află într-un element de suprafață, s-ar obține o suprafață nelimitată, cu măsură de curbură constantă pozitivă, adică o suprafață care într-o varietate plană triextinsă ar lua forma unei suprafețe sferice, așadar finite.

4.3. Pînă la ce punct în incomensurabilul mic? Legătura acestor probleme cu științele naturii

Problemele care privesc incomensurabilul mare sînt nefolositoare înțelegerii naturii. Însă cu totul alta e situația chestiunilor relative la incomensurabilul mic. Cunoașterea conexiunilor cauzale ale fenomenelor din infinitul mic depinde în mod esențial de precizia cu care le urmărim. Progresele ultimelor secole în cunoașterea mecanismelor naturii s-au realizat, aproape exclusiv, grație precizie construcției de care se servește astăzi fizica; această precizie a fost posibilă datorită descoperirii analizei infinitezimale și formulării principiilor fundamentale de către Arhimede, Galilei și Newton. În schimb, în științele naturale, unde încă lipsesc principiile fundamentale pentru asemenea construcții, pentru a urmări legăturile cauzale se urmăresc fenomenele în domeniul spațial mic numai pînă unde consimte microscopul. Deci problemele relative la relațiile metrice ale spațiului în incomensurabilul mic nu sînt nicidecum nefolositoare.

Dacă se presupune existența corpurilor independentă de poziție, măsura de curbură e constantă peste tot, iar din măsurătorile astronomice rezultă că nu poate fi diferită de zero; în orice caz, valoarea sa inversă ar trebui să acopere o arie față de care regiunea accesibilă telescoapelor noastre ar fi neglijabilă. Însă dacă nu se presupune o asemenea independență a corpurilor de poziție, nu se pot aplica, pur și simplu, infinitului mic relațiile metrice valabile la scară mare; în acest caz, măsura curburii poate avea în fiecare punct valoare arbitrară în trei direcții, cu singura condiție ca, în oricare dintre porțiuni măsurabile ale spațiului, curbura totală să nu fie sensibil diferită de zero. Complicații încă și mai mari pot surveni în cazul în care nu e posibil să se reprezinte, așa cum s-a presupus, elementul liniar prin rădăcina pătrată a unei expresii diferențiale de gradul al doilea. Pare, totuși, că acele concepte empirice pe care se bazează determinările metrice spațiale, conceptul de corp solid și de rază luminoasă încetează să mai fie valabile în infinitul mic. E, așadar, cu totul probabil ca în infinitul mic relațiile metrice ale spațiului să nu fie în acord cu postulatele geometriei; și ar trebui admis acest lucru de îndată ce ar permite o cale mai simplă de a explica fenomenele.

Problema validității postulatelor geometriei în infinitul mic e strîns legată de problema fundamentelor interne ale relațiilor metrice ale spațiului. În această chestiune care, cu siguranță, se poate considera ca una de teoria spațiului, își găsește o aplicație și observația precedentă, conform căreia într-o varietate discretă, principiul relațiilor metrice e conținut implicit în conceptul de varietate, pe cînd într-o varietate continuă, el trebuie introdus din altă parte. În consecință, ori elementul real care stă la baza spațiului formează o varietate discretă, ori ceea ce determină relațiile metrice trebuie căutat în altă parte, în forțe de coeziune care acționează asupra lui.

O soluție a acestor probleme va putea fi găsită numai plecînd de la interpretarea fenomenelor, interpretare a cărei bază a pus-o Newton și care a fost, pînă acum, confirmată de experiență și care trebuie modificată gradual, sub presiunea faptelor pe care nu le poate explica; cercetări ca cea făcută aici, care pornesc de la concepte generale, pot servi numai la întărirea certitudinii că această operă nu va fi împiedicată de concepții înguste și că prejudecățile tradiției nu vor fi obstacole în calea progresului cunoașterii legăturii dintre lucruri.

Acestea ne duc în domeniul unei alte științe, tărîmul fizicii în care, cu siguranță, natura întîlnirii de astăzi nu ne permite se intrăm.