ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

Mihai-Sorin Stupariu

SS 2002

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Elementäre Homotopietheorie

1.1 Homotopie

1.1.1 Definition und Beispiele

Notation. Mit I bezeichnen wir stets das Intervall $[0, 1]$.

Definition 1.1.1 *Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ und $f, g : X \to Y$ stetig, sodass $f|_A = g|_A$. Die Abbildungen f, g heissen* **homotop relativ** *A ($f \simeq g \text{ rel } A$) wenn es eine stetige Abbildung $F : X \times I \to Y$ existiert, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind*
(1) $F(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$,
(2) $F(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$,
(3) $F(x, s) = f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$, $\forall s \in I$.
Eine solche Abbildung F heisst **Homotopie von f nach** *g.*

Definition 1.1.2 *Zwei stetige Abbildungen heissen* **homotop** *($f \simeq g$), wenn sie homotop $\text{rel } \emptyset$ sind.*

Notation. Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$. Wir bezeichnen mit κ_{x_0} die konstante Abbildung

$$\kappa_{x_0} : Y \to X, \qquad \kappa_{x_0}(y) := x_0, \ \forall y \in Y.$$

Beispiel 1.1.3 *i) Man betrachtet $X = Y = \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann sind die Abbildungen $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und κ_{x_0} homotop via*

$$F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n, \qquad F(x, s) := sx_0 + (1 - s)x.$$

ii) Im allgemeinen: ist $X = Y \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so sind die Identität id_X und die konstante Abbildung κ_{x_0} ($x_0 \in X$ fest) homotop.

iii) Jeder Weg $\alpha : I \to X$ ist homotop zum trivialen Weg $\kappa_{\alpha(0)} : I \to X$; eine Homotopie ist

$$F : I \times I \to X, \quad F(t, s) := \alpha((1 - s)t).$$

Bemerkung 1.1.4 *Ein topologischer Raum X ist wegzusammenhängend genau dann wenn für alle $x, y \in X$ $\kappa_x \simeq \kappa_y$ gilt.*

Definition 1.1.5 *Eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ heisst* **nullhomotop**, *wenn sie homotop zu einer konstanten Abbildung κ_{x_0} ($x_0 \in X$) ist.*

Definition 1.1.6 *Ein topologischer Raum X heisst* **zusammenziehbar**, *wenn die Identität id_X nullhomotop ist.*

Bemerkung 1.1.7 *Ist X zusammenziehbar, so ist jede stetige Abbildung $f : Y \to X$ nullhomotop.*

Beispiel 1.1.8 *Ist X ein konvexer Teilraum von $\mathbb{R}^n$, so ist X zusammenziehbar.*

Bemerkung 1.1.9 *Jeder zusammenziehbarer Raum ist wegzusammenhängend.*

Proposition 1.1.10 (Eigenschaften der Homotopie) *i) Die Homotopie ist eine Äquivalenzrelation, d.h. für alle $f, g, h : X \to Y$ stetig gilt:*
(a) $f \simeq f$,
(b) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$,
(c) $(f \simeq g,\ g \simeq h) \Rightarrow f \simeq h$.

ii) (Zusammensetzung homotoper Abbildungen) *Seien*

$$X \xrightarrow{f,f'} Y \xrightarrow{g,g'} Z$$

stetig und sodass $f \simeq f', g \simeq g'$. Dann hat man $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

iii) (Produkte homotoper Abbildungen) *Sind $f_i, f_i' : X_i \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ stetig und mit $f_i \simeq f_i'$, für $i = 1, 2$, so gilt $f_1 \times f_2 \simeq f_1' \times f_2'$.*

Beweis. i) (a) Eine Homotopie von f nach f ist $F : X \times I \to Y$, $F(x, s) := f(x)$.

(b) Sei $F : X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Dann ist

$$G : X \times I \to Y, \quad G(x, s) := F(x, 1 - s)$$

eine Homotopie von g nach f.

(c) Seien $F : X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g und $G : X \times I \to Y$ eine Homotopie von g nach h. Man kann leicht überprüfen, dass

$$H : X \times I \to Y; \quad H(x, s) := \begin{cases} F(x, 2s), & x \in X,\ s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(x, 2s - 1) & x \in X,\ s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h ist. Die Stetigkeit folgt aus Lemma A.1.4.

ii) Sei $F : X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach f' und sei $G : Y \times I \to Z$ eine Homotopie von g nach g'. Man sieht sofort, dass $g \circ f \simeq g \circ f'$ via $g \circ F : X \times I \to Z$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\widetilde{f'} : X \times I \to Y \times I, \quad \widetilde{f'}(x, s) := (f'(x), s).$$

Es ist nun einfach zu überprüfen (Übung!), dass $G \circ \widetilde{f'} : X \times I \to Z$ eine Homotopie von $g \circ f'$ nach $g' \circ f'$ ist. Die Behauptung folgt nun aus Aussage i), (c).

iii) Übung! ■

1.1.2 Homotopieäquivalenz

Definition 1.1.11 *Die topologische Räume X, Y sind* **vom gleichen Homotopietyp (Homotopieäquivalent)**, *wenn es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, sodass gilt*

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y, \qquad g \circ f \simeq \mathrm{id}_X.$$

Bemerkung 1.1.12 *i) Offensichtlich sind zwei homöomorphe topologische Räume vom gleichen Homotopietyp; die Umkehrung ist i.a. nicht wahr.*

ii) Man kann leicht überprüfen, dass "vom gleichen Homotopietyp-sein" eine Äquivalenzrelation ist.

Definition 1.1.13 *Sei X ein topologischer Raum, $i_A : A \hookrightarrow X$ ein Teilraum.*

i) A heisst **Retrakt** *von X, falls es eine stetige Abbildung $\rho : X \to A$ gibt, sodass gilt*

$$\rho \circ i_A = \mathrm{id}_A$$

(ρ heisst **Retraktion***).*

ii) A heisst **Deformationsretrakt** *von X, falls es eine stetige Abbildung $\rho : X \to A$ gibt, sodass gilt*

$$\rho \circ i_A = \mathrm{id}_A, \qquad i_A \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$$

(ρ heisst **Deformationsretraktion***).*

iii) A heisst **starker Deformationsretrakt** *von X, falls es eine stetige Abbildung $\rho : X \to A$ gibt, sodass gilt*

$$\rho \circ i_A = \mathrm{id}_A, \qquad i_A \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X \text{ rel } A$$

(ρ heisst **starke Deformationsretraktion***).*

Proposition 1.1.14 *Ist A ein Deformationsretrakt von X, so sind A und X vom gleichen Homotopietyp.* ■

Beispiel 1.1.15 *Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Eine Deformationsretraktion ist die Abbildung*

$$\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n, \quad \rho(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Ähnlich folgt, dass $\mathbb{S}^n$ ein starker Deformationsretrakt von $D^{n+1} \setminus \{0\}$ ist. Insbesondere sind $\mathbb{S}^n$ und $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (bzw. $D^{n+1} \setminus \{0\}$) vom gleichen Homotopietyp.

Beispiel 1.1.16 *Sei X zusammenziehbar, d.h. $\mathrm{id}_X \simeq \kappa_{x_0}$ für ein $x_0 \in X$. Dann ist $\rho_{x_0} : X \to \{x_0\}$, $\rho_{x_0}(x) = x_0$ eine starke Deformationsretraktion.*

Tatsächlich hat man die folgende

Proposition 1.1.17 *X ist zusammenziehbar, genau dann wenn X den Homotopietyp eines Punktes hat.*

Beweis. Übung! ■

1.2 Fundamentalgruppe

Definition 1.2.1 *Seien $\alpha, \beta : I \to X$ Wege sodass $\alpha(1) = \beta(0)$. Dann ist, gemäss Lemma A.1.4, wohldefiniert das* **Produkt** *von α und β*

$$\alpha\beta : I \to X, \qquad (\alpha\beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Definition 1.2.2 *Das* **Inverse** *eines Weges* $\alpha : I \to X$ *ist der Weg*

$$\alpha^{-1} : I \to X, \quad \alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t).$$

Definition 1.2.3 *Sei* X *ein topologischer Raum und* $\alpha, \beta : I \to X$ *Wege mit* $\alpha(0) = \beta(0) = x_0, \alpha(1) = \beta(1) = x_1$. *Die Wege* α, β *heissen* **homotop relativ der Endpunkte** *(*$\alpha \dot{\simeq} \beta$*) wenn es eine stetige Abbildung* $F : I \times I \to X$ *gibt, sodass gilt*

$$\begin{cases} F(t,0) = \alpha(t), & \forall t \in I \\ F(t,1) = \beta(t), & \forall t \in I \\ F(0,s) = x_0, & \forall s \in I \\ F(1,s) = x_1, & \forall s \in I \end{cases}$$

(F *heisst* **Homotopie relativ der Endpunkte***).*

Proposition 1.2.4 (Eigenschaften der Homotopie relativ der Endpunkte) *Sei* X *ein topologischer Raum.*

i) $\dot{\simeq}$ *ist eine Äquivalenzrelation.*

ii) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 : I \to X$ *Wege, sodass*

$$\alpha_1(1) = \beta_1(0),\ \alpha_2(1) = \beta_2(0), \quad \alpha_1 \dot{\simeq} \alpha_2,\ \beta_1 \dot{\simeq} \beta_2.$$

Dann gilt $\alpha_1\beta_1 \dot{\simeq} \alpha_2\beta_2$.

iii) Seien $\alpha, \beta : I \to X$ *Wege mit* $\alpha \dot{\simeq} \beta$. *Dann* $\alpha^{-1} \dot{\simeq} \beta^{-1}$.

Beweis. Übung! ■

Notation. Wir werden mit $\langle\alpha\rangle$ die Äquivalenzklasse von α bezüglich $\dot{\simeq}$ bezeichnen; $\langle\alpha\rangle$ heisst **die Homotopieklasse von** α.

Aus Proposition 1.2.4 folgt, dass die folgende Definition Sinn hat:

Definition 1.2.5 *Sei* X *ein topologischer Raum.*

i) Für $\alpha, \beta : I \to X$ *Wege mit* $\alpha(1) = \beta(0)$ *definiere* **das Produkt der Homotopieklassen**

$$\langle\alpha\rangle \cdot \langle\beta\rangle := \langle\alpha\beta\rangle.$$

ii) Für einen Weg α *in* X *setzt man*

$$\langle\alpha\rangle^{-1} := \langle\alpha^{-1}\rangle.$$

Notation. Für einen Punkt X eines topologischen Raumes X bezeichen wir mit e_x den konstanten Weg $e_x : I \to X,\ e_x(t) \equiv x$.

Theorem 1.2.6 *Sei* X *ein topologischer Raum.*

i) Seien $\alpha, \beta, \gamma : I \to X$ *Wege mit* $\alpha(1) = \beta(0); \beta(1) = \gamma(0)$. *Dann gilt*

$$(\langle\alpha\rangle \cdot \langle\beta\rangle) \cdot \langle\gamma\rangle = \langle\alpha\rangle \cdot (\langle\beta\rangle \cdot \langle\gamma\rangle).$$

ii) Sei $\alpha : I \to X$ *ein Weg und bezeichne mit* $x_0 := \alpha(0), x_1 := \alpha(1)$. *Es gilt*

$$\langle e_{x_0}\rangle \cdot \langle\alpha\rangle = \langle\alpha\rangle; \qquad \langle\alpha\rangle \cdot \langle e_{x_1}\rangle = \langle\alpha\rangle.$$

iii) Mit den Bezeichnungen aus ii) hat man

$$\langle\alpha\rangle \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} = \langle e_{x_0}\rangle; \qquad \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \langle\alpha\rangle = \langle e_{x_1}\rangle.$$

Beweis. i) Wir haben

$$((\alpha\beta)\gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t), & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \beta(4t-1), & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases};$$

$$(\alpha(\beta\gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(4t-2), & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \gamma(4t-3), & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}.$$

Man kann überprüfen, dass

$$F : I \times I \to X, \quad F(t,s) := \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{s+1}\right), & \text{falls } 4t-s-1 \leq 0 \\ \beta(4t-s-1), & \text{falls } 0 \leq 4t-s-1 \leq 1 \\ \gamma\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & \text{falls } 4t-s-1 \geq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie relativ der Endpunkte von $(\alpha\beta)\gamma$ nach $\alpha(\beta\gamma)$ ist.

ii) Eine Homotopie relativ der Endpunkte von $e_{x_0}\alpha$ nach α ist

$$F : I \times I \to X, \quad F(t,s) := \begin{cases} x_0, & \text{falls } 2t+s-1 \leq 0 \\ \alpha\left(\frac{2t+s-1}{1+s}\right), & \text{falls } 2t+s-1 \geq 0. \end{cases}$$

Eine Homotopie relativ der Endpunkte von αe_{x_1} nach α ist

$$F' : I \times I \to X, \quad F'(t,s) := \begin{cases} \alpha\left(\frac{2t}{1+s}\right), & \text{falls } 2t-s-1 \leq 0 \\ x_1, & \text{falls } 2t-s-1 \geq 0. \end{cases}$$

iii) Es reicht zu zeigen, dass $\alpha\alpha^{-1} \dot{\simeq} e_{x_0}$; die andere Äquivalenz folgt indem wir α mit α^{-1} vertauschen. Man überprüft, dass

$$F : I \times I \to X, \quad F(t,s) := \begin{cases} \alpha(2t), & \text{falls } 0 \leq 2t \leq s \\ \alpha(t), & \text{falls } s \leq 2t \leq 2-s \\ \alpha^{-1}(2t-1), & \text{falls } 2-s \leq 2t \leq 2 \end{cases}$$

eine Homotopie relativ der Endpunkte von $\alpha\alpha^{-1}$ nach e_{x_0} ist. ■

Definition 1.2.7 *Ein* **punktierter Raum** *ist ein Paar (X, x_0) bestehend aus einem topologischen Raum X und einem Punkt $x_0 \in X$.*

Aus Theorem 1.2.6 folgt sofort

Corollar 1.2.8 *Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Die Menge $\pi_1(X, x_0)$ der Äquivalenzklassen bezüglich $\dot{\simeq}$ von Schleifen um x_0 wird eine Gruppe bezüglich der Operation "$\cdot$".* ■

Definition 1.2.9 *Die Gruppe* $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ *heisst* **Fundamentalgruppe des punktierten Raumes** (X, x_0).

Notation. Sei G eine Gruppe. Für $a \in G$ hat man den **inneren Automorphismus**

$$\chi_a : G \to G, \qquad \chi_a(g) := aga^{-1}.$$

Ist G Abelsch, so gilt $\chi_a = \mathrm{id}_G$.

Proposition 1.2.10 *Seien X ein topologischer Raum, $x_0, x_1 \in X$.*
i) Ein Weg γ von x_0 nach x_1 induziert einen Isomorphismus

$$\gamma_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \qquad \gamma_\sharp(\langle\alpha\rangle) := \langle\gamma^{-1}\alpha\gamma\rangle.$$

ii) Sind $\gamma, \tilde{\gamma} : I \to X$ zwei Wege von x_0 nach x_1, so gilt

$$\tilde{\gamma}_\sharp = \gamma_\sharp \circ \chi_{\langle\gamma\tilde{\gamma}^{-1}\rangle}.$$

Beweis. Übung! ■

Corollar 1.2.11 *Ist X <u>wegzusammenhängend</u>, so gilt für alle $x, y \in X$*

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y). \quad \blacksquare$$

Bemerkung. Der Isomorphismus aus Corollar 1.2.11 hängt von der Wahl eines Weges zwischen x und y ab! Ist $\pi_1(X, x)$ nicht Abelsch, so hat man <u>keine kanonische</u> Wahl!

Definition 1.2.12 *Ein topologischer Raum X, wegzusammenhängend und dessen Fundamentalgruppe trivial ist, heisst* **einfach zusammenhängend**.

Lemma 1.2.13 *Seien $I \xrightarrow{\alpha,\beta} X \xrightarrow{f} Y$ stetig. Hat man $\alpha \dot{\simeq} \beta$, so gilt $f \circ \alpha \dot{\simeq} f \circ \beta$.*

Beweis. Übung! ■

Definition 1.2.14 *Seien X,Y wegzusammenhängende topologische Räume, $x_0 \in X$ und $f : X \to Y$ stetig. Gemäss Lemma 1.2.13 ist wohldefiniert die Abbildung*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0)), \qquad f_*(\langle\alpha\rangle) := \langle f \circ \alpha\rangle.$$

Bemerkung. Die Abbildung f_* hängt auch von x_0 ab!

Theorem 1.2.15 *Seien X, Y,Z wegzusammenhängend, $x_0 \in X$.*
i) Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ ein Gruppenhomomorphismus.
ii) Man hat $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.
iii) Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ stetig. Dann gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
iv) Seien $f_0, f_1 : X \to Y$ homotope Abbildungen, $F : X \times I \to Y$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 und setze

$$\gamma_F : I \to Y, \qquad \gamma_F(s) := F(x_0, s)$$

(insbesondere ist γ_F ein Weg von $f_0(x_0)$ nach $f_1(x_0)$). Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "(f_0)_*"] \arrow[dr, "(f_1)_*"'] & \pi_1(X,f_0(x_0)) \arrow[d, "(\gamma_F)_\sharp"] \\ & \pi_1(X,f_1(x_0)). \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Beweis. i) -iii) Übung! iv) [3, S. 59ff]. ■

Theorem 1.2.16 (Homotopieinvarianz) *Seien X, Y wegzusammenhängende topologische Räume. Sind X und Y vom gleichen Homotopietyp, so hat man für alle $x \in X$, $y \in Y$*

$$\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(Y,y).$$

Beweis. Da X und Y vom gleichen Homotopietyp sind, existieren stetige Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ sodass

$$\mathrm{id}_X \simeq g \circ f \text{ (via } G), \qquad \mathrm{id}_Y \simeq f \circ g \text{ (via } F).$$

Wir betrachten einen festen Punkt $y_0 \in Y$ und setzen $x_0 := g(y_0)$. Man hat

$$\pi_1(X,x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X,(g\circ f)(x_0))$$

und, aus Theorem 1.2.15 ii), iii), iv) folgt

$$g_* \circ f_* = (g\circ f)_* = (\gamma_G)_\sharp \circ (\mathrm{id}_X)_* = (\gamma_G)_\sharp.$$

Da $(\gamma_G)_\sharp$ injektiv ist, ist auch f_* injektiv. Anderseits haben wir

$$\pi_1(Y,y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,f(x_0))$$

und ähnlich erhalten wir, dass $(\gamma_F)_\sharp = f_* \circ g_*$. Da $(\gamma_F)_\sharp$ surjektiv ist, ist auch f_* surjektiv. Somit haben wir gezeigt, dass $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,f(x_0))$ ein Gruppenisomorphismus ist. Aus Corollar 1.2.11 folgt nun die Behauptung. ■

Aus Theorem 1.2.16 und aus Proposition 1.1.17 schliessen wir

Corollar 1.2.17 *Jeder zusammenziehbarer Raum ist einfach zusammenhängend. Insbesondere gilt $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = \{e\}$.* ■

Bemerkung 1.2.18 *(Übung!) Sind X, Y topologische Räume und $x \in X, y \in Y$, so gilt*

$$\pi_1(X\times Y,(x,y)) \simeq \pi_1(X,x)\times \pi_1(Y,y).$$

1.3 Überlagerungen

In diesem Abschnitt sind alle topologische Räume Hausdorffsch.

1.3.1 Definition und Beispiele

Definition 1.3.1 *Sei X wegzusammenhängend, lokal wegweise zusammenhängend. Eine* **Überlagerung von** X *ist ein Paar $(\tilde{X}, p)$ bestehend aus einem wegzusammenhängenden, lokal wegweise zusammenhängenden topologischen Raum $\tilde{X}$ und aus einer stetigen surjektiven Abbildung $p : \tilde{X} \to X$, sodass die folgende Eigenschaft erfüllt ist:*

für alle $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x, sodass $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in A}$ die disjunkte Vereinigung der offenen Unterräumen $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ von $\tilde{X}$ ist und sodass für alle $\alpha \in A$ $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung 1.3.2 *Sei $\alpha \in A$ beliebig. Dann ist V_α sowohl offen als auch abgeschlossen in $p^{-1}(U)$. Ist W ein zusammenhängender Teilraum von $p^{-1}(U)$, dessen Durchschnitt mit V_α nicht leer ist, so ist W in V_α enthalten.*

Definition 1.3.3 *Eine Überlagerung $(\tilde{X}, p)$ von X mit $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend heisst* **universelle Überlagerung** *von X.*

Beispiel 1.3.4 *Das Paar $(\mathbb{R}, p)$, wobei*

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \qquad p(t) := e^{2\pi i t},$$

ist eine universelle Überlagerung des Kreises $\mathbb{S}^1$.

Beispiel 1.3.5 *Das Paar $(\mathbb{S}^n, p)$, wobei*

$$p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}, \qquad p(x_1, \ldots, x_{n+1}) := [x_1, \ldots, x_{n+1}],$$

ist eine Überlagerung des reellen projektiven Raumes $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ($n \geq 1$). Man bemerkt, dass für alle $\xi \in \mathbb{P}^n\mathbb{R}$, die Mächtigkeit des Urbildes von ξ gleich 2 ist: $\sharp(p^{-1}(\xi)) = 2$. Man sagt, dass p eine zweiblättrige Überlagerung ist.

Bemerkungen i) Man schliesst, dass, für alle $n \geq 1$, $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ zusammenhängend und kompakt ist.

ii) Man kann zeigen, dass $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ homöomorph zum Kreis $\mathbb{S}^1$ ist (Übung!).

1.3.2 Liftungen

Definition 1.3.6 *Seien $(\tilde{X}, p)$ eine Überlagerung von X und $f : Y \to X$ stetig. Eine* **Liftung von** f *ist eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Problem: Gegeben sei f; wir wollen die *Existenz* und die *Eindeutigkeit* einer Liftung studieren.

Theorem 1.3.7 (Eindeutigkeit) *Sei $(\tilde{X}, p)$ eine Überlagerung von X und sei Y zusammenhängend und lokal zusammenhängend. Sind $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ stetig, sodass*

(1) $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$,

(2) $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$ für ein $y_0 \in Y$,

so sind diese Abbildungen gleich.

Beweis. Sei

$$Z := \{y \in Y | \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\} \subset Y.$$

• Aus der Bedingung (2) folgt $Z \neq \emptyset$.

• Man betrachtet das Produktabbildung $\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X} \times \tilde{X}$. Dann gilt $Z = (\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2)^{-1}(\Delta)$, wobei $\Delta := \{(x, x) | \, x \in \tilde{X}\}$ das "Diagonal" von $\tilde{X} \times \tilde{X}$ ist. Da $\tilde{X}$ Hausdorffsch ist, ist Δ abgeschlossen in $\tilde{X} \times \tilde{X}$ und somit ist auch Z abgeschlossen in Y.

• Wir zeigen nun, dass Z offen in Y ist. Sei also $z \in Z$ und setze $x := (p \circ \tilde{f}_1)(z) = (p \circ \tilde{f}_2)(z)$. Wir betrachten eine offene Umgebung U von x, wie in der Definition einer Überlagerung, $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha V_\alpha$. Es existiert α_0 mit

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \in V_{\alpha_0} =: V.$$

Für $i = 1, 2$ gilt $z \in (p \circ \tilde{f}_i)^{-1}(U)$ offen. Da Y lokal zusammenhängend ist, existieren offene zusammenhängende Umgebungen W_1, W_2 von z mit

$$W_i \subset (p \circ \tilde{f}_i)^{-1}(U), \ \forall i = 1, 2;$$

$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ sind stetig und somit sind $\tilde{f}_1(W_1)$, $\tilde{f}_2(W_2)$ <u>zusammenhängend</u> in $p^{-1}(U)$. Anderseits ist der Durchschnitt von $\tilde{f}_1(W_1)$ und V (bzw. $\tilde{f}_2(W_2)$ und V) nicht leer (warum?) und, gemäss Bemerkung 1.3.2 folgt, dass $\tilde{f}_1(W_1) \subset V$ (bzw. $\tilde{f}_2(W_2) \subset V$). Wir setzen nun

$$W := W_1 \cap W_2;$$

W ist eine <u>offene</u> Umgebung von z. Es gilt $\tilde{f}_1(W) \subset V$, $\tilde{f}_2(W) \subset V$, $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$ und $p|_V$ ist injektiv. Wir folgern, dass $\tilde{f}_1|_W = \tilde{f}_2|_W$, d.h. $W \subset Z$. Somit haben wir gezeigt, dass Z offen in Y ist.

• Da Y zusammenhängend ist, schliessen wir $Z = Y$, d.h. $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. ■

Theorem 1.3.8 ("Covering homotopy theorem") *Sei (X, p) eine Überlagerung von X und sei Y <u>kompakt</u>, zusammenhängend. Seien $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ und $F : Y \times I \to X$ stetig, sodass $F(y, 0) = (p \circ \tilde{f})(y)$ für alle $y \in Y$. Dann existiert und ist eindeutig bestimmt eine stetige Abbildung*

$$\tilde{F} : Y \times I \to \tilde{X},$$

sodass

(1) $p \circ \tilde{F} = F$ (d.h. $\tilde{F}$ ist Liftung von F),

(2) $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$, $\forall y \in Y$.

Die Abbildung $\tilde{F}$ kann <u>stationär</u> betrachtet werden, d.h. für alle $y \in Y$ sodass

$$F(y, s) = \text{konstant für } s \in J \ (J \text{ Intervall})$$

gilt

$$\tilde{F}(y, s) = \text{konstant für } s \in J.$$

Beweis. [3, S. 67ff]. ■

Proposition 1.3.9 (Liftungen der Wege) *Sei $(\tilde{X}, p)$ eine Überlagerung von X.*

i) Sei $\alpha : I \to X$ ein Weg, $x_0 := \alpha(0)$. Man wählt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ fest, sodass $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Dann existiert und ist eindeutig bestimmt ein Weg (Liftung von α) $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}$, sodass

$$p \circ \tilde{\alpha} = \alpha, \qquad \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0.$$

ii) Sind $\alpha, \beta : I \to X$ Wege homotop relativ der Endpunkte und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ Liftungen mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$, so sind $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ homotop relativ der Endpunkte.

Beweis. i) Die Eindeutigkeit folgt aus Theorem 1.3.7. Um die Existenz zu zeigen, setzen wir

$$Y := \{y_0\}, \quad \tilde{f} : Y \to \tilde{X},\ \tilde{f}(y_0) := \tilde{x}_0, \quad F : Y \times I \to X,\ F(y_0, t) := \alpha(t).$$

Dann gilt

$$(p \circ \tilde{f})(y_0) = p((\tilde{f}(y_0)) = p(\tilde{x}_0) = x_0 = \alpha(0) = F(y_0, 0)$$

und somit kann man Theorem 1.3.8 anwenden. Sei $\tilde{F} : Y \times I \to \tilde{X}$ die Liftung von F und sei

$$\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}, \qquad \tilde{\alpha}(t) := \tilde{F}(y_0, t).$$

Es ist nun leicht zu überprüfen, dass $\tilde{\alpha}$ der gesuchte Weg ist:

$$(p \circ \tilde{\alpha})(t) = (p \circ \tilde{F})(y_0, t) = F(y_0, t) = \alpha(t),$$

$$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{F}(y_0, 0) = \tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0.$$

ii) Wir betrachten $F : I \times I \to X$ Homotopie relativ der Endpunkte von α nach β. Es gilt also

$$F(t, 0) = \alpha(t), \qquad F(t, 1) = \beta(t), \quad \forall t \in I$$

$$F(0, s) = \alpha(0) = \beta(0), \quad \forall s \in I,$$
$$F(1, s) = \alpha(1) = \beta(1), \quad \forall s \in I.$$

Gemäss Theorem 1.3.8 angewendet für

$$Y := I, \quad \tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}, \quad F : I \times I \to X$$

existiert $\tilde{F} : I \times I \to \tilde{X}$ Liftung von F sodass

$$\tilde{F}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t), \quad \forall t \in I.$$

Anderseits ist $F(0, s)$ konstant für $s \in I$ und somit, wieder aus Theorem 1.3.8, ist $\tilde{F}(0, s)$ konstant. Insbesondere gilt

$$\tilde{F}(0, s) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0), \quad \forall s \in I.$$

Ähnlich zeigt man, dass

$$\tilde{F}(1, s) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1), \quad \forall s \in I.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{F}(t, 1) = \tilde{\beta}(t)$. Man hat die Wege

$$\tilde{F}(\cdot, 1),\ \tilde{\beta} : I \to \tilde{X},$$

für die gilt

$$(p \circ \tilde{F})(t, 1) = F(t, 1) = \beta(t) = (p \circ \tilde{\beta})(t),$$
$$\tilde{F}(0, 1) = \tilde{\beta}(0).$$

Da der Weg β eine eindeutig bestimmte Liftung mit Anfangspunkt $\tilde{\beta}(0)$ besitzt, folgt

$$\tilde{F}(t, 1) = \tilde{\beta}(t), \quad \forall t \in I.$$

Wir schliessen, dass $\tilde{F}$ eine Homotopie relativ der Endpunkte von $\tilde{\alpha}$ nach $\tilde{\beta}$ ist.
■

1.3.3 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Sei $(\tilde{X}, p)$ eine Überlagerung von X. Wir untersuchen das folgende
Problem. Gibt es eine Beziehung zwischen $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ und $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$?

Proposition 1.3.10 *Seien $(\tilde{X}, p)$ eine Überlagerung von X, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und setze $x := p(\tilde{x})$. Dann ist*

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, x)$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Sei $\langle\tilde{\alpha}\rangle \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ sodass $p_*(\langle\tilde{\alpha}\rangle) = \langle e_x\rangle$, d.h $\langle p \circ \tilde{\alpha}\rangle = \langle e_x\rangle$. Insbesondere sind die Wege $p \circ \tilde{\alpha}$ und e_x homotop relativ der Endpunkte. Anderseits sind $\tilde{\alpha}$ bzw. $e_{\tilde{x}}$ Liftungen von $p \circ \tilde{\alpha}$ bzw. e_x und gilt

$$\tilde{\alpha}(0) = e_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}.$$

Gemäss Proposition 1.3.9 ii) sind $\tilde{\alpha}$ und $e_{\tilde{x}}$ homotop relativ der Endpunkte und somit $\langle\tilde{\alpha}\rangle = 0$ in $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. ■

Bemerkungen. i) Man kann zeigen, dass es eine Bijektion zwischen der Menge der Linksäquivalenzklassen modulo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ und der Faser $p^{-1}(p(\tilde{x}))$ existiert [3, S. 68].

ii) Sind $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$ sodass $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) =: x$, so sind $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ und $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$ konjugiert in $\pi_1(X, x)$ [3, S. 74].

Definition 1.3.11 *Ein topologischer Raum X heisst* **lokal einfach zusammenhängend***, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung V besitzt, sodass jede Schleife α in V mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ zum konstanten Weg e_x in X homotop ist.*

Theorem 1.3.12 *Sei X wegzusammenhängend, lokal wegweise zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Sei $x \in X$ und $H \subset \pi_1(X, x)$ eine Untergruppe. Dann existiert eine Überlagerung $(\tilde{X}, p)$, sodass $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = H$, wobei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = x$ ist.*

Beweis. • Wir erklären zunächst die Mengentheoretische Konstruktion des Beweises. Auf der Menge der Wege mit Anfangspunkt x

$$\Omega(X, x) := \{\alpha : I \to X \text{ Weg};\ \alpha(0) = x\}$$

betrachtet man die Äquivalenzrelation $\cong_H$

$$\alpha \cong_H \beta :\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1) = \beta(1) \\ \langle\alpha\beta^{-1}\rangle \in H. \end{cases}$$

Die Äquivalenzklasse von $\alpha \in \Omega(X, x)$ bzgl. $\cong_H$ wird mit $[\alpha]_H$ bezeichnet. Wir definieren

$$\tilde{X} := \Omega(X, x)/_{\cong_H}; \qquad p : \tilde{X} \to X,\ p([\alpha]_H) := \alpha(1).$$

• Sei weiter $[\alpha]_H \in \tilde{X}$ und $U \subset X$ offen, mit $\alpha(1) \in U$. Wir setzen

$$([\alpha]_H, U) := \{[\alpha\beta]_H \mid \beta \text{ Weg in } U \text{ mit } \beta(0) = \alpha(1)\} \subset \tilde{X}.$$

Auf $\tilde{X}$ wird diejenige Topologie betrachtet, die alle $([\alpha]_H, U)$ und $\emptyset$ als Basis besitzt.

• Man zeigt (vgl. [3, S. 71ff]), dass $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist. ■

Corollar 1.3.13 *Jeder topologischer Raum X wie in Theorem 1.3.12 besitzt eine universelle Überlagerung.* ■

1.3.4 Gruppe der Deckbewegungen einer Überlagerung

Definition 1.3.14 *i) Die Überlagerungen* $(\tilde{X}_1, p_1)$, $(\tilde{X}_2, p_2)$ *von* X *heissen* **isomorph** *falls es einen Homöomorphismus* $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *mit* $p_2 \circ h = p_1$ *gibt;* h *heisst* **Isomorphismus von Überlagerungen**.

ii) Eine **Deckbewegung** *einer Überlagerung ist ein Isomorphismus von* $(\tilde{X}, p)$ *nach sich selbst.*

Bemerkungen. i) Alle Deckbewegungen einer Überlagerung $(\tilde{X}, p)$ bilden die **Gruppe der Deckbewegungen** $(\mathcal{G}(\tilde{X}, p), \circ)$.

ii) Sind $(\tilde{X}_1, p_1)$ und $(\tilde{X}_2, p_2)$ isomorph, so hat man $\mathcal{G}(\tilde{X}_1, p_1) \simeq \mathcal{G}(\tilde{X}_2, p_2)$.

Theorem 1.3.15 *Sei* X *wegzusammenhängend, lokal wegweise zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Sind* $(\tilde{X}_1, p_1)$, $(\tilde{X}_2, p_2)$ *Überlagerungen von* X *mit*

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$$

für $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ *mit* $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$, *so sind sie isomorph.*

Beweis. [3, S. 75]. ■

Corollar 1.3.16 *Sei* X *wie in Theorem 1.3.15. Dann sind je zwei universelle Überlagerungen von* X *isomorph.* ■

Definition 1.3.17 *Eine* **normale** *Überlagerung (***regular covering space***) von* X *ist eine Überlagerung* $(\tilde{X}, p)$, *sodass für einen (und somit für alle)* $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ *eine normale Untergruppe von* $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$ *ist.*

Theorem 1.3.18 *Sei* $(\tilde{X}, p)$ *eine* <u>*normale*</u> *Überlagerung eines wegzusammenängenden, lokal wegweise zusammenhängenden, lokal einfach zusammenhängenden topologischen Raumes* X. *Dann gilt für alle* $\tilde{x} \in \tilde{X}$

$$\mathcal{G}(\tilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, p(\tilde{x}))/_{p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))}.$$

Insbesondere sind $\mathcal{G}(\tilde{X}, p)$ *und die Faser* $p^{-1}(p(\tilde{x}))$ *gleichmächtig.*

Beweis. Wir bezeichnen $H := p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ und $x := p(\tilde{x})$. Gemäss dem Eindeutigkeitssatz 1.3.15, dürfen wir als $(\tilde{X}, p)$ den Raum konstruiert in Theorem 1.3.12 betrachten und $\tilde{x} = [e_x]_H$ nehmen. Wir definieren

$$\phi : \pi_1(X, x) \to \mathcal{G}(\tilde{X}, p), \quad \phi(\langle\alpha\rangle)[\beta]_H := [\alpha\beta]_H.$$

Wir untersuchen nun die Eigenschaften von ϕ:

• Die Abbildung ist wohldefiniert. Seien zunächst $\langle\alpha\rangle = \langle\alpha_1\rangle, [\beta]_H = [\beta_1]_H$. Dann

$$(\alpha\beta)(1) = (\alpha_1\beta_1)(1),$$

$$\langle(\alpha\beta)(\alpha_1\beta_1)^{-1}\rangle = \langle\alpha\beta\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}\rangle = \langle\alpha\rangle\langle\beta\beta_1^{-1}\rangle\langle\alpha_1\rangle^{-1} = \langle\beta\beta_1^{-1}\rangle \in H,$$

also $[\alpha\beta]_H = [\alpha_1\beta_1]_H$. Es ist nun leicht zu sehen, dass $\phi(\langle\alpha\rangle) : \tilde{X} \to \tilde{X}$ bijektiv ist ($\phi(\langle\alpha^{-1}\rangle)$ ist ihre Inverse). Die Stetigkeit von $\phi(\langle\alpha\rangle)$ folgt aus

$$(\phi(\langle\alpha\rangle))^{-1}([\beta]_H, U) = \phi(\langle\alpha^{-1}\rangle)([\beta]_H, U) = ([\alpha^{-1}\beta]_H, U).$$

Man schliesst, dass $\phi(\langle\alpha\rangle)$ eine Deckbewegung ist.

• ϕ ist Gruppenhomomorphismus (Übung!).

• ϕ ist surjektiv: sei $f \in \mathcal{G}(\tilde{X}, p)$. Man hat $f([e_x]_H) \in \tilde{X}$, also $f([e_x]_H) = [\alpha]_H$. Dann ist α Schleife um x, denn

$$\alpha(1) = p([\alpha]_H) = (p \circ f)([e_x]_H) = p([e_x]_H) = x.$$

Insbesondere sind f und $\phi(\langle\alpha\rangle)$ Abbildungen von $\tilde{X}$ nach $\tilde{X}$, für die gilt

$$p \circ f = p \circ \phi(\langle\alpha\rangle) = p,$$

$$\phi(\langle\alpha\rangle)[e_x]_H = f([e_x]_H) = [\alpha]_H.$$

Gemäss Theorem 1.3.7 folgt $\phi(\langle\alpha\rangle) = f$.

• Der Kern von ϕ ist H, denn

$$\langle\alpha\rangle \in \ker\phi \Leftrightarrow \phi(\langle\alpha\rangle) = \mathrm{id}_{\tilde{X}} \Leftrightarrow \phi(\langle\alpha\rangle)[\beta]_H = [\beta]_H \quad \forall[\beta]_H \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta \cong_H \beta \quad \forall\beta \Leftrightarrow \langle\alpha\rangle \in H.$$

Die Aussage des Satzes folgt nun aus dem Isomorphiesatz. ■

Corollar 1.3.19 *Ist $(\tilde{X}, p)$ eine (die) universelle Überlagerung von X, so gilt für alle $x \in X$*

$$\pi_1(X, x) \simeq \mathcal{G}(\tilde{X}, p). \quad ■$$

1.4 Beispiele

Als Anwendung zur Theorie der Überlagerungen geben wir nun ein Paar Beispiele.

1.4.1 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Proposition 1.4.1 *Die Fundamentalgruppe des Kreises $\mathbb{S}^1$ ist (isomorph zu) $(\mathbb{Z}, +)$.*

Beweis. Eine universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1$ ist $(\mathbb{R}, p)$, wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$. Es reicht also zu zeigen, dass die Gruppe der Deckbewegungen dieser Überlagerung isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

• Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_k(t) := t + k$$

eine Deckbewegung.

• Wir zeigen nun die Umkehrung: jede Deckbewegung dieser Überlagerung ist von dieser Form. Sei also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $p(f(t)) = p(t)$, d.h. f ist stetig und gilt

$$e^{2\pi i f(t)} = e^{2\pi i t}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $f(t) - t \in \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}$ diskret ist und $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist, muss f konstant sein, also $f = f_k$ für $k \in \mathbb{Z}$ geeignet.

Die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{R}, p), \qquad k \mapsto f_k$$

ist der gesuchte Isomorphismus. ■

Behauptung 1.4.2 *i) Der Kreis $\mathbb{S}^1$ ist kein Retrakt von D^2.*

ii) Jede stetige Abbildung $f : D^2 \to D^2$ besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. i) Wir bezeichnen mit $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow D^2$ die Inklusion und sei $\rho : D^2 \to \mathbb{S}^1$ ein Retrakt, d.h. $\rho \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. Man "wendet π_1 an" und erhält das folgende kommutative Diagram:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1})_*"'] & \pi_1(D^2, (1,0)) \arrow[d, "\rho_*"] \\ & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \end{tikzcd}$$

d.h. $\rho_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Widerspruch, da i_* die Nullabbildung ist ($\pi_1(D^2, (1,0))$ ist trivial).

i) Nehme an $f : D^2 \to D^2$ sei stetig und ohne Fixpunkt. Für $x \in D^2$ betrachte $f(x) \neq x$ und schneide die Halbgerade $[f(x)x$ mit $\mathbb{S}^1$. Man erhält einen Punkt bezeichnet $\rho(x)$ auf $\mathbb{S}^1$ und somit eine stetige Abbildung $\rho : D^2 \to \mathbb{S}^1$ mit $\rho \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, Widerspruch zu i). ■

1.4.2 Die Fundamentalgruppe der Sphären $\mathbb{S}^n$ $(n \geq 2)$

Proposition 1.4.3 *Für $n \geq 2$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend.*

Beweis. Siehe Kapitel 2, Corollar 2.3.2. ■

1.4.3 Die Fundamentalgruppe der reellen projektiven Räume

Proposition 1.4.4 *i) Es gilt*

$$\pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{R}, x) \simeq \mathbb{Z}.$$

ii) Für $n \geq 2$ hat man

$$\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R}, x) \simeq \mathbb{Z}/2.$$

.

Beweis. i) Der reelle projektive Raum $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ und der Kreis $\mathbb{S}^1$ sind homöomorph.

ii) Gemäss Beispiel 1.3.5 und Corollar 2.3.2 ist, für $n \geq 2$, $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ eine zweiblättrige universelle Überlagerung. Anderseits sind die Faser über einem Punkt und die Gruppe der Deckbewegungen (in diesem Fall isomorph zur Fundamentalgruppe) gleichmächtig (vgl. Theorem 1.3.18) und somit folgt die Behauptung. ■

Kapitel 2

Simplizialkomplexe

2.1 Simplexen und Simplizialkomplexe

Erinnerung. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Punkte $x_0, \dots, x_q \in V$ heissen **in allgemeiner Lage**, falls die Vektoren $x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0$ linear unabhängig sind. Äquivalente Bedingung ist:

$$T := \left\{ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i | \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1 \right\}$$

ist der <u>minimale</u> affine Unterraum von V, der $x_0, \dots, x_q$ enthält.

Definition 2.1.1 *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $x_0, \dots, x_q \in V$ in allgemeiner Lage.*

i) Das **offene Simplex mit den Ecken** $x_0, \dots, x_q$ *ist*

$$\sigma = \sigma_{(x_0,\dots,x_q)} := \left\{ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i | \lambda_0, \dots, \lambda_q > 0,\ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1 \right\}$$

und q heisst die **Dimension** *von σ. Wir sagen kurz, σ sei ein q*-**Simplex**.

ii) Das **abgeschlossene q-Simplex mit Ecken** $x_0, \dots, x_q$ *ist*

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{(x_0,\dots,x_q)} := \left\{ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i | \lambda_0, \dots, \lambda_q \geq 0,\ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1 \right\}.$$

iii) Der **Rand** *von $\bar{\sigma}$ ist*

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{(x_0,\dots,x_q)} := \bar{\sigma}_{(x_0,\dots,x_q)} \setminus \sigma_{(x_0,\dots,x_q)}.$$

Bemerkungen. i) Als q-Simplexen werden in diesem Kapitel die <u>offene</u> Simplexen betrachtet!

ii) Es gilt: $\bar{\sigma}_{(x_0,\dots,x_q)} = \mathrm{Conv}(x_0, \dots, x_q)$.

iii) Seien $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^q$ in allgmeiner Lage. Man versieht die Simplexen $\sigma_{(x_0,\dots x_q)}, \bar{\sigma}_{(x_0,\dots x_q)}, \dot{\sigma}_{(x_0,\dots x_q)}$ mit der Relativtopologie und erhält Homöomorphismen

$$\sigma_{(x_0,\dots,x_q)} \simeq B^q, \qquad \bar{\sigma}_{(x_0,\dots,x_q)} \simeq D^q, \qquad \dot{\sigma}_{(x_0,\dots,x_q)} \simeq \mathbb{S}^{q-1}.$$

Definition 2.1.2 *i) Ein Simplex τ heisst* **Seite** *eines Simplexes σ ($\tau \leq \sigma$) wenn jede Ecke von τ auch Ecke von σ ist.*

ii) Eine Seite τ von σ mit $\tau \neq \sigma$ heisst **eigentliche Seite** *($\tau < \sigma$).*

Bemerkung. Es gilt

$$\bar{\sigma} = \coprod_{\tau \leq \sigma} \tau, \qquad \dot{\sigma} = \coprod_{\tau < \sigma} \tau.$$

Definition 2.1.3 *Ein* **Simplizialkomplex** K *in einem* $\mathbb{R}$*-Vektorraum* V *ist eine endliche Menge von Simplexen in* V*, sodass*

(i) jede Seite eines Simplexes aus K *in* K *ist,*

(ii) jede zwei verschiedene Simplexen aus K *disjunkt sind.*

Begriffe. Sei K ein Simplizialkomplex in $\mathbb{R}^n$.

i) Die 0-Simplexen heissen **Ecken** von K und die 1-Simplexen heissen **Kanten** von K.

ii) Die **Dimension** von K ist

$$\dim K := \max\{\dim \sigma | \sigma \in K\}.$$

iii) Der **Träger** von K ist

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^n.$$

Auf $|K|$ betrachten wir die Relativtopologie, die von der kanonischen Topologie von $\mathbb{R}^n$ induziert wird.

iv) Für jedes $x \in |K|$ existiert ein eindeutig bestimmtes Simplex aus K, bezeichet mit $\mathrm{Tr}_K(x)$, sodass $x \in \mathrm{Tr}_K(x)$; es heisst **das Trägersimplex** von x in K.

Beispiel 2.1.4 *Jedes* q*-Simplex* σ *liefert Simplizialkomplexe*

$$K_{\bar{\sigma}} := \{\tau \text{ Simplex} | \tau \leq \sigma\}, \qquad K_{\dot{\sigma}} := \{\tau \text{ Simplex} | \tau < \sigma\}$$

von Dimensionen q *bzw.* $(q-1)$*. Man hat Homöomorphismen*

$$|K_{\bar{\sigma}}| \simeq D^q, \qquad |K_{\dot{\sigma}}| \simeq \mathbb{S}^{q-1}.$$

Definition 2.1.5 *Ein topologischer Raum* X *heisst* **triangulierbar***, wenn es einen Simplizialkomplex* K *existiert, sodass* X *homöomorph zu* $|K|$ *ist. Jeder solche* K *heisst* **Triangulation** *von* X*.*

Bemerkung. Ein triangulierbarer Raum ist stets kompakt.

Beispiel 2.1.6 *i)* $D^q, \mathbb{S}^{q-1}$ *sind triangulierbar.*

ii) Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.

iii) Jede kompakte Fläche ist triangulierbar.

iii) Jede kompakte topologische 3*-Mannigfaltigkeit ist triangulierbar.*

2.2 Simpliziale Abbildungen

Lemma 2.2.1 *Sei* K *ein Simplizialkomplex in* $\mathbb{R}^n$*. Jedes* $x \in |K|$ *hat eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form*

$$x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i,$$

wobei

$$x_0, \ldots, x_q \in K, \quad \lambda_0, \ldots, \lambda_q > 0, \quad \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1;$$

$x_0, \ldots, x_q$ *sind die Ecken von* $\mathrm{Tr}_K(x)$*.*

Hat umgekehrt $x \in \mathbb{R}^n$ *eine solche Darstellung und spannen* $x_0, \ldots, x_q \in K$ *ein in* K *liegendes Simplex auf, so liegt* x *in* $|K|$*.*

Beweis. Übung! ■

Definition 2.2.2 *Eine Abbildung* $\varphi : K \to L$ *zwischen Simplizialkomplexen heisst* **simpliziale Abbildung** *genau dann wenn:*

i) φ *bildet die Ecken von* K *auf Ecken von* L *ab,*

ii) sind $x_0, \ldots, x_q \in K$ *die Ecken von* $\sigma \in K$*, so ist* $\varphi(\sigma) \in L$ *das Simplex, das von der Ecken in der Menge* $\{\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_q)\} \subset L$ *aufgespannt wird.*

Bemerkung 2.2.3 *i) Ist* σ *eine Seite von* τ*, so ist* $\varphi(\sigma)$ *eine Seite von* $\varphi(\tau)$*.*

ii) Es gilt $\dim \varphi(\sigma) \leq \dim \sigma$*.*

iii) Ist $\varphi : K \to L$ *simplizial und* $\dim K < \dim L$*, so kann* φ <u>*nicht*</u> *surjektiv sein.*

Proposition 2.2.4 *Eine simpliziale Abbildung* $\varphi : K \to L$ *induziert eine* <u>*stetige*</u> *Abbildung* $|\varphi| : |K| \to |L|$*,*

$$|\varphi|(\sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i \varphi(x_i), \qquad x_0, \ldots, x_q \in K,\ \lambda_0, \ldots, \lambda_q > 0,\ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1.$$

Beweis. [5, S. 75]. ■

Definition 2.2.5 *Es seien* K, L *Simplizialkomplexe und* $f : |K| \to |L|$ *eine* <u>*stetige*</u> *Abbildung. Eine simpliziale Abbildung* $\varphi : K \to L$ *heisst* **simpliziale Approximation** *von* f*, wenn gilt*

$$|\varphi|(x) \in \overline{\mathrm{Tr}_L f(x)}, \qquad \forall x \in |K|.$$

Proposition 2.2.6 *Ist* $\varphi : K \to L$ *eine simpliziale Approximation der Abbildung* $f : |K| \to |L|$*, so sind* $|\varphi|$ *und* f *homotop.*

Beweis. Für x fest hat man $f(x), |\varphi|(x) \in \overline{\mathrm{Tr}_L f(x)}$ und $\overline{\mathrm{Tr}_L f(x)}$ ist <u>konvex</u>. Somit erhält man eine wohldefinierte Abbildung

$$F : |K| \times I \to |L|, \quad F(x, s) := (1 - s) f(x) + s|\varphi|(x),$$

die eine Homotopie von f nach $|\varphi|$ ist. ■

Theorem 2.2.7 (Existenz einer simplizialen Approximation) *Sei* $f : |K| \to |L|$ *stetig. Dann existieren ein Simplizialkomplex* $\tilde{K}$ *mit*

$$\dim \tilde{K} = \dim K, \qquad |\tilde{K}| = |K|$$

und eine simpliziale Approximation von f

$$\varphi : \tilde{K} \to L.$$

Beweis. [5, S. 81ff] . ■

2.3 Anwendung

Theorem 2.3.1 *Für $r < n$ ist jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^r \to \mathbb{S}^n$ nullhomotop.*

Beweis. Schritt1. Nehme an, f sei nicht surjektiv und betrachte $y_0 \notin \mathrm{Im} f$. Dann faktorisiert f als

$$\mathbb{S}^r \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{S}^n \setminus \{y_0\} \xrightarrow{\iota} \mathbb{S}^n.$$

Da $\mathbb{S}^n \setminus \{y_0\}$ zusammenziehbar ist (homöomorph zu $\mathbb{R}^n$), ist $\tilde{f}$ nullhomotop (vgl. Bemerkung 1.1.7) und somit ist $f = \iota \circ \tilde{f}$ nullhomotop.
Bemerkung. Bei diesem Schritt haben wir die Voraussetzung $r < n$ nicht verwendet.

Schritt 2. Sei nun $f : \mathbb{S}^r \to \mathbb{S}^n$ stetig beliebig. Man betrachtet die folgenden Simplizialkomplexe

$$K := K_{\dot{\sigma}_{(x_0,\ldots,x_{r+1})}}, \qquad L := K_{\dot{\sigma}_{(y_0,\ldots,y_{n+1})}},$$

wobei $x_0, \ldots, x_{r+1}$ bzw. $y_0, \ldots, y_{n+1}$ in allgemeiner Lage sind. Insbesondere hat man Homöomorphismen

$$k : |K| \to \mathbb{S}^r, \qquad l : |L| \to \mathbb{S}^n.$$

Es reicht also zu zeigen, dass die stetige Abbildung

$$g := l^{-1} \circ f \circ k : |K| \to |L|$$

nullhomotop ist. Gemäss Theorem 2.2.7 existieren $\tilde{K}$ und $\varphi : \tilde{K} \to L$ simpliziale Approximation von g. Insbesondere sind, gemäss Prop. 2.2.6, $|\varphi|$ und g homotop und somit sind $l \circ |\varphi| \circ k^{-1}$ und f homotop. Da

$$\dim \tilde{K} = \dim K = r < n = \dim L,$$

kann φ nicht surjektiv sein (vgl. Bem. 2.2.3) und somit ist auch $|\varphi|$ nicht surjektiv. Dann ist

$$l \circ |\varphi| \circ k^{-1} : \mathbb{S}^r \to \mathbb{S}^n$$

nicht surjektiv und, gemäss Schritt 1, ist sie nullhomotop. Wir schliessen, dass f nullhomotop ist. ■

Corollar 2.3.2 *Für $n \geq 2$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ einfach zusammenhängend.*

Beweis. Eine Schleife $\alpha : I \to \mathbb{S}^n$ liefert eine stetige Abbilgung $\tilde{\alpha} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$ und umgekehrt. Die Schleife α ist homotop relativ der Endpunkte zur konstanten Schleife $e_{\alpha(0)}$ genau dann wenn $\tilde{\alpha}$ nullhomotop ist. ■

Kapitel 3

Homologietheorie

3.1 Singuläre Homologiemoduln

Bezeichnungen.
i) Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^\infty$ die Menge aller reellen Folgen:

$$\mathbb{R}^\infty := \{(x_n)_{n\geq 1} | x_n \in \mathbb{R}\},$$

und seien

$$E_0 := (0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty,$$

$$E_1 := (1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty,$$

$$E_2 := (0, 1, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty, \ldots \text{ u.s.w..}$$

Stillschweigend werden wir $\mathbb{R}^n$ mit $\langle E_0, \ldots, E_n\rangle_{\mathbb{R}}$ identifizieren.
ii) Für jede natürliche Zahl $q \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ ist

$$\Delta_q := \bar{\sigma}_{(E_0,\ldots,E_q)}$$

das **standard abgeschlossene q-Simplex**. In diesem Kapitel werden wir insbesondere mit abgeschlossenen Simplexen arbeiten!
iii) Seien $P_0, \ldots, P_q \in \mathcal{A}$ Punkte eines affinen Raumes $\mathcal{A}$. Wir bezeichnen mit

$$(P_0, \ldots, P_q)$$

die Einschränkung auf Δ_q der eindeutig bestimmten affinen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^q \to \mathcal{A}, \qquad f(E_j) = P_j\ ,\ \forall j = 0, \ldots, q.$$

Zum Beispiel, falls $\mathcal{A} := \mathbb{R}^q$ und für alle $i = 0, \ldots, q$ betrachten wir $P_i := E_i$, erhalten wir die Identität $(E_0, \ldots, E_q) =: \delta_q$.

Definition 3.1.1 *Für $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $i = 0, \ldots, q$ definieren wir*

$$F_q^i : \Delta_{q-1} \to \Delta_q, \qquad F_q^i := (E_0, \ldots, \hat{E}_i, \ldots E_q), \quad d.h.$$

$$F_q^i(E_l) = \begin{cases} E_l, & l < i \\ E_{l+1}, & l \geq i. \end{cases}$$

Beispiel 3.1.2 *Für $q = 1$ erhält man zwei solche Abbildungen, nämlich*

$$F_1^0, F_1^1 : \Delta_0 \to \Delta_1, \quad F_1^0(E_0) = E_1,\ F_1^1(E_0) = E_0.$$

Lemma 3.1.3 *Es gilt*

$$F_q^i \circ F_{q-1}^j = F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1}, \quad \forall j < i.$$

Beweis. Man hat

$$F_{q-1}^j(E_l) = \begin{cases} E_l, & l < j \\ E_{l+1}, & l \geq j, \end{cases}$$

$$F_q^i(F_{q-1}^j(E_l)) = \begin{cases} E_l, & l < j \\ E_{l+1}, & j \leq l < i-1 \\ E_{l+2}, & i-1 \leq l. \end{cases}$$

Andererseits

$$F_{q-1}^{i-1}(E_l) = \begin{cases} E_l, & l < i-1 \\ E_{l+1}, & i-1 \leq l \end{cases}$$

$$F_q^j(F_{q-1}^{i-1}(E_l)) = \begin{cases} E_l, & l < j \\ E_{l+1}, & j \leq l < i-1 \\ E_{l+2}, & i-1 \leq l. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Definition 3.1.4 *Sei X ein topologischer Raum.*

i) Ein **(abgeschlossenes) singuläres q-Simplex** *ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_q \to X$.*

ii) Für $i = 0, \ldots, q$ ist die **i-te Seite** *von σ definiert als*

$$\sigma^{(i)} := \sigma \circ F_q^i : \Delta_{q-1} \to X.$$

Beispiel 3.1.5 *Seien $P_0, \ldots, P_q$ Punkte des affinen Raumes $\mathcal{A}$. Dann ist $(P_0, \ldots, P_q)$ ein singuläres q-Simplex in $\mathcal{A}$. Insbesondere ist δ_q ein singuläres q-Simplex.*

Bemerkung 3.1.6 *Ein singuläres 1-Simplex ist ein Weg.*

Seien X ein topologischer Raum und R ein Ring (kommutativ, mit Eins).

Definition 3.1.7 *i) Für jede natürliche Zahl $q \in \mathbb{N}$ betrachtet man den freien R-Modul erzeugt von allen singulären q-Simplexen*

$$S_q(X; R) := \left\{ \sum_{\mathrm{supp}(\nu_\sigma)_\sigma \text{ endlich}} \nu_\sigma \sigma \,|\, \sigma \text{ singuläres } q\text{-Simplex} \right\}.$$

Ein Element von $S_q(X; R)$ heisst **singuläre q-Kette (mit Koeffizienten aus R)**.

ii) Man setzt $S_{-1}(X; R) := \{0\}$.

Definition 3.1.8 *i) Der* **Rand eines singulären q-Simplexes** *σ ist die $(q-1)$-Kette*

$$\partial\sigma := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

ii) Der **Rand einer singulären q-Kette** *ist*

$$\partial(\sum \nu_\sigma \sigma) := \sum \nu_\sigma \partial\sigma.$$

iii) Der Rand eines 0-Simplexes ist $\partial\sigma := 0$.

Beispiel 3.1.9 *i) $\partial(E_0E_1) = (E_1) - (E_0)$.*

ii) $\partial(E_0E_1E_2) = (E_1E_2) - (E_0E_2) + (E_0E_1)$. Diese ist eine formelle Summe von 3 Wege, aber keine Schleife!

Somit erhält man für jedes $q \in \mathbb{N}$ einen R-Moduln Homomorphismus

$$\partial : S_q(X;R) \to S_{q-1}(X;R)$$

und eine Sequenz von R-Moduln und R-Moduln Homomorphismen

$$\ldots \longrightarrow S_{q+1}(X;R) \xrightarrow{\partial} S_q(X;R) \xrightarrow{\partial} S_{q-1}(X;R) \longrightarrow \ldots .$$

Proposition 3.1.10 *Es gilt* $\partial \circ \partial = 0$.

Beweis. Es reicht die Aussage für ein singuläres q-Simplex σ zu beweisen. Man hat

$$\partial(\partial\sigma) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\partial(\sigma^{(i)}) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\partial(\sigma\circ F_q^i) = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\sigma\circ(F_q^i\circ F_{q-1}^j) =$$

$$= \sum_{0\leq j<i\leq q}(-1)^{i+j}\sigma\circ(F_q^i\circ F_{q-1}^j) + \sum_{0\leq i\leq j\leq q}(-1)^{i+j}\sigma\circ(F_q^i\circ F_{q-1}^j) =$$

$$= \sum_{0\leq k<l\leq q}(-1)^{l+k}\sigma\circ(F_q^k\circ F_{q-1}^l) + \sum_{0\leq i\leq j\leq q}(-1)^{i+j}\sigma\circ(F_q^i\circ F_{q-1}^j) =$$

$$= \sum_{0\leq k\leq l\leq q}(-1)^{k+l+1}\sigma\circ(F_q^k\circ F_{q-1}^l) + \sum_{0\leq i\leq j\leq q}(-1)^{i+j}\sigma\circ(F_q^i\circ F_{q-1}^j) = 0. \blacksquare$$

Definition 3.1.11 *Für jede natürliche Zahl $q \in \mathbb{N}$ definiert man:*
i) den R-Modul der **q-Zyklen**

$$Z_q(X;R) := \ker(\partial),$$

ii) den R-Modul der **q-Ränder**

$$B_q(X;R) := \mathrm{Im}(\partial),$$

iii) den **q-te Modul Singularhomologie mit Koeffizienten aus** R

$$H_q(X;R) := {Z_q(X;R)}/{B_q(X;R)}$$

(wohldefiniert, gemäss Prop. 3.1.10 !).
iv) Zwei Zyklen $c_1, c_2 \in Z_q(X;R)$ heissen **homolog** *falls $c_1 - c_2 \in B_q(X;R)$.*

Beispiel 3.1.12 (Die Homologie des Punktes) *Wir betrachten den Raum bestehend aus einem Punkt $X := \{pt\}$ und einen Ring R. Dann existiert für jedes $q \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes singuläres q-Simplex σ_q (gegeben von der konstanten Abbildung) und somit*

$$S_q(\{pt\};R) = \{\lambda\cdot\sigma_q | \lambda \in R\} \simeq R.$$

Es gilt:

$$\partial\sigma_q = \begin{cases} 0, & q = 0 \\ 0, & q \text{ ungerade} \\ \sigma_{q-1}, & q \text{ gerade}, q > 0. \end{cases}$$

Somit folgt

$$Z_q(\{pt\};R) = B_q(\{pt\};R) = \begin{cases} S_q(\{pt\};R), & q \text{ ungerade} \\ 0, & q \text{ gerade}, q > 0. \end{cases}$$

Anderseits gilt

$$Z_0(\{pt\}; R) \simeq R, \quad B_0(\{pt\}; R) = \{0\}.$$

Wir schliessen, dass

$$\begin{aligned} H_0(\{pt\}; R) &\simeq R, \\ H_q(\{pt\}; R) &= \{0\}, \quad \forall q \geq 1. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.13 *i) Seien $f : X \to Y$ stetig; R ein Ring. Für jedes $q \in \mathbb{N}$ erhält man einen induzierten R-Moduln Homomorphismus*

$$S_q(f) : S_q(X; R) \to S_q(Y; R), \quad S_q(f)(\sum \nu_\sigma \sigma) := \sum \nu_\sigma (f \circ \sigma).$$

ii) Es gilt

$$\partial \circ S_q(f) = S_{q-1}(f) \circ \partial. \tag{3.1}$$

iii) Man hat $S_q(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{S_q(X;R)}$.

iv) Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ stetig. Dann gilt

$$S_q(g \circ f) = S_q(g) \circ S_q(f). \blacksquare$$

Proposition 3.1.14 *i) Seien $f : X \to Y$ stetig; R ein Ring. Für jedes $q \in \mathbb{N}$ erhält man einen wohldefinierten R-Moduln Homomorphismus*

$$H_q(f) : H_q(X; R) \to H_q(Y; R), \quad H_q(f)([\xi]) := [S_q(f)(\xi)], \ [\xi] \in H_q(X; R).$$

ii) Es gilt $H_q(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{H_q(X;R)}$.

iii) Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ stetig. Dann gilt

$$H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f).$$

Beweis. i) Für jedes q ist $H_q(f)$ wohldefiniert:
• Sei $[\xi] \in H_q(X; R)$, wobei $\xi \in S_q(X; R)$, $\partial\xi = 0$. Somit, gemäss Gleichung (3.1), gilt $(\partial \circ S_q(f))(\xi) = 0$, also $S_q(f)(\xi) \in Z_q(Y; R)$.
• Falls $[\xi_1] = [\xi_2]$, d.h. $\xi_1 - \xi_2 = \partial\eta$ (für η geeignet) hat man

$$S_q(f)(\xi_1) - S_q(f)(\xi_2) = S_q(f)(\partial\eta) = (\partial \circ S_{q+1}(f))(\eta),$$

also $[S_q(f)(\xi_1)] = [S_q(f)(\xi_2)]$. $\blacksquare$

Bemerkung. Sei $\sigma : \Delta_q \to X$ ein singuläres q-Simplex. Dann, gemäss Prop. 3.1.13, erhält man eine induzierte Abbildung $S_q(\sigma) : S_q(\Delta_q) \to S_q(X)$ und es gilt

$$S_q(\sigma)(\delta_q) = \sigma.$$

3.2 Homotopieinvarianz der Homologiemoduln

Notationen. Wir betrachten das **Prisma** $\Delta_q \times I$, dessen Ecken sind

$$A_0 := (E_0, 0), \ldots, A_q := (E_q, 0); \ B_0 := (E_0, 1), \ldots, B_q := (E_q, 1).$$

Wir setzen

$$P(\delta_q) := \sum_{j=0}^{q} (-1)^j (A_0 \ldots A_j B_j \ldots B_q) \in S_{q+1}(\Delta_q \times I; R).$$

Beispiel 3.2.1 *Man hat* $P(\delta_1) = (A_0B_0B_1) - (A_0A_1B_1)$.

Definition 3.2.2 *i) Sei* $\sigma : \Delta_q \to X$ *ein singuläres q-Simplex. Wir setzen*

$$P(\sigma) := S_{q+1}(\sigma \times \mathrm{id})(P(\delta_q)) \in S_{q+1}(X \times I; R).$$

*ii) Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen R-Modul Homomorphismus (***den Prismenoperator***)*

$$P : S_q(X; R) \to S_{q+1}(X \times I; R).$$

Bemerkung. Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann

$$P \circ S_q(f) = S_{q+1}(f \times \mathrm{id}) \circ P.$$

Notation. Für $t \in [0, 1]$ setzt man

$$\lambda_t : X \to X \times I, \quad \lambda_t(x) := (x, t).$$

Lemma 3.2.3 *Es gilt*

$$P \circ \partial + \partial \circ P = S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0).$$

Beweis. [1, S. 45]. ■

Theorem 3.2.4 *Seien R ein Ring und* $f, g : X \to Y$ *homotope Abbildungen. Dann gilt für alle* $q \in \mathbb{N}$

$$H_q(f) = H_q(g) : H_q(X; R) \to H_q(Y; R).$$

Beweis. • Sei $F : X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g, d.h. $f = F \circ \lambda_0$, $g = F \circ \lambda_1$. Es reicht zu zeigen, dass $H_q(\lambda_0) = H_q(\lambda_1)$, denn

$$H_q(f) = H_q(F \circ \lambda_0) = H_q(F) \circ H_q(\lambda_0) = H_q(F) \circ H_q(\lambda_1) = H_q(g).$$

• Wir zeigen nun, dass $H_q(\lambda_0) = H_q(\lambda_1)$. Sei $\xi \in Z_q(X; R)$, $\partial\xi = 0$. Dann

$$(H_q(\lambda_1) - H_q(\lambda_0))([\xi]) = [(S_q(\lambda_1) - S_q(\lambda_0))(\xi)] =$$

$$= [(P \circ \partial + \partial \circ P)(\xi)] = [P(\partial\xi)] + [\partial(P\xi)] = 0. \ ■$$

Theorem 3.2.5 *Sind* X, Y *Homotopieäquivalent, so gilt für alle* $q \in \mathbb{N}$

$$H_q(X; R) \simeq H_q(Y; R).$$

Beweis. Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Dann

$$H_q(g) \circ H_q(f) = H_q(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{H_q(X;R)}, \quad H_q(f) \circ H_q(g) = H_q(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{H_q(Y;R)},$$

d.h. $H_q(f)$ ist ein Isomorphismus von $H_q(X; R)$ nach $H_q(Y; R)$. ■

Corollar 3.2.6 *Ist X zusammenziehbar, so gilt*

$$H_0(X; R) \simeq R,$$
$$H_q(X; R) = \{0\}, \quad \forall q \geq 1. \ ■$$

3.3 H_0 und H_1

Zunächst untersuchen wir den R-Modul $H_0(X;R)$ (R beliebiger Ring).

Proposition 3.3.1 *Sei $X = \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$, wobei $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ die wegzusammenhängende Komponenten von X sind. Dann existieren für alle $q \in \mathbb{N}$ Isomorphismen*

$$\begin{aligned} (i) \quad & S_q(X;R) \simeq \oplus_{\alpha \in A} S_q(X_\alpha;R), \\ (ii) \quad & H_q(X;R) \simeq \oplus_{\alpha \in A} H_q(X;R). \end{aligned}$$

Beweis. (i) Sei $\sigma : \Delta_q \to X$ ein singuläres q-Simplex. Da Δ_q wegzusammenhängend ist, existiert ein eindeutig bestimmtes $\alpha_0 \in A$ mit $\sigma(\Delta_q) \subset X_{\alpha_0}$. Somit können wir σ als singuläres q-Simplex in X_{α_0}, $(\sigma : \Delta_q \to X_{\alpha_0})$, auffassen. Es folgt, dass jedes $c = \sum \nu_\sigma \sigma \in S_q(X;R)$ als

$$c = \sum_{c_\alpha \in S_q(X_\alpha;R)} c_\alpha, \quad \text{wobei } c_\alpha := \sum_{\sigma(\Delta_q) \subset X_\alpha} \nu_\sigma \sigma$$

dargestellt werden kann. Der gesuchte Isomorphismus ist von

$$c \mapsto (c_\alpha)_{\alpha \in A}$$

gegeben.

(ii) Die Behauptung folgt aus (i) und aus der Tatsache, dass ∂ Komponentenweise operiert, d.h. für $c = \sum_\alpha c_\alpha$ wie oben hat man

$$\partial c = \sum_{c_\alpha \in S_q(X_\alpha;R)} \partial c_\alpha, \quad \partial c_\alpha \in S_{q-1}(X_\alpha;R). \blacksquare$$

Theorem 3.3.2 *Sei X <u>wegzusammenhängend</u>. Dann gilt*

$$H_0(X;R) \simeq R.$$

Beweis.

- Da $\partial|_{S_0(X;R)} \equiv 0$, hat man

$$Z_0(X;R) = S_0(X;R) = \left\{ \sum \nu_x x | \nu_x \in R, x \in X \right\}.$$

- Wir beweisen nun die folgende

Behauptung. Sei $c = \sum \nu_x x \in Z_0(X;R)$. Dann

$$c \in B_0(X;R) \Leftrightarrow \sum \nu_x = 0.$$

Beweis der Behauptung. "$\Leftarrow$" Sei $x_0 \in X$ fest. Für $x \in X$ betrachten wir einen Weg $\sigma_x : I \to X$ von x_0 nach x (es existiert einen solchen Weg, da X wegzusammenhängend ist!). Anderseits, können wir σ_x als 1-Simplex auffassen, und es gilt $\partial \sigma_x = x - x_0$. Dann haben wir in $S_0(X;R)$:

$$c = \sum \nu_x x = \sum \nu_x (x - x_0) = \sum \nu_x \partial(\sigma_x) = \partial(\sum \nu_x \sigma_x).$$

"$\Rightarrow$" Sei $c = \sum \nu_x x$ und wir nehmen an, $c = \partial b$, mit $b = \sum \mu_\tau \tau \in S_1(X;R)$. Dann

$$\sum \nu_x x = c = \sum \mu_\tau (\tau^{(0)} - \tau^{(1)}).$$

Da die Darstellung von c als Element von $S_0(X;R)$ eindeutig ist, es folgt $\sum \nu_x = 0$ und somit ist die Behauptung bewiesen.

- Schliesslich definieren wir

$$\phi : Z_0(X;R) \to R, \quad \phi(\sum \nu_x x) := \sum \nu_x.$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass ϕ ein surjektiver R-Moduln Homomorphismus ist. Wir haben gerade gezeigt, dass $\ker\phi = B_0(X;R)$ und wir schliessen, dass $H_0(X;R) \simeq R$ gilt. ■

Corollar 3.3.3 *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $H_0(X;R)$ ein freier R-Modul, mit genau so viele Erzeuger, wieviele wegzusammenhängende Komponenten X hat.* ■

Für die Untersuchung von H_1, betrachten wir nur Homologie mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$.

Theorem 3.3.4 *Sei (X, x_0) ein punktierter Raum.*
(i) Es existiert einen (natürlichen) Gruppenhomomorphismus

$$\chi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z}), \quad \chi(\langle\gamma\rangle) := [\gamma].$$

Wir haben mit $\langle\gamma\rangle$ die Homotopieklasse (relativ der Endpunkte) der Schleife γ bezeichnet und mit $[\gamma]$ die Homologieklasse des 1-Simplexes γ (sogar 1-Zyklus, da γ Schleife!) bezeichnet.
(ii) Ist X wegzusammenhängend, so ist χ surjektiv und gilt

$$\ker\chi = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

Insbesondere hat man für einen solchen Raum X

$$H_1(X;\mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)].$$

Beweis. [1, S. 48] . ■

Corollar 3.3.5 *Sei X wegzusammenhängend, $x_0 \in X$. Ist $\pi_1(X, x_0)$ Abelsch, so gilt*

$$H_1(X;\mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X, x_0).$$

Insbesondere hat man für X einfach zusammenhängend

$$H_1(X;\mathbb{Z}) = \{0\}. \blacksquare$$

Beispiel 3.3.6 *i) Es gilt $H_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{Z}) = \{0\}$.*
ii) Für die Sphären gilt:

$$H_1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}; \qquad H_1(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}) = \{0\}, \ \forall n \geq 2.$$

iii) Für die reellen projektiven Räume gilt

$$H_1(\mathbb{P}^1\mathbb{R};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}; \qquad H_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2, \ \forall n \geq 2.$$

3.4 Relativhomologie. Die exakte Homologiesequenz

3.4.1 Relative Homologiemoduln

In diesem Abschnitt betrachten wir **Paare** (X, A) bestehend aus einem topologischen Raum X und einem Teilraum A von X. Ein **Morphismus von Paaren** $f : (X, A) \to (X', A')$ ist $f : X \to X'$ stetig mit $f(A) \subset A'$.

Definition 3.4.1 *i) Wir setzen*

$$Z_q(X, A; R) := \{c \in S_q(X; R) | \partial c \in S_{q-1}(A; R)\}.$$

Ein Element $c \in Z_q(X, A; R)$ heisst **relativer q-Zyklus auf X mod A**.
ii) Wir setzen

$$B_q(X, A; R) := \{c \in S_q(X; R) | \exists c' \in S_q(A; R), \exists \xi \in S_{q+1}(X; R) \text{ s.d. } c-c' = \partial\xi\}.$$

Ein Element c aus $B_q(X, A; R)$ heisst **relativer q-Rand auf X mod A**.

Es ist leicht zu zeigen, dass $Z_q(X, A; R)$ und $B_q(X, A; R)$ R-Moduln sind und dass $B_q(X, A; R) \subset Z_q(X, A; R)$. Somit können wir definieren:

Definition 3.4.2 Der q-te relative Homologiemodul von X mod A *ist*

$$H_q(X, A; R) := Z_q(X, A; R)/B_q(X, A; R).$$

Bemerkungen und Beispiele. i) Ist X ein topologischer Raum und $A := \emptyset$, so hat man

$$Z_q(X, \emptyset; R) = Z_q(X; R), \quad B_q(X, \emptyset; R) = B_q(X; R), \quad H_q(X, \emptyset; R) = H_q(X; R).$$

ii) Aus der Definition folgt, dass $S_q(A; R) \subset B_q(X, A; R)$.

Proposition 3.4.3 *Seien X wegzusammenhängend und $A \subset X$ nicht leer. Dann hat man für jeden Ring R*

$$H_0(X, A; R) = \{0\}.$$

Beweis. • Definitionsgemäss haben wir $Z_0(X, A; R) = S_0(X; R)$.
• Es bleibt zu zeigen, dass $B_0(X, A; R) = S_0(X; R)$. Sei $c \in S_0(X, R)$, $c = \sum \nu_x x$. Wir betrachten einen festen Punkt $x_0 \in A$ (möglich, da A nicht leer!) und einen Weg σ_x von x_0 nach x. Dann

$$c = \sum \nu_x x = \sum \nu_x(x - x_0) + (\sum \nu_x)x_0 = (\sum \nu_x)x_0 + \partial(\sum \nu_x \sigma_x).$$

Anderseits gilt

$$(\sum \nu_x)x_0 \in S_0(A; R), \quad \sum \nu_x \sigma_x \in S_1(X; R)$$

und das zeigt, dass $c \in B_0(X, A; R)$. ■

Proposition 3.4.4 *i) Sei $f : (X, A) \to (X', A')$ ein Morphismus von Paaren und betrachte die induzierte Abbildung $S_q(f) : S_q(X; R) \to S_q(X'; R)$ $(q \in \mathbb{N})$. Da $f(A) \subset A'$, gilt*

$$S_q(f)(S_q(A; R)) \subset S_q(A'; R).$$

Insbesondere hat man

$$S_q(f)(Z_q(X,A;R)) \subset Z_q(X',A';R), \quad S_q(f)(B_q(X,A;R)) \subset B_q(X',A';R).$$

Somit induziert S_q einen wohldefinierten R-Moduln Homomorphismus

$$H_q(f) : H_q(X,A;R) \to H_q(X',A';R).$$

ii) Für jedes Paar (X,A) hat man $H_q(\mathrm{id}_{(X,A)}) = \mathrm{id}_{H_q(X,A;R)}$.

iii) Seien $(X,A) \xrightarrow{f} (X',A') \xrightarrow{g} (X'',A'')$ Morphismen von Paaren. Dann

$$H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f).$$

Beweis. Übung! ■

Beispiel 3.4.5 *i) Die Identität von X induziert einen Morphismus von Paaren*

$$j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X,A)$$

und für jedes $q \in \mathbb{N}$ einen R-Moduln Homomorphismus

$$H_q(j) : H_q(X;R) \longrightarrow H_q(X,A;R).$$

ii) Die Inklusion von A in X induziert einen Morphismus von Paaren

$$i : (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$$

und für jedes $q \in \mathbb{N}$ einen R-Moduln Homomorphismus

$$H_q(i) : H_q(A;R) \longrightarrow H_q(X;R).$$

Definition 3.4.6 *Die Morphismen von Paaren $f, g : (X,A) \to (X',A')$ heissen* **homotop (als Morphismen von Paaren)** *falls es eine Homotopie $F : X \times I \to X'$ von f nach g gibt, sodass $F(A \times I) \subset A'$ gilt.*

Definition 3.4.7 *Die Paare $(X,A), (X',A')$ heissen* **homotop** *falls es Morphismen von Paaren $f : (X,A) \to (X',A'), g : (X',A') \to (X,A)$ gibt, sodass*

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(X',A')}, \qquad g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,A)}.$$

Beispiel 3.4.8 *Man betrachtet*

$$X := D^2, \quad A := \mathbb{S}^1, \quad A' := \left\{ z \in D^2 \,|\, |z| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Dann liefern die kanonische Inklusion $\iota : (X,A) \to (X,A')$ und

$$g : (X,A') \to (X,A), \quad g(z) := \begin{cases} 2z, & |z| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{z}{|z|}, & \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopieäquivalenz.

Die folgende Proposition ist ähnlich zum Theorem 3.2.5

Proposition 3.4.9 *Sind die Paare (X,A) und (X',A') homotop, so gilt für alle R und für alle $q \in \mathbb{N}$*

$$H_q(X,A;R) \simeq H_q(X',A';R). \blacksquare$$

3.4.2 Homologiesequenz

Hauptkonstruktion. Sei (X, A) ein Paar. Wir konstruieren nun den **"connecting" Homomorphismus**

$$\delta : H_q(X, A; R) \longrightarrow H_{q-1}(A; R).$$

Sei $\alpha = [c] \in H_q(X, A; R)$, wobei $c \in Z_q(X, A; R)$. Insbesondere hat man $\partial c \in S_{q-1}(A; R)$. Wir setzen

$$\delta([c]) := [\partial c] \in H_{q-1}(A; R).$$

Wir zeigen nun, dass δ wohldefiniert ist. Seien also $c, c' \in Z_q(X, A; R)$ mit $d := c - c' \in B_q(X, A; R)$. Gemäss der Definition haben wir

$$d = d' + \partial\xi, \qquad d' \in S_q(A; R),\ \xi \in S_{q+1}(X; R).$$

Dann gilt

$$\partial(c - c') = \partial d = \partial d' + \partial(\partial\xi) = \partial d' \in B_{q-1}(A; R),$$

da d' in $S_q(A; R)$ liegt. Somit sind $[\partial c]$ und $[\partial c']$ gleich als Elemente von $\underline{H_{q-1}(A; R)}$. Es ist leicht zu zeigen, dass δ ein Homomorphismus von R-Moduln ist (Übung!).

Warnung! Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, haben wir alle Homologieklassen mit $''[\cdot]''$ bezeichnet. Aus dem Kontext kann man schliessen, um welchen Homologiemodul geht.

Die Beziehung zwischen dem "connecting" Homomorphismus und den Homomorphismen aus dem Beispiel 3.4.5 wird in dem folgenden Satz beschrieben:

Theorem 3.4.10 (Exaktheit der Homologiesequenz) *Seien (X, A) ein Paar und R ein Ring. Dann ist die* **Homologiesequenz**

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(X, A; R) \xrightarrow{\delta} H_q(A; R) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X; R) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A; R) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(A; R) \longrightarrow H_0(X; R) \longrightarrow H_0(X, A; R) \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. • Exaktheit in $H_q(A; R)$: zu zeigen ist $\mathrm{Im}\delta = \ker H_q(i)$. Sei $[c] \in H_{q+1}(X, A; R)$, wobei $c \in Z_{q+1}(X, A; R)$ mit $\partial c \in S_q(A; R)$. Dann

$$(H_q(i) \circ \delta)([c]) = H_q(i)([\partial c]) = [S_q(i)(\partial c)] = [\partial c] = 0.$$

Umgekehrt, sei $[c] \in H_q(A; R)$ $(c \in Z_q(A; R))$ mit $H_q(i)([c]) = 0$ in $H_q(X; R)$. Dann

$$0 = H_q(i)([c]) = [S_q(i)(c)] = [c],$$

$\underline{\text{in } H_q(X; R)}$, also existiert $\xi \in S_{q+1}(X; R)$ sodass $c = \partial\xi$. Insbesondere ist $\xi \in Z_{q+1}(X, A; R)$ und

$$\delta([\xi]) = [\partial\xi] = [c]$$

$\underline{\text{in } H_q(A; R)}$, also $[c] \in \mathrm{Im}\delta$.

• Exaktheit in $H_q(X; R)$: zu zeigen ist $\mathrm{Im}H_q(i) = \ker H_q(j)$. Einerseits ist $H_q(j) \circ H_q(i)$ die Nulllabbildung und das impliziert $\mathrm{Im}H_q(i) \subset \ker H_q(j)$. Sei weiter $[c] \in H_q(X; R)$ sodass $H_q(j)([c]) = 0$, d.h. $[S_q(j)(c)] = 0$ $\underline{\text{in } H_q(X, A; R)}$. Es existieren also $c' \in S_q(A; R)$ und $\xi \in S_q(X; R)$ mit

$$S_q(j)(c) = c' + \partial\xi.$$

Insbesondere hat man die folgende Gleichheit $\underline{\text{in}}$ $\underline{H_q(X;R)}$

$$[c] = [c'] = H_q(i)([c']) \in \mathrm{Im} H_q(i).$$

• Exaktheit in $H_q(X,A;R)$: zu zeigen ist $\mathrm{Im} H_q(j) = \ker\delta$. Sei zunächst $[c] \in H_q(X;R)$, wobei $c \in S_q(X;R)$ und $\partial c = 0$. Dann

$$(\delta \circ H_q(j))(c) = \delta([c]) = [\partial c] = 0.$$

Sei weiter $[c] \in H_q(X,A;R)$ (d.h. $c \in S_q(X,R)$, sodass $\partial c \in S_q(A;R)$) mit $\delta([c]) = 0$. Dann, definitionsgemäss, $[\partial c] = 0$ $\underline{\text{in}}$ $\underline{H_{q-1}(A;R)}$, also existiert $c' \in S_q(A;R)$ mit $\partial c = \partial c'$. Betrachte nun $c - c' \in Z_q(X;R)$. Man hat $\underline{\text{in}}$ $\underline{H_q(X,A;R)}$

$$H_q(j)([c-c']) = [c-c'] = [c],$$

denn $c' \in S_q(A;R) \subset B_q(X,A;R)$. ■

Corollar 3.4.11 *Sei (X,A) ein Paar mit A $\underline{\text{zusammenziehbar}}$.*
i) Für alle $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$ ist

$$H_q(j) : H_q(X;R) \xrightarrow{\simeq} H_q(X,A;R)$$

ein Isomorphismus.
ii) Falls X $\underline{\text{wegzusammenhängend}}$ ist, gilt diese Aussage auch für $q = 1$.

Beweis. i) Wir betrachten die exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H_q(A;R) \longrightarrow H_q(X;R) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A;R) \longrightarrow H_{q-1}(A;R) \longrightarrow \cdots.$$

Für $q \geq 2$ hat man

$$H_q(A;R) = \{0\},\ H_{q-1}(A;R) = \{0\}$$

(A zusammenziehbar, vgl. Corollar 3.2.6) und somit ist $H_q(j)$ ein Isomorphismus.

ii) Wir können annehmen, $A \neq \emptyset$ (für $A = \emptyset$ ist die Aussage offensichtlich wahr). Da X wegzusammenhängend ist, haben wir $H_0(X;R) \simeq R$ und, gemäss Proposition 3.4.3 gilt $H_0(X,A;R) = \{0\}$. Da A zusammenziehbar ist, gilt $H_0(A;R) \simeq R$, $H_1(A;R) = \{0\}$. Wir schreiben nun die letzte Termen der Homologiesequenz

$$\begin{tikzcd}
H_1(A;R) \arrow[r] \arrow[d, "="] & H_1(X;R) \arrow[r, "H_1(j)"] \arrow[d, "="] & H_1(X,A;R) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "="] & H_0(A;R) \arrow[r, "H_0(i)"] \arrow[d, "\simeq"] & H_0(X;R) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H_0(X,A;R) \arrow[d, "="] \\
\{0\} \arrow[r] & H_1(X;R) \arrow[r, "H_1(j)"] & H_1(X,A;R) \arrow[r, "\delta"] & R \arrow[r, "H_0(i)"] & R \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Einerseits gilt $H_1(A;R) = \{0\}$ und somit ist $H_1(j)$ injektiv.
Andererseits ist $H_0(i)$ ein Isomorphismus (warum?). Wir verwenden nun zweimal die Exaktheit:

$$\mathrm{Im}\delta = \ker H_0(i) = \{0\},$$

und, folglich,

$$\mathrm{Im} H_1(j) = \ker\delta = H_1(X,A;R),$$

d.h. $H_1(j)$ ist surjektiv. ■

3.4.3 Beispiel

Wir betrachten

$$X := D^n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\right\}, \quad A := \mathbb{S}^{n-1} \subset X$$

und wir beschreiben die relative Homologiemoduln $H_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1}; R)$.

• $q \geq 2$ In der exakten Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H_q(D^n; R) \longrightarrow H_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \longrightarrow H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R) \longrightarrow H_{q-1}(D^n; R)$$

haben wir, da D^n zusammenziehbar ist, $H_q(D^n; R) = H_{q-1}(D^n; R) = \{0\}$. Somit folgt

$$H_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R) \qquad \forall q \geq 2. \tag{3.2}$$

• $q = 1$ Wir betrachten die letzten Termen der Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow H_1(D^n; R) \longrightarrow H_1(D^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_0(\mathbb{S}^{n-1}; R) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(D^n; R) \longrightarrow H_0(D^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \longrightarrow 0.$$

Man hat $H_1(D^n; R) = \{0\}$, $H_0(D^n; R) \simeq R$ und, gemäss Proposition 3.4.3, gilt $H_0(D^q, \mathbb{S}^{n-1}; R) = \{0\}$. Aus der Exaktheit der Homologiesequenz schliessen wir, dass

$$H_1(D^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) \simeq \ker(H_0(i)) = \ker\left(H_0(\mathbb{S}^{n-1}; R) \to H_0(D^n; R)\right).$$

Nun unterscheiden wir 2 Fälle:

Fall 1. $n > 1$. Dann $H_0(\mathbb{S}^{n-1}; R) \simeq R$. In diesem Fall ist $H_0(i)$ ein Isomorphismus (warum?) und somit

$$H_1(D^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) = \{0\}. \tag{3.3}$$

Fall 2. $n = 1$. In diesem Fall besteht $\mathbb{S}^0$ aus 2 Punkten, $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ und somit hat man $H_0(\mathbb{S}^0; R) \simeq R \oplus R$. Es gilt $\ker(H_0(i)) \simeq R$ (warum?) und wir schliessen

$$H_1(D^1, \mathbb{S}^0; R) \simeq R. \tag{3.4}$$

• $q = 0$ Gemäss Proposition 3.4.3 haben wir

$$H_0(D^n, \mathbb{S}^{n-1}; R) = \{0\}.$$

3.5 Ausschneidungssatz

Definition 3.5.1 *Seien X ein topologischer Raum, $U \subset A \subset X$. Die Inklusion*

$$(X \setminus U, A \setminus U) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (X, A)$$

heisst **Ausschneidung** *falls für alle R, für alle $q \in \mathbb{N}$ die Abbildung*

$$H_q(\iota) : H_q(X \setminus U, A \setminus U; R) \to H_q(X, A; R)$$

ein Isomorphismus ist. Man sagt, dass U **ausgeschnitten werden kann**.

Theorem 3.5.2 (Ausschneidungssatz) *Seien X ein topologischer Raum und $U \subset A \subset X$. Ist die Bedingung*

$$\overline{U} \subset \mathring{A} \tag{3.5}$$

erfüllt, so kann U ausgeschnitten werden.

Beweis. [1, S. 60ff], [5, S. 229ff]. ■

Definition 3.5.3 *Ein Paar* $(Y, B) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (X, A)$ *ist* **Deformationsretrakt** *von* (X, A) *falls es einen Morphismus von Paaren* $\rho : (X, A) \to (Y, B)$ *existiert, sodass*

$$\rho \circ \iota = \mathrm{id}_{(Y,B)}, \qquad \iota \circ \rho \simeq \mathrm{id}_{(X,A)}.$$

Corollar 3.5.4 *Seien*

$$V \subset U \subset A \subset X.$$

Man nimmt an:

(i) V *kann ausgeschnitten werden,*

(ii) $(X \setminus U, A \setminus U)$ *ist Deformationsretrakt von* $(X \setminus V, A \setminus V)$.

Dann kann U *ausgeschnitten werden.* ■

3.6 Die Homologie der Sphären

Als Anwendung zum Ausschneidungssatz, berechnen wir die Homologie der Sphären.

Notationen.

$$H_n^+ := \{x \in \mathbb{S}^n | x_{n+1} \geq 0\},$$
$$H_n^- := \{x \in \mathbb{S}^n | x_{n+1} \leq 0\},$$
$$\overset{\circ}{H}{}_n^- := \{x \in \mathbb{S}^n | x_{n+1} < 0\}.$$

Bemerkungen. Man hat:

$$H_n^+ \cup H_n^- = \mathbb{S}^n,$$
$$H_n^+ \simeq H_n^- \simeq D^n \text{ (homöomorph)},$$
$$H_n^+ \cap H_n^- \simeq \mathbb{S}^{n-1} \text{ (homöomorph)}.$$

Lemma 3.6.1 *Sei* $n \geq 1$. *Dann ist*

$$(H_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, H_n^-)$$

eine Ausschneidung.

Beweis. Wir setzen

$$X := \mathbb{S}^n, \ A := H_n^-, \ U := \overset{\circ}{H}{}_n^-.$$

Man hat

$$X \setminus U = H_n^+, \quad A \setminus U \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

und zu zeigen ist, dass U ausgeschnitten werden kann. Da $\overline{U}$ <u>nicht</u> in $\overset{\circ}{A}$ enthalten ist, betrachtet man

$$V := \left\{ x \in \mathbb{S}^n | \, x_{n+1} < \frac{1}{2} \right\}.$$

Dann:

(i) Offensichtlich gilt $\overline{V} \subset \overset{\circ}{A}$, d.h. V kann ausgeschnitten werden (gemäss Ausschneidungssatz 3.5.2).

(ii) Man zeigt, dass $(H_n^+, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n \setminus V, H_n^- \setminus V)$ ein Deformationsretrakt ist.

Gemäss Corollar 3.5.4 kann $U = \overset{\circ}{H}{}_n^-$ ausgeschnitten werden. ■

Theorem 3.6.2 *Sei R ein Ring. Dann gilt*

(i)
$$H_q(\mathbb{S}^0;R) \simeq \begin{cases} R\oplus R, & q=0 \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Sei $n \geq 1$. Dann

$$H_q(\mathbb{S}^n;R) \simeq \begin{cases} R, & q=0 \text{ und } q=n \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. (i) Man hat $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ und die Aussage folgt aus Proposition 3.3.1 und Beispiel 3.1.12.

(ii) • Wir behaupten zunächst, dass für $q \geq 2$ gilt

$$H_q(\mathbb{S}^n;R) \simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1};R).$$

Nämlich, gemäss Corollar 3.4.11 i), Lemma 3.6.1 und (3.2) gilt

$$H_q(\mathbb{S}^n;R) \simeq H_q(\mathbb{S}^n, H_n^-;R) \simeq$$

$$\simeq H_q(H_n^+, \mathbb{S}^{n-1};R) \simeq H_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1};R) \simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1};R).$$

• Aus Corollar 3.4.11 ii), Lemma 3.6.1 und (3.3) bzw. (3.4) folgt

$$H_1(\mathbb{S}^n;R) \simeq H_1(\mathbb{S}^n, H_n^-;R) \simeq H_1(H_n^+, \mathbb{S}^{n-1};R) \simeq$$

$$\simeq H_1(D^n, \mathbb{S}^{n-1};R) \simeq \begin{cases} \{0\}, & n>1 \\ R, & n=1. \end{cases}$$

• Wir beweisen nun die Behauptung des Satzes durch Induktion nach n.
Für $n=1$ hat man:

$$H_0(\mathbb{S}^1;R) \simeq R, \qquad H_1(\mathbb{S}^1;R) \simeq R$$

und für $q \geq 2$ gilt

$$H_q(\mathbb{S}^1;R) \simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^0;R) = \{0\}.$$

Sei nun $n \geq 2$. Wir nehmen an, die Aussage sei wahr für die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$. Dann hat man

$$H_0(\mathbb{S}^n;R) \simeq R, \qquad H_1(\mathbb{S}^n;R) = \{0\}$$

und für $2 \leq q \leq n-1$ oder $n+1 \leq q$ gilt

$$H_q(\mathbb{S}^n;R) \simeq H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1};R) = \{0\}.$$

Schliesslich hat man für $q=n$

$$H_n(\mathbb{S}^n;R) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1};R) \simeq R. \quad \blacksquare$$

Corollar 3.6.3 *Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist <u>kein</u> Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n$.* $\blacksquare$

3.7 Die Mayer-Vietoris Sequenz

Wir betrachten nun **Tripeln** der Form (X, X_1, X_2), mit X topologischer Raum und X_1, X_2 Teilräume von X. Die Inklusionen von X_1 bzw. X_2 in $X_1 \cup X_2$ induzieren Morphismen von Paaren

$$k_1 : (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2), \quad k_2 : (X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1).$$

Man bemerkt, dass

$$(X_1, X_1 \cap X_2) = ((X_1 \cup X_2) \setminus W, X_2 \setminus W), \text{ wobei } W = X_2 \setminus (X_1 \cap X_2),$$

$$(X_2, X_1 \cap X_2) = ((X_1 \cup X_2) \setminus W', X_1 \setminus W'), \text{ wobei } W' = X_1 \setminus (X_1 \cap X_2).$$

Definition 3.7.1 *Das Tripel* (X, X_1, X_2) *heisst* **exakt** *wenn* k_1, k_2 *Ausschneidungen sind.*

Bemerkung. Sei $X = X_1 \cup X_2$, mit $X_1, X_2 \subset X$ <u>offen</u>. Dann ist das Tripel (X, X_1, X_2) exakt. Nämlich setzt man

$$X := X_1 \cup X_2, \quad A := X_2, \quad W := X_2 \setminus (X_1 \cap X_2).$$

Dann ist W abgeschlossen in $A = X_2$ und somit gilt $\overline{W} = W \subset A = \mathring{A}$. Gemäss Theorem 3.5.2 kann W ausgeschnitten werden, d.h. k_1 ist eine Ausschneidung. Ähnlich zeigt man, dass k_2 eine Ausschneidung ist.

Beispiel 3.7.2 *Gemäss Lemma 3.6.1 ist das Tripel* $(\mathbb{S}^n, H_n^+, H_n^-)$ *exakt.*

Notationen. Sei nun (X, X_1, X_2) ein <u>exaktes</u> Tripel mit $X = X_1 \cup X_2$ und sei $A := X_1 \cap X_2$.

i) Seien $m_1 : A \hookrightarrow X_1, m_2 : A \hookrightarrow X_2$ die kanonische Inklusionen. Man definiert

$$\Phi : H_q(A; R) \to H_q(X_1; R) \oplus H_q(X_2; R), \quad \Phi(a) := (H_q(m_1)(a), -H_q(m_2)(a)).$$

ii) Seien ι_1, ι_2 die Inklusionen von X_1 bzw. X_2 in X. Wir setzen

$$\Psi : H_q(X_1; R) \oplus H_q(X_2; R) \to H_q(X; R), \quad \Psi(\alpha_1, \alpha_2) := H_q(\iota_1)(\alpha_1) + H_q(\iota_2)(\alpha_2).$$

iii) Für $i = 1, 2$ betrachten wir die kanonischen Morphismen von Paaren $s_i : (X, \emptyset) \to (X, X_i)$ und sei δ_i der "connecting" Homomorphismus assoziiert zum Paar (X, X_i) (vgl. Abschnitt 3.4.2). Man zeigt ([1, S. 73f]), dass

$$\delta_2 \circ H_q(k_2)^{-1} \circ H_q(s_1) = -\delta_1 \circ H_q(k_1)^{-1} \circ H_q(s_2)$$

und definiert

$$\Delta : H_q(X; R) \to H_{q-1}(A; R), \qquad \Delta := \delta_2 \circ H_q(k_2)^{-1} \circ H_q(s_1).$$

iv) Nun können wir die **Mayer-Vietoris Sequenz** einführen:

$$\cdots \longrightarrow H_q(A; R) \xrightarrow{\Phi} H_q(X_1; R) \oplus H_q(X_2; R) \xrightarrow{\Psi} H_q(X; R) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(A; R) \longrightarrow \cdots. \tag{3.6}$$

Theorem 3.7.3 *Sei* (X, X_1, X_2) *ein* <u>*exaktes*</u> *Tripel mit* $X = X_1 \cup X_2$ *und sei* $A := X_1 \cap X_2$. *Dann ist die Mayer-Vietoris Sequenz (3.6) exakt.*

Beweis. [1, S. 74f]. ■

3.8 Die Homologie der projektiven Räume

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Homologie der projektiven Räume. Wir geben nur die Ergebnisse, ohne Beweise (es wurden Begriffe gebraucht, die wir nicht eingeführt haben). Details können, z.B., in [1, S. 90ff] gefunden werden.

Proposition 3.8.1 *Sei R ein Ring. Es gilt*

$$H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; R) \simeq \begin{cases} \{0\}, & q > 2n \text{ oder } q \text{ ungerade} \\ R, & q \text{ gerade und } 0 \leq q \leq 2n. \end{cases}$$

Beweis. [1, S. 90]. ■

Notationen. Sei R ein Ring. Wir bezeichnen mit $R/2$ den Quotientenring $R/\langle 2\rangle$ und mit R_2 den Ring

$$R_2 := \{x \in R |\ 2 \cdot x = 0\}.$$

Beispiele i) $\mathbb{Z}_2 = \{0\}$.
ii) $(\mathbb{Z}/2)_2 = \mathbb{Z}/2$.
iii) $(\mathbb{Z}/4)_2 = \{\hat{0}, \hat{2}\}$.

Proposition 3.8.2 *Sei R ein Ring. Es gilt*

$$H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; R) \simeq \begin{cases} 0, & q > n \\ R, & q = 0 \text{ und } q = n \text{ (falls } n \text{ ungerade)} \\ R/2, & q \text{ ungerade und } 1 \leq q \leq n-1 \\ R_2, & q \text{ gerade, } 1 < q \leq n. \end{cases}$$

Beweis. [1, S. 90f]. ■

Beispiel 3.8.3 *Wir betrachten den Fall*

$$R := \mathbb{Z}/2.$$

Dann $(\mathbb{Z}/2)_2 = \mathbb{Z}/2$ und $(\mathbb{Z}/2)/2 = \mathbb{Z}/2$. Es gilt für alle $n \geq 1$

$$H_q(\mathbb{P}^n\mathbb{R}; \mathbb{Z}/2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & q \leq n \\ \{0\}, & q > n. \end{cases}$$

Beispiel 3.8.4 *Wir betrachten nun*

$$R := \mathbb{Z}.$$

In diesem Fall $\mathbb{Z}_2 = \{0\}$. Wir beschreiben konkret die Fälle $n = 1, 2, 3$.
i) $n = 1$.

$$H_q(\mathbb{P}^1\mathbb{R}; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, q = 1 \\ \{0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Das Ergebniss ist schon bekannt, da $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \simeq \mathbb{S}^1$!).
ii) $n = 2$.

$$H_q(\mathbb{P}^2\mathbb{R}; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}/2, & q = 1 \\ \{0\}, & q \geq 2. \end{cases}$$

iii) $n = 3$.

$$H_q(\mathbb{P}^3\mathbb{R}; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}/2, & q = 1 \\ \{0\}, & q = 2 \\ \mathbb{Z}, & q = 3 \\ \{0\}, & q \geq 4. \end{cases}$$

3.9 Bettizahlen. Die Eulersche Charakteristik

Für gewisse topologische Räume X ist, für alle $q \geq 0$, $H_q(X;\mathbb{Z})$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul (also eine endlich erzeugte Abelsche Gruppe). In diesem Fall heisst

$$\beta_q(X) := \mathrm{rg}(H_q(X;\mathbb{Z}))$$

die q-te Bettizahl von X. Sei X ein topologischer Raum, sodass die Bettizahlen wohldefiniert und fast alle null sind. Dann heisst die alternierende Summe

$$\chi(X) := \sum_q (-1)^q \beta_q(X)$$

die Eulersche Charakteristik von X. Details können, z.B., in [1, S. 99ff] gefunden werden. Wir geben nun ein Paar Beispiele.

Beispiel 3.9.1 *Wir betrachten $X := \mathbb{R}^n$ (wegen Homotopieinvarianz gilt dasselbe Ergebniss für X zusammenziehbar). Dann*

$$\beta_0(\mathbb{R}^n) = 1, \quad \beta_q(\mathbb{R}^n) = 0,\ \forall q \geq 1; \qquad \chi(\mathbb{R}^n) = 1.$$

Beispiel 3.9.2 *Sei nun $X := \mathbb{S}^n$. Dann*

$$\beta_0(\mathbb{S}^n) = 1, \qquad \beta_n(\mathbb{S}^n) = 1, \qquad \beta_q(\mathbb{S}^n) = 0 \text{ sonst.}$$

Es folgt, dass

$$\chi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beispiel 3.9.3 *Die Eulersche Charakteristik des komplexen projektiven Raumes $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ ist $\chi(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) = n + 1$.*

Beispiel 3.9.4 *Die Eulersche Charakteristik des reelen projektiven Raumes ist*

$$\chi(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) = \begin{cases} 0, & n \textit{ ungerade} \\ 1, & n \textit{ gerade.} \end{cases}$$

Anhang A

Zusammenfassung mengentheoretische Topologie

Zunächst geben wir eine Liste von Grundbegriffen der mengentheoretischen Topologie. Details kann man, z.B., in [2] finden. In bezug auf das Thema Zusammenhang geben wir Definitionen und Ergebnisse, die in diesem Skript mehrmals verwendet werden. Um Bezeichnungen festzulegen, beschreiben wir schliesslich ein Paar Konstruktionen von neuen topologischen Räumen aus alten: Teilräume, Produkte und Quotienten.

Definition A.0.5 **Topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$, *offene (bzw. abgeschlossene) Teilmengen, Umgebung, Randpunkt, Rand, Innere, abgeschlossene Hülle.*

Beispiel A.0.6 *i) Die triviale Topologie $\mathcal{T}_{trivial}$ auf einer Menge X.*
ii) Die diskrete Topologie $\mathcal{T}_{diskret}$ auf einer Menge X.
iii) Die kanonische Topologie $\mathcal{T}_{can}$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. auf $\mathbb{C}^n$.

Definition A.0.7 **Stetige Abbildung, Homöomorphismus**.

Definition A.0.8 **Gröbere, feinere** *Topologie.*

Definition A.0.9 *i)* **Basis, Subbasis** *einer Topologie.*
ii) **Umgebungsbasis** *eines Punktes.*

Definition A.0.10 *Das erste und das zweite* **Abzählbarkeitsaxiom**.

Definition A.0.11 **Hausdorffscher Raum**.

Definition A.0.12 **Kompakter** *topologischer Raum.*

A.1 Zusammenhang

Definition A.1.1 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heisst* **zusammenhängend**, *genau dann wenn <u>nur</u> $\emptyset, X$ <u>gleichzeitig</u> offen und abgeschlossen in X sind.*

Definition A.1.2 *Ein* **Weg** *in einem topologischem Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine stetige Abbildung*

$$\alpha : ([0, 1], \mathcal{T}_{can}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}).$$

Definition A.1.3 *i) Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ *heisst* **wegzusammenhängend**, *falls für alle* $x_0, x_1 \in X$ *ein Weg von* x_0 *nach* x_1 *existiert.*

ii) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ *heisst* **lokal wegweise zusammenhängend** *genau dann wenn, für alle* $x \in X$ *und für jede Umgebung* U *von* X*, eine* *<u>wegzusammenhängende</u> Umgebung* $V \subset U$ *von* x *existiert.*

Bemerkung. Beziehungen zwischen diesen Begriffen kann man in [3, S. 52, S. 62] finden.

Lemma A.1.4 ("Glueing Lemma") *Seien* $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$ *topologische Räume;* $A_1, A_2 \subset X$ *beide offen (oder beide abgeschlossen), sodass* $X = A_1 \cup A_2$. *Seien* $f_i : A_i \to Y,\ i = 1, 2$ *stetige Abbildungen, sodass*

$$f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}.$$

Dann ist

$$f : X \to Y, \quad f(x) := \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis. • Da $f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$, ist f wohldefiniert.

• Wir zeigen nun, dass f stetig ist, falls A_1, A_2 beide offen sind. Falls A_1, A_2 beide abgeschlossen sind, ist der Beweis ähnlich (Übung!). Sei also $D \subset Y$ offen. Dann

$$f^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cap (A_1 \cup A_2) = \big(f^{-1}(D) \cap A_1\big) \cup \big(f^{-1}(D) \cap A_2\big) = f_1^{-1}(D) \cup f_2^{-1}(D).$$

Für $i = 1, 2$ ist $A_i \subset X$ offen und somit ist $f_i^{-1}(D) \subset A_i$ offen. Es folgt, dass $f_i^{-1}(D)$ offen in X ist . Wir schliessen, dass $f^{-1}(D)$ offen in X ist. ■

A.2 Teilräume, Produkte, Quotienten

A.2.1 Relativtopologie auf Teilräumen

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$. Man setzt

$$\mathcal{T}_Y := \{Y \cap D |\, D \in \mathcal{T}_X\}.$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum ist. $\mathcal{T}_Y$ heisst **Relativtopologie**.

Bemerkung. Die Topologie $\mathcal{T}_Y$ ist die <u>gröbste</u> Topologie auf Y, für die die Inklusion $i_Y : Y \to X$ stetig ist.

Beispiel A.2.1 *Sei* $n \geq 1$. *Man versieht* $\mathbb{R}^n$ *mit der kanonischen Topologie* $\mathcal{T}_{can}$. *Die folgende Teilräume von* $\mathbb{R}^n$ *werden mehrmals in diesem Skript erwähnt:*

i) $\mathbb{S}^{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$,

ii) $B^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}$,

iii) $D^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$.

A.2.2 Produkte topologischer Räume

Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume $(i = 1, 2)$. Wir definieren die **Produkttopologie** auf $X_1 \times X_2$ wie folgt:

$$W \subset X_1 \times X_2$$

heisst **offen in der Produkttopologie**, falls für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ (offene) Umgebungen U_1 bzw. U_2 von x_1, bzw. x_2 existieren, sodass $U_1 \times U_2 \subset W$.

Bemerkung. Diese Topologie ist die gröbste Topologie auf $X_1 \times X_2$, für die die kanonische Projektionen $pr_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ stetig sind.

A.2.3 Quotienten

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir bezeichnen mit $[x]$ die Äquivalenzklasse von x, mit ${}^{X}/_{\sim}$ die Menge der Äquivalenzklassen und mit

$$\pi : X \longrightarrow {}^{X}/_{\sim}, \qquad \pi(x) := [x]$$

die kanonische Projektion. Auf ${}^{X}/_{\sim}$ definiert man die **Quotiententopologie** $\mathcal{T}_{X/_{\sim}}$ durch

$$\mathcal{T}_{X/_{\sim}} := \{U \subset {}^{X}/_{\sim} \mid \pi^{-1}(U) \subset \mathcal{T}\}.$$

Bemerkung. Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf ${}^{X}/_{\sim}$, für die π stetig ist.

Beispiel A.2.2 *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir versehen $\mathbb{R}^{n+1}$ bzw. $\mathbb{C}^{n+1}$ mit der kanonischen Topologie. Auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ hat man die Äquivalenzrelation*

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \text{ sodass } y = \lambda x.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit

$$\mathbb{P}^n\mathbb{K} := \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}/_{\sim}$$

bezeichnet und heisst **der n-dimensionale projektive Raum über $\mathbb{K}$.**

Insbesondere tragen $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ eine Quotiententopologie, die von der Relativtopologie von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ induziert wird.

Literaturverzeichnis

[1] M. Greenberg, *Algebraic topology*, 1967.

[2] K. Jänich, *Topologie*, 1994.

[3] I.M. Singer, J.A. Thorpe, *Lecture notes on elementary topology and geometry*, 1967.

[4] E. Spanier, *Algebraic topology*, 1966.

[5] R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, 1988.