Introducere în teoria fasciculelor - Curs 8

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2013-2014

Rezultate

- Pentru un fascicul $\mathcal{F}$ de grupuri abeliene de bază X se definește $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ (fasciculul (flasc) de secțiuni arbitrare în $\mathcal{F}$)

Rezultate

- Pentru un fascicul $\mathcal{F}$ de grupuri abeliene de bază X se definește $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ (fasciculul (flasc) de secțiuni arbitrare în $\mathcal{F}$)
- **Teoremă** *Fie*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

un șir exact de fascicule de grupuri abeliene de bază X, cu $\mathcal{F}'$ **flasc**. *Pentru orice $U \subset X$ deschis*

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

este un șir exact de grupuri abeliene.

Rezultate

- Pentru un fascicul $\mathcal{F}$ de grupuri abeliene de bază X se definește $\mathcal{W}(\mathcal{F})$ (fasciculul (flasc) de secțiuni arbitrare în $\mathcal{F}$)
- **Teoremă** *Fie*
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$
un șir exact de fascicule de grupuri abeliene de bază X, cu $\mathcal{F}'$ **flasc**. *Pentru orice $U \subset X$ deschis*
$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$
este un șir exact de grupuri abeliene.
- **Teoremă** *Fie*
$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow \dots$$
un șir exact de fascicule **flasce** *de grupuri abeliene. Pentru orice $U \subset X$ deschis*
$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}^0) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}^1) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}^2) \longrightarrow \dots$$
este un șir exact de grupuri abeliene.

Notații

- $\mathcal{F}$ fascicul de grupuri abeliene de bază X

Notații

- $\mathcal{F}$ fascicul de grupuri abeliene de bază X
- $\mathcal{W}^0(\mathcal{F}) := \mathcal{W}(\mathcal{F})$ fasciculul (flasc) de secțiuni arbitrare în $\mathcal{F}$

Notații

- $\mathcal{F}$ fascicul de grupuri abeliene de bază X
- $\mathcal{W}^0(\mathcal{F}) := \mathcal{W}(\mathcal{F})$ fasciculul (flasc) de secțiuni arbitrare în $\mathcal{F}$
- morfisme naturale

$$\mathcal{F} \xrightarrow{j^0} \mathcal{W}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{p^0} \mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})} \xrightarrow{j^1} \mathcal{W}\left(\mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})}\right);$$

se notează $d^0 := j^1 \circ p^0; \mathcal{W}^1(\mathcal{F}) := \mathcal{W}\left(\mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})}\right)$

Notații

- $\mathcal{F}$ fascicul de grupuri abeliene de bază X
- $\mathcal{W}^0(\mathcal{F}) := \mathcal{W}(\mathcal{F})$ fasciculul (flasc) de secțiuni arbitrare în $\mathcal{F}$
- morfisme naturale

$$\mathcal{F} \xrightarrow{j^0} \mathcal{W}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{p^0} \mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})} \xrightarrow{j^1} \mathcal{W}\left(\mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})}\right);$$

se notează $d^0 := j^1 \circ p^0; \mathcal{W}^1(\mathcal{F}) := \mathcal{W}\left(\mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})}\right)$

- Inductiv, pentru $q \geq 1$

$$\mathcal{W}^{q+1}(\mathcal{F}) := \mathcal{W}\left(\mathcal{W}^q(\mathcal{F})/_{d^{q-1}(\mathcal{W}^{q-1}(\mathcal{F}))}\right)$$

$d^q = j^{q+1} \circ p^q$, unde

$$\mathcal{W}^q(\mathcal{F}) \xrightarrow{p^q} \mathcal{W}^q(\mathcal{F})/_{d^{q-1}(\mathcal{W}^{q-1}(\mathcal{F}))} \xrightarrow{j^{q+1}} \mathcal{W}^{q+1}(\mathcal{F})$$

Notații

- $\mathcal{F}$ fascicul de grupuri abeliene de bază X
- $\mathcal{W}^0(\mathcal{F}) := \mathcal{W}(\mathcal{F})$ fasciculul (flasc) de secțiuni arbitrare în $\mathcal{F}$
- morfisme naturale

$$\mathcal{F} \xrightarrow{j^0} \mathcal{W}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{p^0} \mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})} \xrightarrow{j^1} \mathcal{W}\left(\mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})}\right);$$

se notează $d^0 := j^1 \circ p^0; \mathcal{W}^1(\mathcal{F}) := \mathcal{W}\left(\mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})}\right)$

- Inductiv, pentru $q \geq 1$

$$\mathcal{W}^{q+1}(\mathcal{F}) := \mathcal{W}\left(\mathcal{W}^q(\mathcal{F})/_{d^{q-1}(\mathcal{W}^{q-1}(\mathcal{F}))}\right)$$

$d^q = j^{q+1} \circ p^q$, unde

$$\mathcal{W}^q(\mathcal{F}) \xrightarrow{p^q} \mathcal{W}^q(\mathcal{F})/_{d^{q-1}(\mathcal{W}^{q-1}(\mathcal{F}))} \xrightarrow{j^{q+1}} \mathcal{W}^{q+1}(\mathcal{F})$$

- $\mathcal{Z}^1(\mathcal{F}) := \mathcal{W}^0(\mathcal{F})/_{j^0(\mathcal{F})}$; $\mathcal{Z}^q(\mathcal{F}) := \mathcal{W}^q(\mathcal{F})/_{d^{q-1}(\mathcal{W}^{q-1}(\mathcal{F}))}$ $(q \geq 1)$

Rezultat

Teoremă. *Fie $\mathcal{F}$ un fascicul de grupuri abeliene de bază X. $(\mathcal{W}^\bullet(\mathcal{F}), j)$ formează o rezoluție a lui $\mathcal{F}$, numită rezoluția canonică flască (rezoluție Godement).*

Axiome

X spațiu topologic. O teorie de coomologie pentru X cu coeficienți în fascicule de grupuri abeliene constă din a indica

(i) un grup abelian ${}'H^q(X, \mathcal{F})$, $\forall q \in \mathbb{Z}, \forall \mathcal{F}$

Axiome

X spațiu topologic. O teorie de coomologie pentru X cu coeficienți în fascicule de grupuri abeliene constă din a indica

(i) un grup abelian ${}'H^q(X, \mathcal{F})$, $\forall q \in \mathbb{Z}, \forall \mathcal{F}$

(ii) un morfism $f^* :' H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow' H^q(X, \mathcal{G})$ pentru orice morfism $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ și pentru orice q

Axiome

X spațiu topologic. O teorie de coomologie pentru X cu coeficienți în fascicule de grupuri abeliene constă din a indica

(i) un grup abelian $'H^q(X, \mathcal{F})$, $\forall q \in \mathbb{Z}, \forall \mathcal{F}$

(ii) un morfism $f^* :' H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow' H^q(X, \mathcal{G})$ pentru orice morfism $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ și pentru orice q

(iii) morfisme de legătură $\delta^q : H^q(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow' H^{q+1}(X, \mathcal{F}')$ $(q \in \mathbb{N})$ asociate oricărui șir exact scurt $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$

Axiome

X spațiu topologic. O teorie de coomologie pentru X cu coeficienți în fascicule de grupuri abeliene constă din a indica

(i) un grup abelian $'H^q(X, \mathcal{F})$, $\forall q \in \mathbb{Z}, \forall \mathcal{F}$

(ii) un morfism $f^* :' H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow' H^q(X, \mathcal{G})$ pentru orice morfism $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ și pentru orice q

(iii) morfisme de legătură $\delta^q : H^q(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow' H^{q+1}(X, \mathcal{F}')$ $(q \in \mathbb{N})$ asociate oricărui șir exact scurt $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$

- așa încât sunt verificate următoarele proprietăți:

Axiome (”functorialitatea”)

(a) $\mathrm{id} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ induce $\mathrm{id} :' H^q(X, \mathcal{F}) \to' H^q(X, \mathcal{F})$, $\forall q$;

(b) dacă diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

comută, atunci, pentru orice q, diagrama de mai jos comută

$$\begin{tikzcd} {}'H^q(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[dr] & {}'H^q(X, \mathcal{G}) \arrow[d] \\ & {}'H^q(X, \mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

Axiome ("functorialitatea lui δ")

(c) dacă

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G}' \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{G}'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

este o diagramă comutativă în care liniile sunt șiruri exacte de fascicule, atunci, pentru orice q, diagrama de mai jos comută

$$\begin{tikzcd} {}'H^q(X, \mathcal{F}'') \arrow[r] \arrow[d] & {}'H^{q+1}(X, \mathcal{F}') \arrow[d] \\ {}'H^q(X, \mathcal{G}'') \arrow[r] & {}'H^{q+1}(X, \mathcal{G}') \end{tikzcd}$$

Axiome (" functorii $'H^0$ și Γ sunt izomorfi")

(d) $'H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pentru $q < 0$ și $'H^0(X, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F})$ astfel încât pentru orice morfism $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ diagrama de mai jos comută:

$$\begin{tikzcd} 'H^0(X, \mathcal{F}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathcal{F}) \arrow[d] \\ 'H^0(X, \mathcal{G}) \arrow[r, "\simeq"] & \Gamma(X, \mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

Axiome (”un șir exact scurt induce un șir exact lung în coomologie”)

(e) dacă $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ este un șir exact scurt de fascicule, atunci șirul

$$\ldots \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^q} {}'H^{q+1}(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{f^*} {}'H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{g^*} {}'H^{q+1}(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow \ldots$$

este exact

Axiome ("coomologia fasciculelor flasce")

(f) dacă $\mathcal{F}$ este un fascicul flasc, atunci $'H^q(X, \mathcal{F}) = 0$, pentru orice $q \geq 1$.

Bibliografie

1. R. Godement, *Topologie algbrique et thorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973.
2. F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983.
3. R.O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, ediția a III-a, Springer, 2008.