EINFÜHRUNG IN DIE MATHEMATISCHE EICHTHEORIE (I)

Universität Zürich, WS 1998-1999

Mihai-Sorin Stupariu

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Physikalische Motivation

Notationen Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^4$ mit Koordinaten (x^0, x^1, x^2, x^3) und die Metrik h_0 auf M gegeben durch

$$h_0(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^0}) = 1, \quad h_0(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = -1, \ (i = 1, 2, 3), \quad h_0(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = 0, \ (\alpha \neq \beta).$$

Man nennt (M, h_0) **Minkovskiraum**.

Für $X : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $X = (X^1, X^2, X^3)$ definiere

$$\mathrm{div}X : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{div}X := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X^i}{\partial x^i},$$

$$\mathrm{rot}X : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \ \mathrm{rot}X := \left(\frac{\partial X^3}{\partial x^2} - \frac{\partial X^2}{\partial x^3}, \frac{\partial X^1}{\partial x^3} - \frac{\partial X^3}{\partial x^1}, \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} \right).$$

Man nennt $\mathrm{div}X$ **die Divergenz von** X und $\mathrm{rot}X$ **den Rotor von** X.

• Die Maxwellsche Gleichungen

Parameter Es seien $\rho : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ und $j = (j^1, j^2, j^3) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ **die Ladungsdichte** bzw. **die Stromdichte**.

Unbekannte Als Unbekannte hat man **das Elektrikfeld** $E = (E^1, E^2, E^3) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und das **Magnetikfeld** $B = (B^1, B^2, B^3) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

Die Gleichungen

$$\begin{cases} \mathrm{div}B = 0 \\ \mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial x^0} = 0 \\ \mathrm{div}E = \rho \\ \mathrm{rot}B - \frac{\partial E}{\partial x^0} = j \end{cases} \tag{1}$$

Bemerkung Die folgende Gleichung, die **die Kontinuitätsgleichung** genannt wird, ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (1):

$$\mathrm{div}j + \frac{\partial \rho}{\partial x^0} = 0. \tag{2}$$

• **Weitere Formalisierung der Gleichungen**

Notationen

Wir definieren die 2-Form $F : \mathbb{R}^4 \to \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$,

$$F := \sum_{i=1}^{3} E^i dx^i \wedge dx^0 + \sum_{(i,k,l)\ gerade} B^i dx^k \wedge dx^l,$$

und die **Quelle 1-Form** $J : \mathbb{R}^4 \to \Lambda^1(\mathbb{R}^4)$,

$$J := \rho dx^0 - \sum_{i=1}^{3} j^i dx^i.$$

Es sei $\delta = *d*$, wobei $*$ der Hodge-Operator ist.

Lemma 0.0.1 *Es gilt:*

$$dF = \sum_{(i,k,l)\ gerade} \left(\mathrm{rot} E + \frac{\partial B}{\partial x^0} \right)^i dx^k \wedge dx^l \wedge dx^0 + (\mathrm{div} B) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

$$\delta F = (\mathrm{div} E) dx^0 - \sum_{i=1}^{3} \left(\mathrm{rot} B - \frac{\partial E}{\partial x^0} \right)^i dx^i.$$

Aus diesem Lemma kann man schliessen:

Proposition 0.0.2 *Die Maxwellsche Gleichungen (1) sind zu dem folgenden Gleichungssystem äquivalent:*

$$\begin{cases} dF &= 0 \\ \delta F &= J. \end{cases} \tag{3}$$

Die Kontinuitätsgleichung (2) wird $\delta J = 0$.

Diese Gleichungen werden später, in Absch. 3.2.6 bzw. 4.4.3 interpretiert.

Kapitel 1

Lie-Gruppen und Lie-Algebren

1.1 Lie-Gruppen

Die Mannigfaltigkeiten mit den wir arbeiten werden, sind parakompakt und Hausdorffsch.

Definition 1.1.1 *Eine* **Lie-Gruppe** *G ist eine Gruppe, die zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, so dass die Multiplikation*

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(f, g) := f \cdot g,$$

und die Inversenbildung

$$j : G \to G, \quad j(g) := g^{-1}$$

differenzierbare Abbildungen sind.

Bemerkung Eine Gruppe G, die zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, ist genau dann eine Lie-Gruppe, wenn die Abbildung

$$\nu : G \times G \to G, \quad \nu(f, g) := fg^{-1}$$

differenzierbar ist.
Beispiele 1) Die endliche Gruppen.
2) $(\mathbb{R}^n, +)$.
3) $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.
4) $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot)$.
5) $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \cdot)$.
6) Wenn G und H Lie-Gruppen sind, so wird auf natürlicher Weise $G \times H$ zu einer Lie-Gruppe.

1.2 Lie-Algebren

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 1.2.1 *Eine* **Lie-Algebra** *über* $\mathbb{K}$ *ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* L*, versehen mit einer Abbildung (die heisst* **Lie-Klammer***),*

$$[\ ,\ ] : L \times L \to L,$$

so dass für alle $X, Y, Z \in L$ *und* $c \in \mathbb{K}$ *gilt:*

$$\begin{array}{lll} 1) & \textbf{Linearität}: & [cX + Y, Z] = c[X, Z] + [Y, Z], \\ 2) & \textbf{Antisymmetrie}: & [X, Y] = -[Y, X], \\ 3) & \textbf{Jacobi}-\textbf{Identität}: & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \end{array}$$

Beispiele 1) Die triviale (Abelsche) Lie-Algebra.
2) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt als Lie-Klammer.
3) Die Lie-Algebra der Endomorphismen eines Vektorraums.
4) Die Lie-Algebra der Vektorfelder aur einer Mannigfaltigkeit.

Strukturkonstanten

Definition 1.2.2 *Es sei* L *eine endlich-dimensionale Lie-Algebra und es sei* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *eine Basis von* L*.* **Die Strukturkonstanten** *(bezüglich dieser Basis) sind die reellen Zahlen* c_{ij}^k $(i, j, k = 1, \ldots, n)$ *für die gilt:*

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k E_k.$$

Bemerkung Betrachte eine feste Basis der endlich-dimensionalen Lie-Algebra L. Aus der Definition einer Lie-Algebra folgt, dass die entsprechende Strukturkonstanten die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \qquad \forall\, i, j, k,$$

$$\sum_{m=1}^{n} (c_{im}^h c_{jk}^m + c_{km}^h c_{ij}^m + c_{jm}^h c_{ki}^m) = 0, \qquad \forall\, h, i, j, k.$$

1.3 Lie-Algebren zu Lie-Gruppen. Die Exponentialabbildung

1.3.1 Lie-Algebren zu Lie-Gruppen

Jeder Lie-Gruppe G wollen wir nun eine Lie-Algebra zuordnen. Dafür brauchen wir die folgenden Konstruktionen.

Bezeichnungen Es sei G eine Lie-Gruppe und es sei $a \in G$. Die Abbildungen $L_a : G \to G$ (bzw. $R_a : G \to G$), definiert als $L_a(x) := a \cdot x$ (bzw. $R_a(x) := x \cdot a$) heissen **Linkstranslation** (bzw. **Rechtstranslation**). Die Linkstranslation und Rechtstranslation liefern äquivalente Theorien, deshalb werden wir uns nur mit Linkstranslation beschäftigen. Für jedes $g \in G$ erhält man eine Abbildung $(L_a)_{*,g} : T_g G \to T_{ag} G$, die von L_a induziert wird. Wir erhalten auch eine Abbildung $(L_a)_* : TG \to TG$. [KN, S. 8].

Definition 1.3.1 *Es sei G eine Lie-Gruppe.*

i) Ein Vektorfeld X auf G heisst **linksinvariant**, *wenn für alle $a, g \in G$ gilt:*

$$(L_a)_{*,g}(X_g) = X_{ag}.$$

ii) Wir betrachten die folgende Menge:

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathcal{X}(G) \mid X \text{ linksinvariant}\}.$$

Beispiel Die Linksinvariantevektorfelder auf $(\mathbb{R}^n, +)$ haben die Form

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \ (c_i \in \mathbb{R}).$$

Proposition 1.3.2 [Na, S. 170, 171] *Sei G eine Lie-Gruppe und sei $\mathfrak{g}$ wie oben definiert. Dann, versehen mit der üblichen Addition, Skalarmultiplikation und Lie-Klammer, wird $\mathfrak{g}$ zu einer Lie-Algebra.*

Proposition 1.3.3 [Na, S. 170] *Es sei G eine Lie-Gruppe, $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Die Vektorräume T_eG und $\mathfrak{g}$ sind isomorph. Der Isomorphismus ist durch*

$$V \mapsto X_V, \qquad (X_V)_g = (L_g)_{*,e}V, \ (g \in G)$$

gegeben.

Diese Identifizierung werden wir stillschweigend verwenden.

Korollar 1.3.4 *Es sei G eine Lie-Gruppe. Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(G)$ ist linksinvariant genau dann wenn für alle g in G gilt $(L_g)_{*,e}(X_e) = X_g$.*

1.3.2 Die Exponentialabbildung

Es seien G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Wir werden nun die Abbildung $\exp : \mathfrak{g} \to G$ konstruieren und in dem speziellen Fall der Matrix-Gruppen beschreiben.

Definition 1.3.5 *Es sei G eine Lie-Gruppe. Eine differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to G$ heisst* **1-Parameteruntergruppe von** *G wenn für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\gamma(t + s) = \gamma(t)\gamma(s).$$

Proposition 1.3.6 [Na, S. 173, 174], [KN, S. 39] *Es sei G eine Lie-Gruppe. Dann gibt es eine 1:1-Korrespondenz zwischen 1-Parameterunter-gruppen γ von G und linksinvarianten Vektofeldern X auf G, so dass gilt*

$$X_{\gamma(t)} = \gamma_{*,t}\left(\frac{d}{ds}_{|s=t}\right). \tag{1.1}$$

Bezeichnungen Für $X \in \mathcal{X}(G)$ bezeichnen wir mit γ^X die entsprechende 1-Parameteruntergruppe. Wir werden manchmal statt $\gamma_{*,t}\left(\frac{d}{ds}_{|s=t}\right)$ die Bezeichnung $\frac{d\gamma}{ds}_{|s=t}$ verwenden.

Bemerkung Es sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine lokale Karte, mit Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$, es seien X und γ wie oben. Das Vektorfeld X kann als $X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$ geschrieben werden. Wir setzen $f := \varphi \circ \gamma$; man hat $f(t) = (f^1(t), \ldots, f^n(t))$. In diesem Fall wird die Gleichung (1.1) eine gewöhnliche Differentialgleichung: $\xi^i(f(t)) = \frac{df^i}{dt}$, $i = 1, \ldots, n$.

Definition 1.3.7 *Es sei G eine Lie-Gruppe und es sei $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra.* **Die Exponentialabbildung** *wird als*

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \qquad \exp(X) := \gamma^X(1)$$

definiert.

Proposition 1.3.8 *Es sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra.*
i) Es gilt

$$\exp(tX) = \gamma^X(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ X \in \mathfrak{g}.$$

ii) Die Exponentialabbildung ist differenzierbar.
iii) Die Ableitung $(\exp)_{*,0} : T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ ist, via die Identifizierung zwischen T_eG und $\mathfrak{g}$, $(\exp)_{*,0} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Bemerkungen i) Die Exponentialabbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus um den Ursprung $0 \in \mathfrak{g}$.
ii) Man hat die Abbildung $\mu : G \times G \to G$, $\mu(x, y) = x \cdot y$. Dann ist ihre Ableitung $\mu_{*,(e,e)} : T_eG \oplus T_eG \to T_eG$, $\mu(X, Y) = X + Y$.
iii) Wenn G eine Abelsche Lie-Gruppe ist, so ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ein Gruppenhomomorphismus.
iv) Ist G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, für die die Exponentialabbildung ein Gruppenhomomorphismus ist, so ist G Abelsch.

Beispiele i) Wir betrachten die Lie-Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$. In diesem Fall ist die Lie-Algebra die triviale Lie-Algebra $\mathbb{R}^n$ und ist die Exponentialabbildung von der Identität gegeben.
ii) Wir betrachten die Gruppe$(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), +)$. Sei $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ der reeller Vektorraum $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$. Die Lie-Klammer sei von $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ gegeben. Dann ist $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ die Lie-Algebra von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
Für $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ konvergiert die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ und gilt

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Es kann auch bewiesen werden, dass

$$\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr} A}.$$

1.3.3 Strukturkonstanten für die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

Bemerkung Es sei G eine endlich-dimensionale Lie-Gruppe, sei $\mathfrak{g} = T_e G$ ihre Lie-Algebra. Es sei $\{E_1, \ldots, E_n\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Setze $(X_i)_g := (L_g)_{*,e}(E_i)$. Dann:

i) $X_i \in \mathcal{X}(G)$ und in jedem Punkt $g \in G$ ist $\{(X_1)_g, \ldots, (X_n)_g\}$ eine Basis von $T_g G$.

ii) Aus i) folgt, dass Abbildungen $c^{\lambda}_{\mu\nu} : G \to \mathbb{K}$ existieren, so dass $[X_\mu, X_\nu] = c^{\lambda}_{\mu\nu} X_\lambda$. Es gilt, dass $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ konstant sind, d.h. unabhängig von $g \in G$.

1.3.4 Die kanonische Form einer Lie-Gruppe. Die Maurer-Cartan Gleichung

Zunächst geben wir die folgende Definition (vgl. [KN, S. 8]):

Definition 1.3.9 *Es sei N eine Mannigfaltigkeit, es sei V ein Vektorraum. Eine* V**-wertige** r**-Form** ω **auf** N *ist eine Zuordnung: jedem $p \in N$ ordnet man eine schief-symmetrische, r-lineare Abbildung zu:*

$$\omega_p : T_p N \times \ldots \times T_p N \to V.$$

Bezeichnung Wir werden den Raum der differenzierbaren V-wertigen r-Formen auf N mit $A^r(N, V)$ bezeichnen.

Bemerkung Es sei $\{e_1, \ldots e_m\}$ eine Basis von V. Dann kann eine V-wertige r-Form ω eindeutig geschrieben werden als:

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \omega^j \cdot e_j, \qquad \omega^j \in \Lambda^r(N).$$

Definition 1.3.10 *Es seien G eine Lie-Gruppe, V ein Vektorraum. Eine differenzierbare V-wertige Form ω heisst* **linksinvariant** *falls für alle a in G gilt $(L_a)^* \omega = \omega$.*

Bemerkungen Es seien nun G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra.

i) Der Raum $\mathfrak{g}^*$ aller links-invarianten 1-Formen auf G ist zu $\mathfrak{g}$ dual: für $A \in \mathfrak{g}$ und $\omega \in \mathfrak{g}^*$ ist die Funktion $\omega(A)$ konstant auf G.

ii) Für ω links-invariant ist auch $d\omega$ linksinvariant.

Man erhält, dass für alle $A, B \in \mathfrak{g}$, $\omega \in \mathfrak{g}^*$ die folgende Gleichheit (**die Maurer-Cartan Gleichung**) gilt [KN, S. 41]:

$$d\omega(A, B) = -\frac{1}{2}\omega([A, B]). \tag{1.2}$$

Definition 1.3.11 *Es seien G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Die* **kanonische 1-Form von** G *ist die eindeutig bestimmte linksinvariante $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form θ, so dass für alle A in $\mathfrak{g}$ gilt $\theta(A) = A$.*

Bemerkungen Es seien $\{E_1, \ldots, E_n\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, c^i_{jk} die entsprechenden Strukturkonstanten, und $\theta^1, \ldots, \theta^n$ so dass $\theta = \sum_{i=1}^n \theta^i E_i$. Dann [KN, S. 41]:

i) Die Formen $\theta^1, \ldots, \theta^n$ bilden eine Basis des Raums der linksinvarianten reellen 1-Formen auf G, die zu $\{E_1, \ldots, E_n\}$ dual ist.

ii) Die Maurer-Cartan Gleichung wird:

$$d\theta^i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} c^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

1.4 Homomorphismen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Definition 1.4.1 *i) Es seien G, G' Lie-Gruppen. Ein* **Homomorphismus von Lie-Gruppen** *ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to G'$, der zugleich differenzierbar ist. Ein* **Isomorphismus von Lie-Gruppen** *ist ein Isomorphismus von Gruppen, der zugleich ein Diffeomorphismus ist.*

ii) Es seien L, L' Lie-Algebren über $\mathbb{K}$. Ein **Homomorphismus von Lie-Algebren** *ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\rho : L \to L'$, die die Lie-Klammern erhält. Ein* **Isomorphismus von Lie-Algebren** *ist ein bijektiver Lie-Algebra-Homomorphismus.*

Proposition 1.4.2 [HN, S. 206], [FH, S. 119] *Es seien G und H Lie-Gruppen und seien $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ die entsprechenden Lie-Algebren.*

i) Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann induziert ϕ einen Homomorphismus von Lie-Algebren $\mathrm{Lie}\,\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, definiert durch:

$$\mathrm{Lie}\,\phi := \phi_{*,e}.$$

Man hat $\phi \circ \exp_G = \exp_H \circ \mathrm{Lie}\phi$.

ii) Nehme an, G sei <u>einfach</u> <u>zusammenhängend</u>. Dann gibt es zu jedem Lie-Algebra-Homomorphismus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ einen eindeutig bestimmten Lie-Gruppen-Homomorphismus $\phi : G \to H$, so dass $\rho = \mathrm{Lie}\,\phi$.

Beispiel Wir betrachten $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$. Dann $\mathrm{Lie}(\det) : \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist von $\mathrm{Lie}\det(A) = \mathrm{Tr}(A)$ gegeben.

1.5 Lie-Untergruppen und Lie-Unteralgebren

Definition 1.5.1 *i) Es sei G eine Lie-Gruppe. Eine* **Lie-Untergruppe** *H* **von** *G ist von einem injektiven Homomorphismus von Lie-Gruppen $\iota : H \to G$ gegeben.*

ii) Es sei G eine Lie-Gruppe. Eine **abstrakte Lie-Untergruppe von** *G ist eine algebraische Untergruppe H von G.*

iii) Es sei L eine Lie-Algebra. Eine **Lie-Unteralgebra** *L'* **von** *L ist von einem injektiven Homomorphismus von Lie-Algebren $F : L' \to L$ gegeben.*

Bemerkung Eine abstrakte Lie-Untergruppe, die Untermannigfaltigkeit ist, wird eine Lie-Gruppe.

Proposition 1.5.2 [BD, S. 28] *Es sei G eine Lie-Gruppe. Eine abstrakte Lie-Untergrupe H von G ist eine Untermannigfaltigkeit von G genau dann wenn H abgeschlossen in G ist.*

Proposition 1.5.3 [BD, S. 35] *Es seien G eine Lie-Gruppe, $N \subset G$ ein Normalteiler, der abgeschlossen in G ist. Dann wird ${}^{G}/_{N}$ auf kanonische Weise eine Lie-Gruppe.*

Bemerkung In [Sch, S. 379] kann man ein Beispiel einer Lie-Untergruppe, die nicht abgeschlossen in G und keine Untermannigfaltigkeit von G ist, finden.

Proposition 1.5.4 [BD] *Es sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen den Lie-Gruppen G, H, der stetig als Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten G und H ist. Dann ist f auch differenzierbar, d.h. ein Lie-Gruppen Homomorphismus.*

Bemerkungen i) Es gibt eine 1:1-Korrespondenz zwischen den zusammenhängenden Lie-Untergruppen von G und den Lie-Unteralgebren ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ [KN, S. 40].

ii) Es sei G eine Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G. Aus Prop. 1.4.2 folgt, dass für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$.

1.6 Weitere Beispiele von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Mit den Resultaten in dem Abschnitt 1.5 (Prop. 1.5.2 und 1.5.3) kann man weitere Beispiele von Lie-Gruppen angeben.

A. Matrixgruppen

Eine **Matrixgruppe** ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Man hat als Beispiele $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$. Die Gruppe $\mathrm{U}(1)$ wird auch S^1 bezeichnet.

B. Quotiente

Man hat die folgenden Beispiele: $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) := {}^{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})}/_{\mathbb{C}^*}$, $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}) := {}^{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})}/_{\mathbb{R}^*}$, $\mathrm{PU}(n) := {}^{\mathrm{U}(n)}/_{S^1}$. Weitere Beispiele sind die **Tori**: für $n \geq 1$ betrachtet man das **n-dimensionale Torus**

$$T_n := {}^{\mathbb{R}^n}/_{\mathbb{Z}^n} \simeq \left({}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}\right)^n \simeq \left(S^1\right)^n .$$

Man hat die folgende Resultate:

Proposition 1.6.1 [BD, S. 25] *Jede <u>zusammenhängende</u> <u>Abelsche</u> Lie-Gruppe G ist isomorph zu einem Produkt von Tori und einem Vektorraum $\mathbb{R}^s$.*

Proposition 1.6.2 [BD, S. 25] *Jede <u>kompakte</u> <u>Abelsche</u> Lie-Gruppe G ist isomorph zum Produkt von Tori und einer endlichen Abelschen Gruppe.*

1.7 Darstellungen von Gruppen und Algebren. Die adjungierte Darstellung

Definition 1.7.1 *Es sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

i) Eine **Darstellung einer Lie-Gruppe** *G in V ist ein Homomorphismus von Lie-Gruppen $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$.*

ii) Eine **Darstellung einer Lie-Algebra** *$\mathfrak{g}$ in V ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}V$.*

Proposition 1.7.2 (Satz von Ado) [HN, S. 172], [FH, S. 500] *Jede endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Lie-Algebra besitzt eine injektive Darstellung.*

Proposition 1.7.3 [Sch, S. 379f], [HN, S. 47]

i) Jede endlich-dimensionale Lie-Algebra ist isomorph zu einer Lie-Unteralgebra von $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, für ein geeignetes n.

ii) Jede endlich-dimensionale Lie-Algebra ist isomorph zur Lie-Algebra einer Lie-Gruppe.

Es sei G eine Lie-Gruppe, $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Für $g \in G$ definiert man **den inneren Automorphismus**

$$\mathrm{Ad}_g : G \to G, \qquad \mathrm{Ad}_g(x) := g \cdot x \cdot g^{-1}.$$

Der induziert $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(G)$. Man erhält eine Abbildung

$$\mathrm{ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{ad}_g := (\mathrm{Ad}_g)_{*,e}.$$

Die adjungierte Darstellung von G ist:

$$\mathrm{ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}); \qquad \mathrm{ad}(g) := \mathrm{ad}_g,$$

und die induziert, gemäss Prop. 1.4.2, **die adjungierte Darstellung von** $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g}), \qquad \mathfrak{ad} := (\mathrm{ad})_{*,e}.$$

Proposition 1.7.4 [Bl, S. 20] *Es sei G eine Lie-Gruppe und es sei $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Dann gilt für alle $A, B \in \mathfrak{g}$:*

$$\mathfrak{ad}(A)(B) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left(\exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA)\right)|_{s,t=0} = [A, B].$$

Proposition 1.7.5 *Es sei G eine <u>Matrixgruppe</u> und es sei $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Dann ist $\mathrm{ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ durch $\mathrm{ad}_g(A) = gAg^{-1}$ gegeben.*

Kapitel 2

Prinzipalbündel und assoziierte Bündel

2.1 Operationen von Lie-Gruppen

Am Anfang dieses Kapitels definiert man den Begriff der Operation einer Lie-Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit.

Definition 2.1.1 *Es seien G eine Lie-Gruppe und Q eine Mannigfaltigkeit.*
i) Eine **Rechtsoperation** *der Lie-Gruppe G auf Q ist eine differenzierbare Zuordnung $Q \times G \to Q$, $(q, g) \mapsto q \cdot g$, so dass für alle q in Q und g,h in G die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$q \cdot (gh) = (q \cdot g) \cdot h,$$

so dass $q \cdot e = q$ für alle $q \in Q$ gilt, und so dass für jedes $g \in G$ die Abbildung $R_g : Q \to Q$, $R_g(q) := q \cdot g$ ein Diffeomorphismus ist.

ii) Eine Operation heisst **effektiv***, wenn aus $q \cdot g = q$ <u>für</u> <u>alle</u> <u>$q \in Q$</u>, die Bedingung $g = e$ folgt.*

iii) Eine Operation heisst **frei***, wenn aus $q \cdot g = q$ <u>für</u> <u>mindestens</u> <u>ein</u> <u>$q \in Q$</u> die Bedingung $g = e$ folgt.*

iv) Eine Operation heisst **transitiv***, wenn es für alle $q_1, q_2 \in Q$ ein $g \in G$ mit $q_1 \cdot g = q_2$ gibt.*

Bemerkungen

i) Jede freie Operation ist effektiv.
ii) Man kann ähnlich den Begriff von Linksoperation definieren.

Es sei G eine Lie-Gruppe, die auf der Mannigfaltigkeit Q operiert. Für $A \in \mathfrak{g}$ sei

$$\gamma^A(t) : \mathbb{R} \to G, \quad \gamma^A(t) := \exp(tA).$$

Es sei nun $q \in Q$ fest und betrachte die Kurve α_q auf Q, definiert durch

$$\alpha_q : \mathbb{R} \to Q, \quad \alpha_q(t) := q \cdot \gamma^A(t).$$

Definiere

$$A_q^* := (\alpha_q)_{*,0}\left(\frac{d}{ds}_{|s=0}\right) = (q\cdot\gamma^A)_{*,0}\left(\frac{d}{ds}_{|s=0}\right).$$

Es kann gezeigt werden, dass für $A \in \mathfrak{g}$ die Zuordnung $q \mapsto A_q^*$ differenzierbar ist. Somit hat man eine Abbildung $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(Q)$, $A \mapsto A^*$ definiert. Die folgende Proposition beschreibt die Eigenschaften dieser Abbildung.

Proposition 2.1.2 [KN, S. 42] *Es sei G eine Lie-Gruppe, die auf der Mannigfaltigkeit Q von rechts operiert.*

i) Die Abbildung σ ist ein Lie-Algebra Homomorphismus.

ii) Wenn G frei auf Q operiert, so ist, für alle A in $\mathfrak{g}$ die nicht null sind, $\sigma(A)$ nirgends verschwindend auf Q.

iii) Wenn G effektiv auf Q operiert, so ist σ ein injektiver Lie-Algebra Homomorphismus.

Wir geben nun zwei Begriffe, die mit einer Operation einer Lie-Gruppe assoziiert sind: **die Bahn** und **die Standgruppe** eines Punktes.

Definition 2.1.3 *Es seien G eine Lie-Gruppe, die auf der Mannigfaltigkeit Q operiert. Wir betrachten q in Q.*

i) **Die Bahn von** *q ist die Teilmenge qG von Q definiert als:*

$$Bahn(q) := \{q \cdot g \mid g \in G\}.$$

ii) **Die Standgruppe von** *q ist die Untergruppe von G definiert durch:*

$$Iso(q) := \{g \in G \mid q \cdot g = q\}.$$

Bemerkungen i) Wenn die Operation von G auf Q transitiv ist, so ist für alle q in Q die Bahn von q gleich Q.

ii) Die Einschränkung der Operation von G auf jeder Bahn liefert eine transitive Operation.

iii) Wenn die Operation von G auf Q frei ist, so ist für alle q in Q die Standgruppe $Iso(q)$ gleich $\{e\}$.

iv) Für q in Q ist die Standgruppe $Iso(q)$ eine Lie-Untergruppe von G.

Für Beispiele und weitere Bemerkungen, siehe [Na, S. 180-183].

2.2 Prinzipalbündel

2.2.1 Definition der Prinzipalbündel

Definition 2.2.1 *Ein* **Prinzipalbündel** *über einer Mannigfaltigkeit M mit Strukturgruppe G ist eine Mannigfaltigkeit P, so dass die folgende Bedingungen erfüllt sind:*

i) es gibt eine freie Rechtsoperation von G auf P, und für alle $g \in G$ ist $R_g : P \to P$ ein Diffeomorphismus, *ii) M ist der Quotientraum von P definiert von der Äquivalenzrelation modulo G, d.h. $M = {}^{P}/_{G}$, und die Projektionabbildung $\pi : P \to M$ ist differenzierbar,*

iii) P ist lokal trivial, d.h. jeder Punkt x von M besitzt eine Umgebung U, so dass es einen Diffeomorphismus

$$\eta : \pi^{-1}(U) \to U \times G, \quad \eta(u) = (\pi(u), \phi(u))$$

gibt, wobei $\phi : \pi^{-1}(U) \to G$ die Eigenschaft

$$\phi(u \cdot g) = (\phi(u))g, \quad \forall\, u \in \pi^{-1}(U),\ g \in G$$

erfüllt.

Als Bezeichnung schreibt man $P(M, G)$. Man nennt P den **Totalraum**, M die **Basismannigfaltigkeit**, G **die Strukturgruppe** und π **die Projektion** des Prinzipalbündels. Für alle $x \in M$ ist die Menge $\pi^{-1}(x)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von P, die **der Faser über** x gennant wird.

Jede Faser ist diffeomorph zu G. Es gibt aber keine kanonische Identifizierung zwischen G und einer gegebenen Faser $\pi^{-1}(x)$, also keine natürliche Gruppenstruktur auf $\pi^{-1}(x)$.

2.2.2 Übergangsfunktionen

Nun wird man ein Prinzipalbündel lokal studieren. Die Übergangsfunktionen werden eingeführt und es wird gezeigt, dass ein Prinzipalbündel zu geben, äquivalent ist, die Übergangsfunktionen zu geben.

Bemerkung 2.2.2 *Aus Def. 2.2.1 folgt, dass es eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ von M existiert, so dass es für jedes α einen Diffeomorphismus gibt:*

$$\eta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G, \qquad \eta_\alpha(u) = (\pi(u), \phi_\alpha(u)),$$

mit $\phi_\alpha(u \cdot g) = (\phi_\alpha(u))g$.

Lemma 2.2.3 *Für $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, $g \in G$ gilt:*

$$\phi_\beta(u \cdot g)(\phi_\alpha(u \cdot g))^{-1} = \phi_\beta(u)(\phi_\alpha(u))^{-1}.$$

Aus dem Lemma folgt, dass $\phi_\beta(u)(\phi_\alpha(u))^{-1}$ nur von $\pi(u)$ abhänght. Somit kann man die folgende Definition geben:

Definition 2.2.4 *Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und es sei $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung von M, wie in Bem. 2.2.2. Für $\alpha, \beta \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definiere die Abbildung*

$$\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G, \qquad \psi_{\beta\alpha}(\pi(u)) := \phi_\beta(u)(\phi_\alpha(u))^{-1}.$$

Die Abbildungen $(\psi_{\beta\alpha})_{\beta,\alpha}$ heissen **die Übergangsfunktionen des Prinzipalbündels** $P(M, G)$ **bezüglich der offenen Überdeckung** $(U_\alpha)_\alpha$.

Die folgende Propositionen zeigen, dass ein Prinzipalbündel zu geben, äquivalent ist, den Übergangsfunktionen zu geben.

Proposition 2.2.5 *Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und es sei $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung von M, wie in Bem. 2.2.2. Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ und für alle $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ gilt:*

$$\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x). \tag{2.1}$$

Proposition 2.2.6 [KN, S. 52] *Es seien G eine Lie-Gruppe, M eine Mannigfaltigkeit und $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung von M. Man setzt voraus, dass für alle α, β mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ eine Abbildung $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ gegeben ist, so dass die Bedingungen von Prop. 2.2.5 erfüllt sind. Dann gibt es ein Prinzipalbündel $P(M, G)$, so dass die Übergangsfunktionen dieses Bündels bezüglich der Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ genau die Funktionen $(\psi_{\beta\alpha})_{\beta,\alpha}$ sind.*

2.2.3 Homomorphismen, Unterbündel, Pull-Back

Definition 2.2.7 *Es seien $P(M, G)$ und $P'(M', G')$ Prinzipalbündel und sei $\varphi : G' \to G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus.*

i) Ein **Homomorphismus vom Typ** *φ von $P'(M', G')$ nach $P(M, G)$ ist eine Abbildung $f : P' \to P$, so dass für alle $u' \in P'$, $g' \in G'$ gilt:*

$$f(u' \cdot g') = f(u') \cdot \varphi(g').$$

ii) Ein Homomorphismus $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ vom Typ φ heisst **eine Einbettung**, *wenn $f : P' \to P$ eine Einbettung ist und $\varphi : G' \to G$ ein injektiver Lie-Gruppen-Homomorphismus ist.*

iii) Es sei $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ eine Einbettung. Man kann P' mit $f(P')$, G' mit $\varphi(G')$, und M' mit $f(M')$ identifizieren. Nach dieser Identifizierung sagt man, dass $P'(M', G')$ **ein Unterbündel von** *$P(M, G)$ ist.*

Bemerkung Ein Homomorphismus $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ bildet die Elementen einer Faser auf derselben Faser ab und somit induziert eine Abbildung, (auch mit f bezeichnet) $f : M' \to M$.

Proposition 2.2.8 [KN, S. 60] *Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und es sei $f : N \to M$ eine differenzierbare Abbildung. Dann gibt es ein eindeutig (bis auf Isomorphie) bestimmtes Prinzipalbündel $Q(N, G)$ und einen Homomorphismus $f : Q \to P$ vom Typ id_G, der $f : N \to M$ induziert.*

Das Bündel, das in Prop. 2.2.8 konstruiert wurde, heisst **induziertes Bündel** (oder **Pull-Back**), es wird mit f^*P bezeichnet.

2.2.4 Reduktion der Strukturgruppe

Definition 2.2.9 *i) Eine Einbettung $f : P'(M, G') \to P(M, G)$, für die die induzierte Abbildung $f : M \to M$ die Identität von M ist, heisst* **eine Reduktion** *der Strukturgruppe G von $P(M, G)$ zu G'. Das Unterbündel $P'(M, G')$ heisst* **ein reduziertes Bündel**.

ii) Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und sei G' eine Lie-Untergruppe von G. Die Strukturgruppe G ist **reduzibel** *zu G', wenn es ein reduziertes Bündel $P'(M, G')$ existiert.*

Bemerkung Im allgemeinen verlängt man nicht, dass die Untergruppe G' abgeschlossen in G ist.

Das folgende Resultat beschreibt die Reduktion der Strukturgruppe in Termen von Übergangsfunktionen.

Proposition 2.2.10 [KN, S. 53] *Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel. Die Strukturgruppe G kann auf einer abgeschlossenen Untergruppe G' reduziert werden, genau dann wenn es eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ von M gibt, mit Übergangsfunktionen $(\psi_{\beta\alpha})_{\beta,\alpha}$ die G'-wertig sind.*

2.2.5 Fundamentalvektorfeld

Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel. Die Operation von G auf P induziert, gemäss Prop. 2.1.2 i), einen Lie-Algebra Homomorphismus $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(P)$. Für A in $\mathfrak{g}$ heisst das Vektorfeld A^* **das Fundamentalvektorfeld** induziert von A. Die Operation von G bildet jede Faser auf sich selbst ab; es folgt, dass für u in P, A^*_u tangent zu der Faser ist.

Die Operation von G ist frei, deshalb ist, für $A \neq 0$, das Vektorfeld A^* niergends verschwienend auf P (Prop. 2.1.2 ii)). Anderseits, ist die Dimension der Faser gleich der Dimension von $\mathfrak{g}$ und somit, für $p \in P$ ist die Abbildung $\mathfrak{g} \to T_pP$, $A \mapsto A^*_p$ ein linearer Isomorphismus.

2.3 Assoziierte Bündel

Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel. Wir nehmen an, dass G auf einer Mannigfaltigkeit F von links operiert. Wir werden ein **assoziiertes Faserbündel** mit Standardfaser F konstruieren.

Wir definieren zunächst eine Operation von G auf $P \times F$, durch

$$(p, f) \cdot g \longmapsto (p \cdot g, g^{-1} \cdot f).$$

Man betrachtet nun eine Äquivalenzrelation $\sim_G$ auf $P \times F$: $(p, f) \sim_G (p', f')$ genau dann wenn es ein $g \in G$ gibt, so dass $(p, f) \cdot g = (p', f')$. Man setzt nun:

$$E := {}^{P \times F}/_{\sim_G}.$$

Dieser Quotient wird manchmal mit $P \times_G F$ bezeichnet und die Äquivalenzklasse von (p, f) wird mit $[p, f]$ bezeichnet. Die kanonische Abbildung

$$P \times F \to M, \qquad (p, f) \mapsto \pi(p)$$

induziert eine Abbildung $\pi_E : E \to M$, $\pi_E([p, f]) := \pi(p)$, die **die Projektion** des assoziierten Bündels E genennt wird. Für $x \in M$ heisst die Menge $\pi_E^{-1}(x)$ **die Faser** von E über x.

Nun wird eine differenzierbare Struktur auf E definiert. Dafür betrachtet man $x \in M$ und U eine Umgebung von x, so dass man einen Isomorphismus

$$\eta = (\pi, \phi) : \pi^{-1}(U) \to U \times G$$

wie in Def. 2.2.1 iii) hat. Dann induziert η eine Bijektion $\eta_E : \pi_E^{-1}(U) \to U \times F$. Wir führen eine differenzierbare Struktur in E ein, so dass $\pi_E^{-1}(U)$ eine offene Untermannigfaltigkeit von E ist, und η_E ein Diffeomorphismus wird. Auf diese Weise wird die Projektion π_E eine differenzierbare Abbildung von E nach M.

Wir nennen $E(M, F, G, P)$ **das Faserbündel** über der **Basis Mannigfaltigkeit** M mit **Standardfaser** F, **Strukturgruppe** G, **das zum Prinzipalbündel** P **assoziiert wird**.

Ein assoziiertes Bündel, dessen Faser ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, heisst **Vektorbündel**.

Die nächste Proposition zeigt, dass jedes Element p des Prinzipalbündels liefert einen Diffeomorphismus von der Standardfaser zu der Faser über $\pi_E^{-1}(\pi(p))$.

Proposition 2.3.1 *Es sei $E(M, F, G, P)$ ein (zu P assoziiertes) Faserbündel. Dann entspricht jedem Element $p \in P$ einen Diffeomorphismus $\alpha_p : F \to \pi_E^{-1}(x)$ (wobei $x = \pi(p)$), so dass gilt: $\alpha_p(g \cdot f) = \alpha_{p \cdot g}(f)$.*

Nun führen wir den Begriff des Automorphismus einer Faser ein und wir geben eine Proposition, die die Gruppe von solchen Automorphismen beschreibt.

Definition 2.3.2 *Es sei $E(M, F, G, P)$ ein (zu P assoziiertes) Faserbündel, es seien $x, y \in M$.*

i) Ein **Isomorphismus von der Faser** $\pi_E^{-1}(x)$ **zu der Faser** $\pi_E^{-1}(y)$ *ist ein Diffeomorphismus der Form $\alpha_r \circ \alpha_p^{-1}$, wobei $r \in \pi^{-1}(y)$, $p \in \pi^{-1}(x)$.*

ii) Ein **Automorphismus der Faser** $\pi_E^{-1}(x)$ *ist ein Isomorphismus von $\pi_E^{-1}(x)$ nach sich selbst.*

Proposition 2.3.3 *Es sei $E(M, F, G, P)$ ein (zu P assoziiertes) Faserbündel, es sei $x \in M$. Dann bilden die Automorphismen der Faser $\pi_E^{-1}(x)$ eine Gruppe, die zu G isomorph ist.*

2.4 Beispiele von Prinzipalbündel und von assoziierten Bündel

1) **Das triviale Bündel** $M \times G$.

2) Man betrachtet eine Lie-Gruppe G und H eine abgeschlossene Untergruppe von G, die kanonisch auf G operiert. Somit erhält man ein **Prinzipalbündel** über der Mannigfaltigkeit ${}^{G}/_{H}$, mit Strukturgruppe H, dessen Totalraum G ist.

3) Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann operiert G auf ${}^{G}/_{H}$ von links und man erhält ein **assoziiertes Faserbündel** $E(M, {}^{G}/_{H}, G, P)$ [KN, S. 57].

4) Es seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel, V ein Vektorraum und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G (d.h. G operiert auf V). Dann kann man ein Vektorbündel, das mit $P \times_\rho V$ bezeichnet wird, konstruieren.

5) Ein spezielles Beispiel ist das **Prinzipalbündel** $L(M)$ von linearen Rahmen einer Mannigfaltigkeit M [KN, S. 55f], dessen Strukturgruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist. Wenn man die kanonische Operation von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^n$ betrachet und das assoziiertes **Vektorbündel** bildet, so erhält man das Tangentenbündel TM. Man kann ähnlich Tensorbündel konstruieren [KN, S. 56].

Bemerkung 2.4.1 [KN, S. 60] Jede Reduktion der Strukturgruppe des Bündels $L(M)$ von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ nach $\mathrm{O}(n)$ liefert eine Riemannsche Metrik auf M. Umgekehrt: gegeben sei eine Riemannsche Metrik g auf M, so kann ein reduziertes Bündel von $L(M)$ mit Strukturgruppe $\mathrm{O}(n)$ konstruiert werden.

2.5 Schnitte

Definition 2.5.1 *Es seien M, M' Mannigfaltigkeiten, $A \subset M$. Eine Abbildung $f : A \to M$ heisst* **differenzierbar** *wenn für alle $x \in A$ eine offene Umgebung U_x von x und eine differenzierbare Abbildung $f_x : U_x \to M'$ existieren, so dass*

$$f_{|_{U_x \cap A}} = f_x{}_{|_{U_x \cap A}}.$$

Definition 2.5.2 *Es sei $E(M, F, G, P)$ ein (zu P assoziiertes) Faserbündel und sei $A \subset M$.*

i) Ein **Schnitt auf** *A ist eine differenzierbare Abbildung $\sigma : A \to E$, so dass $\pi_E \circ \sigma = \mathrm{id}_A$.*

ii) Ein **globaler Schnitt in** *E ist ein Schnitt, der auf der ganzen Mannigfaltigkeit M definiert wird.*

Nun wollen wir, in den nächsten drei Propositionen, die Existenz der globalen Schnitten in drei Fälle beschreiben: für <u>Prinzipalbündel</u>, für ein Bündel der Form <u>$E(M, {}^{G}/_{H}, G, P)$</u> und für <u>Vektorbündel</u>.

Proposition 2.5.3 [KN, S. 57] *Ein Prinzipalbündel $P(M,G)$ besitzt einen globalen Schnitt genau dann wenn es einen Isomorphismus vom Typ* id_G*, der* $\mathrm{id}_M : M \to M$ *induziert, zwischen P und dem trivialen Bündel $M \times G$ gibt.*

Proposition 2.5.4 [KN, S. 57f] *Es sei $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel und sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Die Strukturgruppe von $P(M,G)$ ist reduzibel zu H genau dann wenn das assoziierte Bündel $E(M, {}^{G}/_{H}, G, P)$ einen Globalschnitt besitzt.*

Proposition 2.5.5 [KN, S. 58] *Es sei $E(M,F,G,P)$ ein (zu P assoziiertes) Faserbündel, so dass F zu einem <u>Euklidischen</u> Raum $\mathbb{R}^m$ diffeomorph ist. Es sei $A \subset M$ eine <u>abgeschlossene</u> Teilmenge (A kann auch leer sein). Dann kann jeder Schnitt $\sigma : A \to E$ zu einem globalen Schnitt $\sigma' : M \to E$ fortgesetzt werden.*

Insbesondere, besitzt jedes Vektorbündel einen globalen Schnitt.

Bemerkung Der Quotient ${}^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}/_{\mathrm{O}(n)}$ ist zu einem Euklidischen Raum der Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ diffeomorph [KN, S. 59]. Aus Prop. 2.5.5, Prop. 2.5.4, Bem. 2.4.1 kann man schliessen, dass jede Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik besitzt.

Kapitel 3

Zusammenhänge. Krümmung

3.1 Zusammenhänge in Prinzipalbündel

3.1.1 Definition. Zusammenhangsform. Eich-Potentialen

Bezeichnungen Es seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, G eine Lie-Gruppe und $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel. Für p in P werden wir mit T_pP den Tangentraum von P und mit V_p den Unterraum von T_pP, der aus Tangentialvektoren zu der Faser durch p besteht, bezeichnen.

Definition 3.1.1 *Es sei P(M,G) ein Prinzipalbündel. Ein* **Zusammenhang in** P *ist eine Zuordnung, die zu jedem Punkt p in* P *einen Unterraum* H_p *von* T_pP *assoziiert, so dass gilt:*
i) $T_pP = V_p \oplus H_p$,
ii) $H_{p\cdot g} = (R_g)_{*,p}(H_p)$, *für alle* $p \in P$ *und* $g \in G$,
iii) H_p *hängt differenzierbar von* p *ab.*

Wir nennen V_p **den vertikalen Unterraum** und H_p **den horizontalen Unterraum** des Zusammenhangs. Nach i) kann der Vektor $w \in T_pP$ eindeutig als $w = w_V + w_H$ geschrieben werden. Man nennt w_V (bzw. w_H) **die vertikale** (bzw. **die horizontale**) **Komponente** von w.
Bemerkungen 1) Die Bedingung ii) verlangt, dass die Distribution $p \mapsto H_p$ G-invariant ist und die Bedingung iii) behauptet, dass diese Distribution differenzierbar ist.
2) Es gilt $\pi_{*,p}(H_p) = T_{\pi(p)}M$.
Bezeichnung Wir werden den Raum der Zusammenhänge in P mit $\mathcal{A}(P)$ bezeichnen.

Einem Zusammenhang Γ in P ordnet man eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form auf P zu: ein Element $A \in \mathfrak{g}$ induziert das Fundamentalvektorfeld A^* auf P und die Abbildung $\mathfrak{g} \to V_p$, $A \mapsto (A^*)_p$ ist ein linearer Isomorphismus. Für $w \in T_pP$ definieren wir $\omega_\Gamma(w)$ als das eindeutig bestimmtes Element $A \in \mathfrak{g}$, so dass $(A^*)_p = w_V$. Es gilt:

$$V_p = \{w \in T_pP | \pi_{*,p}(w) = 0\},$$

$$H_p = \{w \in T_pP | \omega_p^\Gamma(w) = 0\}.$$

Definition 3.1.2 *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel und Γ ein Zusammenhang in P. Die* 1*-Form ω_Γ heisst* **die Zusammenhangsform** *von Γ.*

Nun werden wir die Eigenschaften einer Zusammenhangsform studieren. Wir wollen auch zeigen, dass einer gegebenen 1-Form, die diese Eigenschaften erfüllt, ein eindeutig bestimmter Zusammenhang zugeordnet werden kann.

Proposition 3.1.3 (Zusammenhangsform) [KN, S. 64], [Bl, S. 31] *Es sei $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel und es sei Γ ein Zusammenhang in P. Dann erfüllt die Zusammenhangsform ω_Γ die folgende Eigenschaften:*

i) $\omega_{\Gamma,p}(A_p^*) = A$, für alle $A \in \mathfrak{g}$,

ii) $\omega_{\Gamma,p\cdot g}((R_g)_{*,p}X_p) = \mathrm{ad}(g^{-1})\cdot\omega_{\Gamma,p}(X_p)$, für alle $g \in G$ und $X \in \mathcal{X}(P)$. (Man schreibt das kurz: $(R_g)^*\omega_\Gamma = \mathrm{ad}(g^{-1})\omega_\Gamma$.)

Umgekehrt: es sei ω eine $\mathfrak{g}$-wertige 1*-Form auf P, die die Eigenschaften i) und ii) erfüllt. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Zusammenhang Γ mit $\omega = \omega_\Gamma$.*

Bemerkung Wir werden diese Identifizierung stillschweigend verwenden: der Raum der Zusammenhangsformen wird deshalb mit $\mathcal{A}(P)$ identifiziert.

Nun geben wir den Begriff von horizontalen Liftung.

Definition 3.1.4 *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel und $\Gamma \in \mathcal{A}(P)$.* **Die horizontale Liftung eines Vektorfeldes** *$X \in \mathcal{X}(M)$ ist das eindeutig bestimmte horizontale Vektorfeld $X^\sharp \in \mathcal{X}(P)$, so dass für alle $p \in P$ die Gleichheit $\pi_{*,p}(X_p^\sharp) = X_{\pi(p)}$ erfüllt ist.*

Proposition 3.1.5 [KN, S. 65] *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel, $\Gamma \in \mathcal{A}(P)$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte horizontale Liftung $X^\sharp$ von X. Diese Liftung ist für alle $g \in G$ R_g-invariant (d.h. $(R_g)_*(X^\sharp) = X^\sharp$).*

Umgekehrt, ist jedes horizontales Vektofeld, dass für alle g R_g-invariant ist, die horizontale Liftung eines Vektofeldes auf M.

Um die Zusammenhangsform lokal zu beschreiben, werden wir die Zusammenhangsform durch eine Familie von 1-Formen (jede von ihnen definiert auf einer offenen Teilmenge von M) angeben. Dafür sei $(x^1, \ldots, x^n)$ ein Koordinatensystem auf einer Koordinatenumgebung U von M. Man führt die Vektorfelder $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ ein $(i = 1, \ldots, n)$. Es sei $X_i^\sharp$ die horizontale Liftung in $\pi^{-1}(U)$ von X_i. Die Familie $(X_1^\sharp, \ldots, X_n^\sharp)$ ist eine lokale Basis der Distribution $p \mapsto H_p$.

Es seien $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung von M wie in Bem. 2.2.2, $\eta_\alpha = (\pi, \phi_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ die entsprechenden Isomorphismen und seien $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ die Übergangsfunktionen (vgl. Kap. 2).

Für jedes α definiere einen Schnitt auf U_α:

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \to P, \qquad \sigma_\alpha(x) := \eta_\alpha^{-1}(x, e),$$

und führe die $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form ω_α <u>auf</u> $\underline{U_\alpha}$ ein:

$$\omega_\alpha := \sigma_\alpha^* \omega.$$

Proposition 3.1.6 (Eichpotentiale) [KN, S. 66], [Bl, S. 32] *Es seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel, $\Gamma \in \mathcal{A}(P)$. Betrachte $(U_\alpha)_\alpha$, $\psi_{\alpha\beta}$ und ω_α, wie oben. Betrachte α, β mit $\mathrm{U}_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Dann gilt für alle $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $Y_x \in T_x M$:*

$$\omega_\beta(Y_x) = \left(L^{-1}_{\psi_{\alpha\beta}(x)}\right)_{*, \psi_{\alpha\beta}(x)} \left((\psi_{\alpha\beta})_{*,x}(Y_x)\right) + \mathrm{ad}\left(\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}\right)(\omega_\alpha(Y_x)). \tag{3.1}$$

Umgekehrt: gegeben sei eine Familie von $\mathfrak{g}$-wertigen 1-Formen (ω_α) $(\omega_\alpha : U_\alpha \to A^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$, die die Bedingungen (3.1) erfüllt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zusammenhangsform ω auf P, die lokal die Familie $(\omega_\alpha)_\alpha$ liefert.

Bemerkung Es sei G eine Lie-Gruppe von Matrizen. In diesem Fall wird die Bedingung (3.1):

$$\omega_\beta(Y_x) = \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \cdot d\psi_{\alpha\beta}(x)(Y_x) + \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \cdot \omega_\alpha(Y_x) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x).$$

Beispiele [Na, S. 332-335]

3.2 Krümmung der Zusammenhängen

3.2.1 Die graduierte Algebra der $\mathfrak{g}$-wertigen Formen

Um die Krümmung eines Zusammenhangs zu definieren, brauchen wir ein Paar Vorbereitungen, über der graduierten Algebra der $\mathfrak{g}$-wertigen Formen.

Es seien N eine Mannifaltigheit und $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra. Wir haben in Kap. 1 den Raum $A^r(N, \mathfrak{g})$ der $\mathfrak{g}$-wertigen differenzierbaren Formen vom Grad r auf N eingeführt.

Definition 3.2.1 *Es seien N eine Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra.*

i) Es seien $\varphi \in A^i(N, \mathfrak{g})$, $\psi \in A^j(N, \mathfrak{g})$. Man definiert **die Lie-Klammer von $\mathfrak{g}$-wertigen Formen** *$[\varphi, \psi] \in A^{i+j}(N, \mathfrak{g})$ durch:*

$$[\varphi, \psi](X_1, \ldots, X_{i+j}) := \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma \in S_{i+j}} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} [\varphi(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(i)}), \psi(X_{\sigma(i+1)}, \ldots, X_{\sigma(i+j)})].$$

ii) Es seien $A \in \mathfrak{g}$ und $\bar{\varphi} \in A^i(N)$. Man definiert $\bar{\varphi} \otimes A \in A^i(N, \mathfrak{g})$ durch:

$$(\bar{\varphi} \otimes A)(X_1, \ldots, X_i) := \bar{\varphi}(X_1, \ldots, X_i) A.$$

Bemerkungen i) Für $A, B \in \mathfrak{g}$ und $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in A^i(N)$ gilt:

$$[\bar{\varphi} \otimes A, \bar{\psi} \otimes B] = (\bar{\varphi} \wedge \bar{\psi}) \otimes [A, B].$$

ii) Es sei $\{E_1, \ldots, E_s\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, es seien $(c^\gamma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta,\gamma}$ die entsprechende Strukturkonstanten. Dann, für $\varphi \in A^i(N, \mathfrak{g})$, $\psi \in A^j(N, \mathfrak{g})$, gibt es eindeutig bestimmte $\varphi^\alpha \in A^i(N), \psi^\beta \in A^j(N)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, s)$, so dass

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{s} \varphi^\alpha \otimes E_\alpha, \quad \psi = \sum_{\beta=1}^{s} \psi^\beta \otimes E_\beta.$$

Man hat

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} (\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta) \otimes [E_\alpha, E_\beta] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{s} c^\gamma_{\alpha,\beta} (\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta) \otimes E_\gamma.$$

iii) Wenn G eine Lie-Gruppe von Matrizen ist, so gilt, für $\varphi \in A^i(N, \mathfrak{g}), \psi \in A^j(N, \mathfrak{g})$:

$$[\varphi, \psi] = \varphi \wedge \psi - (-1)^{ij} \psi \wedge \varphi.$$

Erklärung: φ (bzw. ψ) sind Matrizen, deren Einträge $\mathbb{R}$-wertige i (bzw. j) Formen sind, und $\varphi \wedge \psi$ wird als Produkt von Matrizen erhalten. Die Einträge sind via wedge multipliziert.

Proposition 3.2.2 [Bl, S. 36] *Es seien N eine Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra. Dann gilt für $\varphi \in A^i(N, \mathfrak{g}), \psi \in A^j(N, \mathfrak{g}), \rho \in A^k(N, \mathfrak{g})$:*

i) $[\psi, \varphi] = -(-1)^{ij}[\varphi, \psi]$,

ii) $(-1)^{ik}[[\varphi, \psi], \rho] + (-1)^{kj}[[\rho, \varphi], \psi] + (-1)^{ji}[[\psi, \rho], \varphi] = 0.$

Definition 3.2.3 *Es seien N eine Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra. Sei $\varphi \in A^i(N, \mathfrak{g})$, $\varphi = \sum_{\alpha=1}^s \varphi^\alpha \otimes E_\alpha$. Man setzt:*

$$d\varphi := \sum_{\alpha=1}^{s} d\varphi^\alpha \otimes E_\alpha \in A^{i+1}(N, \mathfrak{g}).$$

Proposition 3.2.4 [Bl, S. 36] *Es seien N eine Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra. Dann gilt für $\varphi \in A^i(N, \mathfrak{g}), \psi \in A^j(N, \mathfrak{g})$:*

$$d[\varphi, \psi] = [d\varphi, \psi] + (-1)^i [\varphi, d\psi].$$

3.2.2 Krümmung eines Zusammenhangs in einem Prinzipalbündel

Definition 3.2.5 *Es seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und ω eine Zusammenhangsform. Es sei $\varphi \in A^i(P, \mathfrak{g})$.*

i) Definiere $\varphi_H \in A^i(P, \mathfrak{g})$ durch

$$\varphi_H(X_1, \ldots, X_i) := \varphi((X_1)_H, \ldots, (X_i)_H).$$

ii) **Die äussere kovariante Ableitung von** φ *ist:*

$$D^\omega \varphi := (d\varphi)_H \in A^{i+1}(P, \mathfrak{g}).$$

iii) **Die Krümmung des Zusammenhangs** ω *ist:*

$$\Omega^\omega := D^\omega \omega \in A^2(P, \mathfrak{g}).$$

Proposition 3.2.6 [Bl, S. 39] *Es seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und ω eine Zusammenhangsform. Für alle $g \in G$ gilt*

$$R_g^* \Omega^\omega = \mathrm{ad}(g^{-1}) \cdot \Omega^\omega.$$

3.2.3 Die Strukturgleichung

Proposition 3.2.7 (Strukturgleichung) [Bl, S. 37], [KN, S. 77] *Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und sei ω eine Zusammenhangsform. Dann gilt:*

$$\Omega^\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{3.2}$$

Bemerkungen i) Für Lie-Gruppen von Matrizen wird die Strukturgleichung (3.2)

$$\Omega^\omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

ii) Es sei $\{E_1, \ldots, E_s\}$ eine Basis für die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und seien $(c^i_{jk})_{i,j,k}$ die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich dieser Basis. Dann können ω und Ω als

$$\omega = \sum_{i=1}^{s} \omega^i \otimes E_i, \qquad \Omega = \sum_{i=1}^{s} \Omega^i \otimes E_i$$

geschrieben werden.Die Strukturgleichung (3.2) ist äquivalent zu den folgenden Gleichungen:

$$\Omega^i = d\omega^i + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{3.3}$$

3.2.4 Die Bianchi Gleichung (die homogene Feldgleichung)

Proposition 3.2.8 (Identität von Bianchi) [Bl, S. 39], [KN, S. 78] *Es seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und ω eine Zusammenhangsform. Dann gilt:*

$$d\Omega^\omega = [\Omega^\omega, \omega], \tag{3.4}$$

$$D^\omega \Omega^\omega = 0. \tag{3.5}$$

Bemerkung Für Matrixgruppen wird die Gleichung (3.4)

$$d\Omega^\omega = \Omega^\omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega^\omega.$$

3.2.5 Beschreibung mit Eichpotentialen

Wir betrachten ein Prinzipalbündel $P(M,G)$ und eine Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ wie in Bem. 2.2.2. Es seien $(\psi_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ die entsprechende Übergangsfunktionen. Man hat einer Zusammenhangsform ω eine Familie $(\omega_\alpha)_\alpha$ zugeordnet (wobei $\omega_\alpha \in A^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$). Wir setzen:

$$\Omega_\alpha := \sigma_\alpha^* \Omega^\omega.$$

Man erhält die folgenden "lokalen" Versionen der Strukturgleichung und der Bianchi Gleichung:

Proposition 3.2.9 [Bl, S. 39f] *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel, $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung wie in Bem. 2.2.2, ω eine Zusammenhangsform. Dann, für ω_α und Ω_α konstruiert wie oben gilt:*

$$i) \qquad \Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha, \omega_\alpha],$$

$$ii) \qquad d\Omega_\alpha = [\Omega_\alpha, \omega_\alpha].$$

Proposition 3.2.10 [Bl, S. 40] *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel, $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung wie in Bem. 2.2.2, ω eine Zusammenhangsform. Es sei $(\omega_\alpha)_\alpha$ die entsprechnde Familie von Eichpotentialen. Dann, für α, β mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ gilt:*

$$\Omega_\beta(x) = \mathrm{ad}(\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}) \cdot \Omega_\alpha(x). \tag{3.6}$$

Bemerkungen i) Falls G eine Matrixgruppe ist, so wird die Gleichung (3.6)

$$\Omega_\beta(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)^{-1} \Omega_\alpha(x) \psi_{\alpha\beta}(x).$$

ii) **Unterschied zwischen Abelschen und nicht-Abelschen Theorien**

Es sei $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel. Man betrachtet eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ von M, die Eichpotentialen $(\omega_\alpha)_\alpha$ und $\Omega_\alpha \in A^2(U_\alpha, \mathfrak{g})$.

a) Falls G Abelsch ist, erhält man, aus (3.6), dass es eine globale 2-Form $\Omega \in A^2(M, \mathfrak{g})$ auf M gibt mit $\Omega_{|U_\alpha} = \Omega_\alpha$.

In diesem Fall erhält man, aus der Strukturgleichung, dass die Krümmung Ω^ω linear in ω ist.

b) Falls G nicht-Abelsch ist, so ist, i.a., $\Omega_\beta \neq \Omega_\alpha$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$, und man kann nicht mehr eine globale 2-Form auf M einführen.

In diesem Fall ist die Krümmung nicht mehr linear in ω.

iii) **Bedeutung der Krümmung**

Wir haben die kanonische 1-Form $\theta \in A^1(G, \mathfrak{g})$ eingeführt. Es gilt die Maurer-Cartan Gleichung $d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0$. Die Strukturgleichung $\Omega^\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ gibt uns die folgende Bedeutung für die Krümmung: die zeigt "wie weit ist ω von der Eigenschaft, die Maurer-Cartan Gleichung zu erfüllen".

3.2.6 Beispiel (Die Maxwellsche Gleichungen)

Nun werden wir zeigen, dass die erste Maxwellsche Gleichung in (3) eigentlich die Bianchi Gleichung für einen Zusammenhang in einem U(1)-Bündel über dem Minkovskiraum ist. Die zweite Gleichung in (3) wird im Kap. 4 interpretiert.

Wir nehmen als Basismannigfaltigkeit den Raum $M := \mathbb{R}^4$ und als Strukturgruppe $G := \mathrm{U}(1)$. Wir betrachten das (triviale) Bündel $P(M, G)$. Es sei $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung von M, es seien die Eichpotentialen $(\omega_\alpha)_\alpha$ und $\Omega_\alpha \in A^2(U_\alpha, \mathfrak{g})$.

Man führt ein die **Vektorpotentialen** $A_\alpha \in A^1(U_\alpha, \mathbb{R})$, $A_\alpha := i\omega_\alpha$ und sei $F_\alpha \in A^2(U_\alpha, \mathbb{R})$ gegeben durch $F_\alpha := i\Omega_\alpha$. Die Bianchigleichung für Ω_α wird $d\Omega_\alpha = 0$. Anderseits, ist G Abelsch und erhält man eine globale 2-Form $\Omega \in A^2(M, i\mathbb{R})$, und somit eine globale 2-Form $F \in A^2(M, \mathbb{R})$, für die gilt $dF = 0$. Die ist genau die erste Gleichung in (3).

3.3 Zusammenhänge und Abbildungen zwischen Prinzipalbündeln

Proposition 3.3.1 [KN, S. 79f] *Es sei $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ ein Homomorphismus vom Typ φ, so dass die induzierte Abbildung $f : M' \to M$ ein Diffeomorphismus ist. Es seien Γ' ein Zusammenhang in P', ω' die entsprechende Zusammenhangsform und $\Omega^{\omega'}$ ihre Krümmung. Dann:*

i) Es gibt einen eindeutig bestimmten Zusammenhang Γ in P, so dass die horizontalen Unterräume von Γ' werden auf den horizontalen Unterräume von Γ via f abgebildet.

ii) Es seien ω, Ω die entsprechenden Zusammenhangsform bzw. Krümmung. Es gilt:

$$f^*\omega = \varphi_{*,e'}\omega', \qquad f^*\Omega^\omega = \varphi_{*,e'}\Omega^{\omega'}.$$

Bemerkungen i) Man sagt f **bildet der Zusammenhang Γ in dem Zusammenhang Γ' ab**.

ii) Speziell: wenn $P'(M', G')$ ein reduziertes Unterbündel von $P(M, G)$ ist, so dass $f : M \to M$ gleich id_M ist, sagt man **der Zusammenhang Γ sei reduzibel zu dem Zusammenhang Γ' in P'**.

iii) Ein Automorphismus f eines Bündels $P(M, G)$ heisst **ein Automorphismus des Zusammmenhangs** Γ wenn Γ durch f nach Γ abgebildet wird. In diesem Fall sagt man auch, dass Γ **invariant durch f** ist.

Proposition 3.3.2 [KN, S. 81f] *Es sei $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ ein Homomorphismus vom Typ φ, wobei $\varphi : G' \to G$ ein Gruppenisomorphismus ist. Es seien Γ ein Zusammenhang in P, ω die entsprechende Zusammenhangsform und Ω^ω ihre Krümmung. Dann:*

i) Es gibt einen eindeutig bestimmten Zusammenhang Γ' in P', so dass die horizontale Unterräume von Γ' auf den horizontalen Unterräumen von Γ (via f) abgebildet werden.

ii) Falls ω' und $\Omega^{\omega'}$ die entsprechende Zusammenhangsform (bzw. Krümmung) sind, so gilt:

$$f^*\omega = \varphi_{*,e'}\omega', \qquad f^*\Omega^\omega = \varphi_{*,e'}\Omega^{\omega'}.$$

Bemerkungen i) In diesem Fall sagt man, dass Γ' **induziert vom Γ durch** f ist.

ii) Speziell: falls $G' = G$ und $\varphi = \mathrm{id}_G$, so hat man $\omega' = f^*\omega$, $\Omega^{\omega'} = f^*\Omega^\omega$.

iii) Es sei $P(M,G)$ gegeben und sei $f : M' \to M$ differenzierbar. Man kann das Pull-back $(f^*P)(M',G)$ konstruieren. Jeder Zusammenhang Γ in $P(M,G)$ induziert einen Zusammenhang in $(f^*P)(M',G)$.

3.4 Zusammenhänge in assoziierten Bündel. Reduzibilität der Zusammenhänge

Wir haben den Begriff des Zusammmenhangs in einem Prinzipalbündel definiert. Nun werden wir assoziierte Bündel betrachten und einen entsprechenden Begriff einführen.

Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel, Γ ein Zusammenhang in P und $E(M,F,G,P)$ ein assoziiertes Bündel mit Standardfaser F. Es sei $w \in E$ fest und nehme $(p,f) \in P \times F$ mit $w = [p,f]$ (vgl. Kap. 2.3). Wir betrachten nun die Abbildung

$$\alpha : P \to E, \qquad \alpha(q) := [q,f].$$

Definiere:
-der vertikale Unterraum V_w ist der Tangentraum zu dem Faser von E in w.
-der horizontale Unterraum H_w in w ist $H_w := \alpha_{*,p}(H_p)$ (wohldefiniert!).

Bemerkungen i) Die Definition des horizontalen Unterraums H_w ist unabhängig von der Wahl des Punktes (p,f) mit $[p,f] = w$.

ii) Es gilt: $T_wE = V_w \oplus H_w$.

Definition 3.4.1 *Es sei $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel und sei E ein assoziiertes Bündel. Ein Schnitt σ, definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$, heisst* **parallel bezüglich** Γ*, wenn für alle $x \in U$ gilt $\sigma_{*,x}(T_xM) \subset H_{\sigma(x)}$.*

Die folgende Proposition zeigt eine Beziehung zwischen dem Parallelismus eines Schnittes bezüglich eines Zusammenhangs und die Reduzibilität des Zusammenhangs. Es sei dazu erinnert, dass die Existenz eines globalen Schnittes in dem Bündel $E(M, {}^G/_H, G, P)$ (wobei H eine abgeschlossene Untergruppe von G ist) mit der Reduktibilität der Strukturgruppe von $P(M,G)$ zu H äquivalent ist (Prop. 2.5.4).

Proposition 3.4.2 [KN, S. 88f] *Es sei $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel und es sei H eine abgeschlossene Untergrupe von G. Man betrachtet das assoziierte Bündel $E(M, {}^G/_H, G, P)$. Es sei $\sigma : M \to E$ ein globaler Schnitt und sei*

$Q(M,H)$ das entsprechende reduzierte Unterbündel. Ein Zusammanhang Γ in P ist zu einem Zusammenhang Γ' in Q reduzierbar, genau dann wenn σ parallel bezüglich Γ ist.

Man kann die Reduzibilität der Zusammenhänge auch in Termen der Zusammenhangsform beschreiben:

Proposition 3.4.3 *Es sei $Q(M,H)$ ein Unterbündel des Prinzipalbündels $P(M,G)$. Der Zusammenhang $\Gamma \in \mathcal{A}(P)$, definiert von der Zusammenhangsform $\omega \in A^1(P,\mathfrak{g})$ ist zu einem Zusammenhang in Q reduzierbar, genau dann wenn $\omega_{|Q} \in A^1(Q,\mathfrak{h})$.*

3.5 Konstruktionen und Bezeichnungen

Wir betrachten nun ein Prinzipalbündel $P(M,G)$ und sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}(F)$ eine Operation von G auf einer Mannigfaltigkeit F. Wir definieren:

$$C(P;F,\rho) := \Big\{\tau : P \to F \text{ differenzierbar mit } \tau(p\cdot g) = \rho(g^{-1})(\tau(p))\Big\}.$$

Bemerkung Es sei $P \times_\rho F$ das zu P assoziiertes Bündel mit Standardfaser F. Dann hat man eine kanonische Identifizierung zwischen $C(P;F,\rho)$ und dem Raum der Schnitte in $P \times_\rho F$, die gegeben durch:

$$\Phi : C(P;F,\rho) \to \Gamma(P\times_\rho F), \quad \Phi(\tau)(x) := [p,\tau(p)] \text{ mit } p \in \pi^{-1}(x)$$

ist.

Speziell 1) Man betrachtet $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(G)$, und erhält das Bündel $P\times_{\mathrm{Ad}} G$, das mit $\mathrm{Ad}P$ bezeichnet wird. Somit gilt $\Gamma(\mathrm{Ad}P) = C(P;G,\mathrm{Ad})$.

2) Man betrachtet $\mathrm{ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, und erhält das Bündel $P\times_{\mathrm{ad}}\mathfrak{g}$, das mit $\mathrm{ad}P$ bezeichnet wird. Somit gilt $\Gamma(\mathrm{ad}P) = C(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$.

3) Wenn F ein Vektorraum ist, so nennen die Physiker die Elementen des Raumes $C(P;F,\rho)$ **"Teilchen Felder" ("Particle fields")**.

Definition 3.5.1 *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Definiere einen Unterraum von $A^k(P,V)$, der mit $\tilde{A}^k(P;V,\rho)$ bezeichnet wird, als der Raum der V-wertige k-Formen φ auf P, für die gilt:*

i) $R_g^*\varphi = \rho(g^{-1})\cdot\varphi$, d.h. für alle $X_1,\dots,X_k \in T_pP$ hat man

$$\varphi((R_g)_{*,p}(X_1),\dots,(R_g)_{*,p}(X_k)) = \rho(g^{-1})\cdot\varphi(X_1,\dots,X_k),$$

ii) falls ein Vektor von $X_1,\dots,X_k$ vertikal ist, so gilt $\varphi(X_1,\dots,X_k) = 0$.

Bemerkungen i) Es gilt: $\tilde{A}^0(P;V,\rho) = C(P;V,\rho)$.

ii) Es sei ω eine 1-Zusammenhangsform auf P. Dann $\omega \notin \tilde{A}^1(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$ (obwohl $\omega \in A^1(P,\mathfrak{g})$ und ω erfüllt i) in Def. 3.5.1), aber $\Omega^\omega \in \tilde{A}^2(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$.

Nun führen wir den Begriff der kovarianten Ableitung ein:

Definition 3.5.2 *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G. Für $\omega \in \mathcal{A}(P)$ definiert man*

$$D^\omega : \tilde{A}^k(P;V,\rho) \to \tilde{A}^{k+1}(P;V,\rho), \quad D^\omega\psi := (d\psi)_H.$$

Bemerkungen i) [Bl, S. 44f] Die Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ induziert die Abbildung $\rho_{*,e} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$: für $A \in \mathfrak{g}, v \in V$ hat man

$$\rho_{*,e}(A)(v) = \frac{d}{dt}\rho\exp(tA)(v)_{|t=0}.$$

Wir schreiben $A \cdot v$ statt $\rho_{*,e}(A)(v)$. Für $\psi \in \tilde{A}^0(P;V,\rho)$ hat man:

$$D^\omega\psi = d\psi + \omega\cdot\psi \quad (\text{d.h. } (D^\omega\psi)(X) = d\psi(X) + \omega(X)\cdot\psi(X)).$$

ii) Speziell: für $\mathrm{ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ gilt $D^\omega\psi = d\psi + [\omega,\psi]$, $\forall\,\psi \in \tilde{A}^0(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$.

3.6 Der Raum der Zusammenhänge

Es sei $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel. Der Raum der Zusammenhige in P ist $\mathcal{A}(P)$. Wir identifizieren stillschweigen einen Zusammenhang mit der entsprechenden Zusammenhangsform.

3.6.1 Existenz und Fortsetzung der Zusammenhängen

Definition 3.6.1 *Wir betrachten ein Prinzipalbündel $P(M,G)$ und eine Teilmenge A von M (A kann auch leer sein). Ein Zusammenhang ist über A definiert, wenn für alle Punkte $p \in P$ mit $\pi(p) \in A$ ein Unterraum $H_p \subset T_pP$ gegeben ist, so dass:*

i) die Bedingungen i) und ii) der Definition eines Zusammenhangs erfüllt sind,

iii) die Abbildung $p \mapsto H_p$ ist differenzierbar, d.h. für alle $x \in A$ gibt es eine offene Umgebung U von x und einen Zusammenhang in $P_{|U} = \pi^{-1}(U)$, so dass der horizontale Unterraum in jedem Punkt $p \in \pi^{-1}(A \cap U)$ der gegebene Raum H_p ist.

Proposition 3.6.2 [KN, S. 67f] *Es sei $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel und es sei A eine abgeschlossene Teilmenge von M. Dann kann jeder Zusammenhang der auf A definiert ist, zu einem Zusammenhang in P fortgesetzt werden.*

Korollar 3.6.3 *Jedes Prinzipalbündel besitzt einen Zusammenhang.*

3.6.2 Beschreibung der Raum der Zusammenhänge

Nun werden wir zeigen, dass der Raum $\mathcal{A}(P)$ ein affiner Raum ist (vgl. [AB]).

Bezeichnung Für den Vektorraum der Schnitte in $\Lambda^1 M \otimes \mathrm{ad}P$ werden wir die folgende Bezeichnung verwenden $A^1(M, \mathrm{ad}P) := \Gamma(\Lambda^1 M \otimes \mathrm{ad}P)$.

Proposition 3.6.4 *Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel.*

i) Es gibt einen linearen Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $\tilde{A}^1(P; \mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ und $A^1(M, \mathrm{ad}P)$.

ii) Es gibt eine Operation von $\tilde{A}^1(P; \mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ auf $\mathcal{A}(P)$, gegeben durch

$$\tilde{A}^1(P; \mathfrak{g}, \mathrm{ad}) \times \mathcal{A}(P) \to \mathcal{A}(P), \quad (\tau, \omega) \mapsto \tau + \omega.$$

Somit wird $\mathcal{A}(P)$ ein affiner Raum über $\tilde{A}^1(P; \mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ und, wegen i), ist $\mathcal{A}(P)$ auch ein affiner Raum über $A^1(M, \mathrm{ad}P)$.

Kapitel 4

Eich-Theorie

4.1 Die Gruppe von Eichtransformationen. Die Eichalgebra. Die "Exponentialabbildung"

4.1.1 Die Gruppe von Eichtransformationen

Definition 4.1.1 *Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel. Eine* **Eichtransformation** *ist ein Automorphismus vom Typ id_G, der die Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ induziert.*

Bemerkungen i) Die Eichtransformationen bilden eine Gruppe, die mit $GA(P)$ bezeichnet wird.
ii) Für $f \in GA(P)$ gilt: $f \circ R_g = R_g \circ f$.

Proposition 4.1.2 [Bl, S. 46] *Es sei $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus*

$$\Phi : \mathcal{C}(P; G, \mathrm{Ad}) \to GA(P), \qquad \Phi(\tau)(p) := p \cdot \tau(p).$$

Bemerkungen i) Die Abbildungen $R_g : P \to P$ sind, i.a., keine Eichtransformationen, denn: $R_g(p \cdot g') = p \cdot (g'g)$, $(R_g(p)) \cdot g' = p \cdot (gg')$. Eigentlich ist R_g eine Eichtransformation genau dann wenn g im $Zen(G)$ liegt.
ii) Man betrachtet <u>das</u> <u>triviale</u> <u>Bündel</u> $P := M \times G$. Dann ist für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$L_g : M \times G \to M \times G, \quad L_g(x, g') := (x, gg')$$

eine Eichtransformation.

Die Physiker nennen solche Eichtransformationen **global**, denn sie hängen nicht von $x \in M$ ab. Man betrachtet auch **lokale** Eichtransformationen, der Form $(x, g') \mapsto (x, h(x)g')$, wobei $h : M \to G$.

Solche Eichtransformationen haben Sinn für Produktbündel. Im allgemeinen gibt es keine natürliche links-Operation von G auf P, die mit R_g kommutiert.

iii) Man kann solche Eichtransformationen (wie bei ii)) über lokalen Trivialisierungen betrachten. Es gibt Eichtransformationen, die <u>global</u> bezüglich einer Trivialisierung und <u>lokal</u> bezüglich einer anderen Trivialisierung sind.

In den folgenden Propositionen werden wir zeigen, dass die Gruppe der Eichtransformationen auf dem Raum der Zusammenhangsformen und auf den Räumen $\tilde{A}^k(P;V,\rho)$ operiert und wir werden diese Operationen beschreiben.

Proposition 4.1.3 [Bl, S. 47ff] *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel, $\omega \in \mathcal{A}(P)$ und $f \in GA(P)$. Wir bezeichnen $\tau := \Phi(f)$ (vgl. Prop 4.1.2). Dann:*

i) $f^*\omega \in \mathcal{A}(P)$,

ii) $(f^*\omega)_p = (L^{-1}_{\tau(p)})_{*,p\cdot\tau(p)} \circ \tau_{*,p} + \mathrm{ad}(\tau(p)^{-1}) \cdot \omega_p$.

Proposition 4.1.4 *Es seien $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von V. Es sei $f \in GA(P)$ und $\tau := \Phi(f)$ (vgl. Prop. 4.1.2).*

i) Man erhält Isomorphismen

$$f^* : \tilde{A}^k(P;V.\rho) \to \tilde{A}^k(P;V,\rho), \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

ii) Es gilt $(f^*\phi)(p) = \rho(\tau(p)^{-1}) \cdot \phi(p)$.

4.1.2 Die Eichalgebra

Für $H, H^{'} \in \mathcal{C}(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$ definiert man

$$[H,H^{'}] : P \to \mathfrak{g}, \quad [H,H^{'}](p) := [H(p),H^{'}(p)].$$

Es kann gezeigt werden, dass $[H,H^{'}] \in \mathcal{C}(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$ [Bl, S. 48]. Somit folgt, dass $\mathcal{C}(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$ hat die Struktur einer Lie-Algebra, die **die Eichalgebra** heisst.

4.1.3 Die "Exponentialabbildung"

Proposition 4.1.5 *Es sei $P(M,G)$ ein Prinzipalbündel. Es gibt eine Abbildung*

$$\mathrm{Exp} : C(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad}) \to C(P;G,\mathrm{Ad}) \text{ gegeben durch } \mathrm{Exp}(H)(p) := \exp(H(p)),$$

so dass

$$\mathrm{Exp}((t+s)H) = \mathrm{Exp}(tH)\mathrm{Exp}(sH), \quad \forall t,s \in \mathbb{R},\ H \in C(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad});$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Exp}(tH)(p)\right)_{|t=0} = H(p), \quad \forall H \in C(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad}),\ p \in P.$$

4.1.4 Infinitesimale Operation

Proposition 4.1.6 [Bl, S. 50] *Es seien* $P(M,G)$, $H \in C(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$.

i) Es sei $\omega \in \mathcal{A}(P)$. *Dann:*

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Expt}H)^*\omega_{|t=0} = dH + [\omega, H] = D^\omega H.$$

ii)

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{Expt}h)^*\varphi_{|t=0} = -H \cdot \varphi.$$

4.2 Lagrangians und Eichinvarianz

Zunächst geben wir die Definition des Raumes von 1-Jets:

Definition 4.2.1 *Es seien* $P(M,G)$ *ein Prinzipalbündel,* V *ein Vektorraum.* **Der Raum von 1-Jets von Abbildungen von P nach V** *ist:*

$$J(P,V) := \{(p,v,\theta) | p \in P,\ v \in V,\ \theta : T_pP \to V \text{ ist linear}\}.$$

Nun werden wir die Begriffe von Lagrangian und von G-invariantem Lagrangian einführen.

Definition 4.2.2 *Es seien* $P(M,G)$ *ein Prinzipalbündel und* $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *eine Darstellung von* G.

i) Ein **Lagrangian** *ist eine Abbildung* $L : J(P,V) \to \mathbb{R}$, *so dass* $\forall g \in G$, $\forall (p,v,\theta) \in J(P,V)$ *gilt:*

$$L(pg, \rho(g^{-1} \cdot v, \rho(g^{-1}) \cdot (\theta \circ (R_{g^{-1}})_{*,p\cdot g}) = L(p,v,\theta).$$

ii) Ein Lagrangian $L : J(P,V) \to \mathbb{R}$ *heisst* **G-invariant**, *falls* $\forall g \in G$, $\forall (p,v,\theta) \in J(P,V)$ *gilt:*

$$L(p, \rho(g) \cdot v, \rho(g) \cdot \theta) = L(p,v,\theta).$$

Bemerkungen [Bl, S. 51 f] i) Betrachte ein Lagrangian $L : J(P,V) \to \mathbb{R}$. Dann gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathcal{L}_0 : \mathcal{C}(P;V,\rho) \to \mathcal{C}^\infty(M),$$

gegeben durch

$$\mathcal{L}_0(\psi)(x) = L(p, \psi(p), d\psi_p),$$

wobei $x \in M$, $p \in \pi^{-1}(x)$. ("Wohldefiniert" bedeutet Unabhängigkeit von der Wahl von p in $\pi^{-1}(x)$.)

ii) Betrachte ein <u>G-invariantes</u> Lagrangian $L : J(P,V) \to \mathbb{R}$. Dann gilt es nicht unbedingt, dass $\mathcal{L}_0$ eichinvariant ist, d.h. es gilt nicht unbedingt, dass

$$\mathcal{L}_0(f^*\psi) = \mathcal{L}_0(\psi), \quad \forall f \in GA(P),\ \forall \psi \in \mathcal{C}(P;V,\rho).$$

Das Problem, dass ein solches $\mathcal{L}_0$ nicht eichinvariant ist, wird mittels kovarianter Ableitung gelöst. Man erhält die folgende Proposition:

Proposition 4.2.3 [Bl, S. 52f] *Es seien $P(M, G)$ ein Prinzipalbündel und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von ρ.*

i) Man betrachtet ein Lagrangian $L : J(P, V) \to \mathbb{R}$. Dann gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}(P; V, \rho) \times \mathcal{A}(P) \to \mathcal{C}^\infty(M),$$

gegeben durch

$$\mathcal{L}(\psi, \omega)(x) = L(p, \psi(p), D^\omega \psi_p),$$

wobei $x \in M$, $p \in \pi^{-1}(x)$.

ii) Man betrachtet ein <u>G-invariantes</u> Lagrangian $L : J(P, V) \to \mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{L}$ eichinvariant, d.h. es gilt:

$$\mathcal{L}(f^*\psi, f^*\omega) = \mathcal{L}(\psi, \omega), \quad \forall f \in GA(P),\ \forall (\psi, \omega) \in \mathcal{C}(P; V, \rho) \times \mathcal{A}(P).$$

Man nennt $\mathcal{L}(\psi, \omega) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die **Lagrangedichte des Paars** (ψ, ω). Für $\omega \in \mathcal{A}(P)$ fest betrachten wir

$$\mathcal{L} : C(P; V, \rho) \to \mathcal{C}^\infty(M), \qquad \mathcal{L}^\omega(\psi) := \mathcal{L}(\psi, \omega).$$

4.3 Lagrangegleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Prinzipalbündel $P(M, G)$. Wir nehmen an M sei orientiert und wir betrachten eine Metrik h auf M. Somit erhalten wir eine Volumenform vol_h auf M. Wir bezeichnen mit $(-1)^\varepsilon$ das Vorzeichen der Determinante der Matrix $(h(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}))_{i,j}$.

Wir werden auch eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ betrachten, und wir nehmen an, dass es eine Metrik $\hat{h}$ auf V gegeben ist, so dass die Darstellung ρ $\hat{h}$-orthogonal ist (in den Beispielen aus der Physik ist diese Voraussetzung i.a. erfüllt). Eine solche Metrik gibt es immer, wenn G kompakt ist [Bl, S. 57].

Wir betrachten ein Lagrangian $L : J(P, V) \to \mathbb{R}$.

Bezeichnungen i) Für $U \subset M$ schreiben wir $U \subset\subset M$ falls U offen ist und ihr Abschluss $\bar{U}$ kompakt ist.

ii) Für $\psi \in C(P; V, \rho)$ definieren wir den **Support von** ψ:

$$\mathrm{supp}(\psi) := \overline{\{\pi(p) \in M | \psi(p) \neq 0\}}.$$

4.3.1 Lagrangewirkung. Prinzip der minimalen Wirkung

Definition 4.3.1 *Es sei $U \subset\subset M$.* **Die Wirkung von** $\psi \in C(P; V, \rho)$ **über** U *ist:*

$$\bar{\mathcal{L}}^\omega_U := \int_U \mathcal{L}^\omega(\psi) \mathrm{vol}_h.$$

Definition 4.3.2 *Ein Element* $\psi \in C(P;V,\rho)$ *heisst* **stationär** *falls für alle* $U \subset\subset M$ *und für alle* $\sigma \in C(P;V,\rho)$ *mit* $\operatorname{supp}(\sigma) \subset U$ *gilt:*

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathcal{L}}^{\omega}_{U}(\psi + t\sigma)_{|t=0} = 0.$$

Man sagt auch, dass ψ **das Prinzip der minimalen Wirkung erfüllt**.

Das Ziel dieser Sektion ist zu zeigen, dass ψ genau dann stationär ist, wenn ψ eine gewisse Gleichung mit partiellen Ableitungen erfüllt. Die ist die Lagrangegleichung.

4.3.2 Konstruktionen und Bezeichnungen

Um diese Lagrangegleichung zu bescreiben sollen wir die kovariante Kodifferential einführen.

Die Metrik h_x bzw. die Orientierung auf T_xM induziert eine Metrik $\bar{h}_p$ bzw. eine Orientierung auf dem horizontalen Unterraum $H_p \subset T_pP$ (wobei $p \in \pi^{-1}(x)$), sodass $\pi_{*,p} : H_p \to T_xM$ eine orientierungserhaltende Isometrie wird. Somit erhält man eine Volumenform $\mathrm{vol}_{\bar{h}_p}$. Man hat einen Hodge-Operator $\tilde{*}_p : \Lambda^k(H_p) \to \Lambda^{n-k}(H_p)$, so dass $\tilde{*}_p(\pi^*\tau) = \pi^*(*_x\tau)$, für alle $\tau \in \Lambda^k(T_xM)$. Dann definiert man

$$\tilde{*} : \tilde{A}^k(P;V,\rho) \to \tilde{A}^{n-k}(P;V,\rho), \quad \varphi \mapsto (\tilde{*}_p\varphi)_p$$

als die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $\tilde{*}_p(\varphi_{|H_p})$ zu einer V-wertigen $(n-k)$-Form auf T_pP, die auf vertikalen Vektoren verschwindet.

Nun kann man eine Metrik $(\bar{h}_p\hat{h})$ auf dem Raum $A^k(H_p,V)$ definieren. Dann setze für $\alpha, \beta \in \tilde{A}^k(P;V,\rho)$:

$$(\bar{h}\hat{h})_p(\alpha_p,\beta_p) := (\bar{h}_p\hat{h})\left(\alpha_{p|_{H_p}}, \beta_{p|_{H_p}}\right).$$

Man beweist [Bl, S. 57], dass eine wohldefinierte Funktion

$$(\bar{h}\hat{h}) : \tilde{A}^k(P;V,\rho) \times \tilde{A}^k(P;V,\rho) \to \mathcal{C}^{\infty}(M)$$

existiert, sodass $(\bar{h}\hat{h})(\alpha,\beta)(x) = (\bar{h}\hat{h})_p(\alpha_p,\beta_p)$ gilt (d.h. unabhängig von der Wahl von $p \in \pi^{-1}(x)$).

Definition 4.3.3 *Es seien* $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$ *wie oben. Betrachte* $\omega \in \mathcal{A}(P)$ *fest.* **Das kovariante Kodifferential** *ist definiert als:*

$$\delta^{\omega} : \tilde{A}^k(P;V,\rho) \to \tilde{A}^{k-1}(P;V,\rho), \quad \delta^{\omega}(\varphi) := -(-1)^{\varepsilon}(-1)^{n(k+1)}\tilde{*}D^{\omega}(\tilde{*}\varphi).$$

Proposition 4.3.4 [Bl, S. 58] *Es seien* $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$. *Betrachte* $\omega \in \mathcal{A}(P)$ *fest. Es sei* $U \subset\subset M$ *und es seien* $\alpha \in \tilde{A}^k(P;V,\rho)$, $\beta \in \tilde{A}^{k+1}(P;V,\rho)$. *Man nimmt an, dass* $\operatorname{supp}(\alpha) \subset U$. *Dann gilt:*

$$\int_U (\bar{h}\hat{h})(D^{\omega}\alpha,\beta)\mathrm{vol}_h = \int_U (\bar{h}\hat{h})(\alpha,\delta^{\omega}\beta)\mathrm{vol}_h.$$

Wir werden mit $\tilde{\Lambda}^1(P,V)_p$ den Raum der linearen Abbildungen $T_pP \to V$, die auf vertikalen Vektoren verschwinden, bezeichnen.

Definition 4.3.5 *Es seien $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, L.*

i) Für $(p,v,\theta) \in J(P,V)$ wird $\nabla_2 L(p,v,\theta) \in V$ durch die folgende Gleichung definiert:

$$\hat{h}_p(\nabla_2 L(p,v,\theta), w)) = \frac{d}{dt} L(p, v+tw, \theta)_{|t=0}.$$

ii) Für $\psi \in C(P;V,\rho)$ definiert man

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} \in A^0(P;V), \qquad \frac{\partial L}{\partial \psi}(p) := \nabla_2 L(p, \psi(p), D^\omega \psi_p).$$

iii) Für $(p,v,\theta) \in J(P,V)$ wird $\nabla_3 L(p,v,\theta) \in \tilde{\Lambda}^1(P,V)_p$ durch die folgende Gleichung definiert:

$$(\bar{h}\hat{h})_p(\nabla_3 L(p,v,\theta), \beta)) = \frac{d}{dt} L(p,v,\theta + t\beta)_{|t=0}.$$

iv) Für $\psi \in C(P;V,\rho)$ definiert man

$$\frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)} \in A^1(P;V), \qquad \frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)}(p) := \nabla_3 L(p, \psi(p), D^\omega \psi_p).$$

Proposition 4.3.6 [Bl, S. 60f] *Es seien $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, L. Man betrachtet $\omega \in \mathcal{A}(P)$ fest. Es gilt:*

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} \in \tilde{A}^0(P;V,\rho),$$

$$\frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)} \in \tilde{A}^1(P;V,\rho).$$

4.3.3 Lagrangegleichung

Proposition 4.3.7 [Bl, S. 61] *Wir betrachten $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, L wie oben. Es sei $(\omega,\psi) \in \mathcal{A}(P) \times C(P;V,\rho)$. Es seien $U \subset\subset M$ und $\tau \in C(P,V;\rho)$, so dass $\operatorname{supp}(\tau) \subset U$. Dann gilt:*

$$\left(\frac{d}{dt} \int_U \mathcal{L}^\omega(\psi + t\tau) \mathrm{vol}_h \right)_{|t=0} = \int_U \left(\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi}, \tau \right) \mathrm{vol}_h.$$

Proposition 4.3.8 (Lagrangegleichung) [Bl, S. 61] *Wir betrachten $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, L wie oben. Es sei $\omega \in \mathcal{A}(P)$ fest. Ein Element $\psi \in C(P;V,\rho)$ ist genau dann stationär bezüglich $\mathcal{L}^\omega$ wenn die Lagrangegleichung*

$$\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial (D^\omega \psi)} + \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

erfüllt ist.

4.4 Die nicht-homogene Feldgleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Prinzipalbündel $P(M,G)$, so dass die Mannigfaltigkeit M orientiert ist, und so dass eine Metrik h auf M gegeben ist. Auf dieser Weise erhalten wir eine Volumenform vol_h auf M. Wir bezeichnen mit $(-1)^\varepsilon$ das Vorzeichen der Determinante der Matrix $(h(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}))_{i,j}$.

Es seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G und $\hat{h}$ eine Metrik auf V, so dass ρ $\hat{h}$-orthogonal ist.

Es seien k eine Metrik auf $\mathfrak{g}$, so dass $\mathrm{ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ k-orthogonal ist; $(e_\alpha)_\alpha$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Man setzt $k_{\alpha\beta} := k(e_\alpha, e_\beta)$ und somit erhält die Matrix $(k_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$, ihr Inverses wird mit $(k^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ bezeichnet.

Wir betrachten ein Lagrangian $L : J(P,V) \to \mathbb{R}$.

4.4.1 Der Strom

Es existiert eine (wohldefinierte) Abbildung $(\bar{h}k) : \tilde{A}^j(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad}) \times \tilde{A}^j(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad}) \to C^\infty(M)$.

Definition 4.4.1 *Es seien $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, k L wie oben.*
Es seien $\omega \in \mathcal{A}(P)$, $\psi \in C(P;V,\rho)$, $p \in P$. **Der Strom** *$J \in A^1(P,\mathfrak{g})$ wird in p definiert, so dass für alle $\tau \in \tilde{A}^1(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})_p$ die folgende Gleichung erfüllt ist:*

$$(\bar{h}\hat{h})_p \left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega \psi)}(p), \rho(\tau)\psi(p) \right) = (\bar{h}k)_p(J(p), \tau).$$

Man beweist [Bl, S. 66], dass J_p wohldefiniert und eindeutig bestimmt ist; es gilt $J \in \tilde{A}^1(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$.

Proposition 4.4.2 *Es seien $P(M,G)$, h, ρ, $\hat{h}$, k. Wir betrachten $(\psi,\omega) \in C(P;V,\rho) \times \mathcal{A}(P)$. Dann gilt für alle $\tau \in \tilde{A}^1(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$:*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\psi, \omega + t\tau)_{|t=0} = (\bar{h}k)(J^\omega(\psi), \tau).$$

.

Satz 4.4.3 (Konservierung der Ladung) [Bl, S. 67] *Es seien $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, k (und $(k_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$).*
Es sei $L : J(P,V) \to \mathbb{R}$ ein G-invariantes Lagrangian und sei $\omega \in \mathcal{A}(P)$ fest.

i) Betrachte $\psi \in C(P;V,\rho)$. Dann:

$$\delta^\omega(J^\omega(\psi)) = k^{\alpha\beta}\hat{h} \left(\delta^\omega \left[\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} \right] + \frac{\partial L}{\partial \psi}, \rho(e_\alpha) \cdot \psi \right) e_\beta.$$

ii) Betrachte $\psi \in C(P;V,\rho)$ <u>stationär</u> bezüglich L. Dann erhält man die **verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung***:*

$$\delta^\omega(J^\omega(\psi)) = 0.$$

4.4.2 Die nicht-homogene Feldgleichung

Definition 4.4.4 *Es seien $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, k, L.*

i) Man definiert **die Eigenwirkungsdichte (self-action density)**

$$\mathcal{D} : \mathcal{A}(P) \to C^\infty(M), \quad \mathcal{D}(\omega) := -\frac{1}{2}(\bar{h}k)(\Omega^\omega, \Omega^\omega).$$

ii) Man definiert **die kombinierte Wirkungsdichte (combined action density)** $(\mathcal{L}+\mathcal{D})(\psi,\omega)$.

Definition 4.4.5 *Es seien $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, k, L. Das Paar $(\psi,\omega) \in C(P;V,\rho) \times \mathcal{A}(P)$ ist* **stationär** *bezüglich $\mathcal{L}+\mathcal{D}$ falls für alle $U \subset\subset M$, für alle $\sigma \in C(P;V,\rho)$, $\tau \in \tilde{A}^1(P;\mathfrak{g},\mathrm{ad})$ mit $\mathrm{supp}(\tau) \subset U$ gilt:*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_U (\mathcal{L}+\mathcal{D})(\psi+t\sigma, \omega+t\tau)\mathrm{vol}_h\right)_{|t=0} = 0.$$

Satz 4.4.6 [Bl, S. 68] *Es seien $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, k, L. Das Paar (ψ,ω) ist stationär bezüglich $(\mathcal{L}+\mathcal{D})$ genau dann wenn die folgende Bedingungen gelten:*

i) **die Lagrangegleichung**

$$\delta^\omega \frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} + \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0,$$

ii) **die nicht-homogene Feldgleichung**

$$\delta^\omega\Omega^\omega = J^\omega(\psi).$$

Bemerkungen In diesem Satz wird nicht vorausgesetzt, dass L G-invariant ist, oder dass $\mathcal{L}$ eichinvariant ist. Es wird aber vorausgesetzt, dass (ψ,ω) <u>stationär</u> ist.

Proposition 4.4.7 [Bl, S. 70] *Es seien $P(M,G)$, ρ, h, $\hat{h}$, k, L. Betrachte $(\psi,\omega) \in C(P;V,\rho) \times \mathcal{A}(P)$. Dann gilt:*

i) $\delta^\omega(\delta^\omega\Omega^\omega) = 0$.

ii) Falls $\delta^\omega\Omega^\omega = J^\omega(\psi)$, so gilt

$$\delta^\omega(J^\omega(\psi)) = 0. \tag{4.1}$$

4.4.3 Beispiel (Die Maxwellsche Gleichungen)

Nun werden wir die zweite Gleichung des Systems (3) interpretieren.

Wir betrachten den Minkowskiraum $(\mathbb{R}^4, h_0)$ und es sei P das triviale U(1)-Bündel über $\mathbb{R}^4$.

Betrachte den Vektorraum $V := \mathbb{C}$ und die Darstellung $\rho : \mathrm{U}(1) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$, gegeben durch $\rho(e^{i\theta}) \cdot z := e^{i\theta}z$. Es gilt: $\frac{d}{dt}\rho(e^{ti\theta}) \cdot z_{|t=0} = i\theta z$ und es folgt, dass u(1) auf $\mathbb{C}$ via komplexe Multiplikation operiert. Die Metrik $\hat{h}$ auf V sei

$$\hat{h}(z,w) := \frac{1}{2}(z\bar{w} + w\bar{z}).$$

Auf der Lie-Algebra u(1) betrachten wir die Metrik k gegeben durch $k(i,i) = 1$.

Man betrachtet das Lagrangian

$$L : J(P,V) \to \mathbb{R}, \quad L(p,z,\theta) := \frac{1}{2}(\bar{h}_p\hat{h})(\theta_H, \theta_H) - \frac{1}{2}m^2 z\bar{z},$$

wobei $m \in \mathbb{R}$. Es gilt [Bl, S. 62]:

$$\nabla_2 L(p,z,\theta) = -m^2 z, \quad \nabla_3 L(p,z,\theta) = \theta_H.$$

Somit erhält man $\frac{\partial L}{\partial \psi} = -m^2\psi$, $\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)} = D^\omega\psi$, und die Lagrangegleichung:

$$\delta^\omega D^\omega \psi - m^2\psi = 0.$$

In diesem Fall ist der Strom [Bl, S. 70]

$$J = \hat{h}\left(\frac{\partial L}{\partial(D^\omega\psi)}, i\psi\right) i = \hat{h}(D^\omega\psi, i\psi)i.$$

Um eine Gleichung, deren Unbekannte auf M definiert sind, zu erhalten, betrachtet man $\sigma : U \subset M \to P$ einen lokalen Schnitt (d.h. eine Wahl der Eichung). Es seien

$$A := -i\sigma^*\omega \in A^1(U,\mathbb{R}), \quad F := dA \in A^2(U,\mathbb{R}),$$

$$\psi' := \psi \circ \sigma, \quad j' := i(\hat{h}(d\psi', i\psi') - A\psi'\bar{\psi}').$$

Man beweist [Bl, S. 70], dass $\sigma^* J = j'$ gilt, und dass die nicht-homogene Feldgleichung in diesem Fall $\delta F = j'$ wird. Auf diese Weise haben wir auch die zweite Gleichung des Systems (3) interpretiert.

Anhang

In diesem Anhang geben wir eine Übersetzung" der Terminologien.

EICH-THEORIE	**THEORIE DER FASERBÜNDEL**
Eichgruppe	Strukturgruppe
Eichpotential	Zusammenhangsform
Eichfeld	Krümmung
Eichung	(lokale) Trivialisierung eines Bündels
Eichtransformation	(lokaler) Automorphismus eines Bündels
Elektromagnetismus	Zusammenhang in einem U(1)-Bündel
Yang-Mills Feld	Zusammenhang in einem SU(2)-Bündel
Quantisierung des Diracschen Monopols	Klassifizierung von U(1)-Bündeln mittels erster Chern Klasse
Elektromagnetismus ohne Monopol	Zusammenhang in einem trivialen U(1)-Bündel
Elektromagnetismus mit Monopol	Zusammenhang in einem nicht-trivialen U(1)-Bündel

Literaturverzeichnis

[AB] M.F. Atiyah, R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 308 (1982), 523-615

[Bl] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley, 1981

[BD] T. Bröcker, T. Tom Dieck, *Representations of compacts Lie Groups*, Springer, New York, 1985

[DM] W. Drechsler, M. E. Mayer, *Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories*, Springer, 1977

[FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Springer, 1991,

[HN] J. Hilgert, K.-H. Neeb, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg, 1991,

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience, John Wiley, New York, 1963,

[Na] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, 1990

[Sch] M. Schottenloher, *Geometrie und Symmetrie in der Physik*, Vieweg, 1995,

[We1] Hermann Weyl, *Gravitation und Elektrizität*, Sber. Preuss. Akad Wiss, 1918, S. 465-480,

[We2] Hermann Weyl, *Gravitation und Elektrizität*, Z. Physik 56, 330, 1929,

[WW] R.S. Ward, R.O. Wells, *Twistor Geometry and field theory*, Cambridge University Press, 1990,