GEOMETRIE DER FASERBÜNDEL

Mihai-Sorin Stupariu

WS 2001-2002

Kapitel 1

Lie-Gruppen und Lie-Algebren

1.1 Lie-Gruppen

Definition 1.1.1 Lie-Gruppe.

Bemerkung Es sei G Gruppe, die zugleich differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Dann ist G eine Lie-Gruppe, genau dann, wenn die Abbildung $\nu : G \times G \to G$, $\nu(f, g) := f \cdot g^{-1}$ differenzierbar ist.
Beispiele 1) Die endliche Gruppen.
2) $(\mathbb{R}^n, +)$.
3) $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.
4) $(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot)$.
5) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \cdot)$.
6) Das Produkt $G \times H$ der Lie-Gruppen G und H wird auf natürlicher Weise eine Lie-Gruppe.

1.2 Lie-Algebren

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 1.2.1 Lie-Algebra über $\mathbb{K}$.

Beispiele 1) Die triviale (Abelsche) Lie-Algebra.
2) Die Lie-Algebra der Endomorphismen eines Vektorraums.
3) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Kreuzprodukt als Lie-Klammer.
4) Die Lie-Algebra der Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit.

Definition 1.2.2 Strukturkonstanten einer endlich-dimensionalen Lie-Algebra bezüglich einer Basis.

Bemerkung Aus der Definition einer Lie-Algebra (Antisymmetrie und Jacobi-Identität) erhält man die folgenden Gleichungen für die Strukturkonstanten $(c_{ij}^k)_{i,j,k=1,\dots,n}$ einer Lie-Algebra bezüglich einer Basis

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad \forall i,j,k,$$

$$\sum_{m=1}^{n}(c_{im}^h c_{jk}^m + c_{km}^h c_{ij}^m + c_{jm}^h c_{ki}^m) = 0, \quad \forall h,i,j,k.$$

1.3 Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe. Exponentialabbildung

Bezeichnungen Linkstranslation, Rechtstranslation

Definition 1.3.1 Linksinvariantes Vektorfeld

Bezeichnung Es sei G eine Lie-Gruppe und

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathcal{X}(G) \,|\, X \text{ linksinvariant}\}.$$

Beispiel Die Linksinvariantevektorfelder auf $(\mathbb{R}^n, +)$.

Proposition 1.3.2 *Ist G eine Lie-Gruppe, so ist G paralelisierbar.*

Definition 1.3.3 1-Parameteruntergruppe *einer Lie-Gruppe G.*

Proposition 1.3.4 *Es sei G eine Lie-Gruppe. Für jedes linksinvariantes Vektorfeld X auf G gibt es eine eindeutig bestimmte 1-Parameteruntergruppe, bezeichnet mit γ^X, sodass die folgende Gleichhheit gilt*

$$X_{\gamma(t)} = \gamma_{*,t}^X \left(\frac{d}{ds}_{|s=t}\right) \overset{Not}{=} \frac{d\gamma^X}{ds}_{|s=t}. \tag{1.1}$$

Bemerkung In lokalen Koordinaten wird die Gleichung (1.1) ein System von gewöhnliche Differentialgleichungen. Genauer, sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte. Man schreibt $X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$ und $f := \varphi \circ \gamma$ als $f(t) = (f^1(t),\dots,f^n(t))$. Die Gleichung (1.1) wird

$$\xi^i(f(t)) = \frac{df^i}{dt}, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Definition 1.3.5 Die Exponentialabbildung,

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \qquad \exp(X) := \gamma^X(1).$$

Proposition 1.3.6 *Es sei G eine Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra.*

i) Es seien $X \in \mathfrak{g}$, $t, t' \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\exp(tX) = \gamma^X(t),$$

$$\exp(t+t')X = (\exp tX)(\exp t'X),$$

$$\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}.$$

ii) Die Exponentialabbildung ist differenzierbar.

iii) Die Ableitung $(\exp)_{*,0} : T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ ist, via die Identifizierung zwischen T_eG und $\mathfrak{g}$, $(\exp)_{*,0} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Bemerkungen i) Die Exponentialabbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus um den Ursprung $0 \in \mathfrak{g}$.

ii) Man hat die Abbildung $\mu : G \times G \to G$, $\mu(x, y) = x \cdot y$. Dann ist ihre Ableitung $\mu_{*,(e,e)} : T_eG \oplus T_eG \to T_eG$, $\mu(X, Y) = X + Y$.

iii) Wenn G eine Abelsche Lie-Gruppe ist, so ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ein Gruppenhomomorphismus.

iv) Ist G eine <u>zusammenhängende</u> Lie-Gruppe, für die die Exponentialabbildung ein Gruppenhomomorphismus ist, so ist G Abelsch.

Beispiele i) Wir betrachten die Lie-Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$. In diesem Fall ist die Lie-Algebra die triviale Lie-Algebra $\mathbb{R}^n$ und ist die Exponentialabbildung von der Identität gegeben.

ii) Wir betrachten die Gruppe$(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \cdot)$. Sei $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ der Vektorraum $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{C})$. Die Lie-Klammer sei von $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ gegeben. Dann ist $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ die Lie-Algebra von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Für $A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ konvergiert die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ und gilt

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

1.4 Homomorphismen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Definition 1.4.1 Homomorphismus von Lie-Gruppen, Isomorphismus von Lie-Gruppen, Automorphismus einer Lie-Gruppe

Definition 1.4.2 Homomorphimus von Lie-Algebren, Isomorphimus von Lie-Algebren, Automorphismus einer Lie-Algebra

Es seien G und H Lie-Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen. Das neutrale Element e_G von G wird auf das neutrale Element e_H von H abgebildet. Somit erhält man eine lineare Abbildung $\varphi_{*,e_G} : T_{e_G}G \to T_{e_H}H$, gegeben von der Ableitung von φ in e_G. Anderseits, hat man die Isomorphismen $T_{e_G}G \simeq \mathfrak{g}$, $T_{e_H}H \simeq \mathfrak{h}$ und somit erhält man eine Abbildung $\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, die **die Ableitung von** φ gennent wird.

Proposition 1.4.3 *Es sei $\varphi : G \to H$ eine Homomorphismus von Lie-Gruppen. Dann ist seine Ableitung $\varphi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren und gilt*

$$\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ \varphi_*.$$

Proposition 1.4.4 *Es seien $\varphi, \psi : G \to H$ Homomorphismen von Lie-Gruppen und nehme an, dass $\varphi_* = \psi_*$. Falls G zusammenhängend ist, gilt $\varphi = \psi$.*

1.5 Lie-Untergruppen und Lie-Unteralgebren

Definition 1.5.1 Lie-Untergruppe, abstrakte Lie-Untergruppe

Bemerkung Eine abstrakte Lie-Untergruppe, die Untermannigfaltigkeit ist, wird eine Lie-Gruppe.

Proposition 1.5.2 *Es sei G eine Lie-Gruppe. Eine abstrakte Lie-Untergruppe H von G ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit von G wenn H abgeschlossen in G ist.*

Proposition 1.5.3 *Es seien G, H Lie-Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, der stetig ist.Dann ist f sogar differenzierbar, d.h. ein Homomorphismus von Lie-Gruppen.*

Definition 1.5.4 Lie-Unteralgebra

Proposition 1.5.5 *Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und U eine offene Umgebung von e. Dann gilt $G = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$, wobei U^n aus n-mal Produkten der Elementen von U besteht.*

Proposition 1.5.6 *Es seien G eine Lie-Gruppe und $L \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte zusammenhängende Lie-Untergruppe $\iota : H \to G$, sodass $\iota_*(\mathfrak{h}) = L$.*

Corollar 1.5.7 *Es gibt eine $1 : 1$ Korrespondenz zwischen zusammenhängenden Lie-Untergruppen einer Lie-Gruppe und Lie-Unteralgebren ihrer Lie-Algebra.*

Weitere Bespiele von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

i) Eine **Matrixgruppe** ist eine abgeschlossene (algebraische) Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ($n \geq 1$ ganz). Als Beispiele hat man $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$. Die Lie-Gruppe $\mathrm{U}(1)$ wird auch mit S^1 bezeichnet.

ii) **Der n-dimensionale Torus** ($n \geq 1$) wird definiert als $T_n := (S^1)^n$. Die Tori sind zusammenhängende, Abelsche, kompakte Lie-Gruppe.

Bemerkungen i) Jede zusammenhängende Abelsche Lie-Gruppe ist isomorph zu einem Produkt von Tori und einem Vektorraum $\mathbb{R}^s$.

ii) Jede kompakte Abelsche Lie-Gruppe G ist isomorph zu einem Produkt von Tori und einer endlichen Abelschen Gruppe.

Corollar 1.5.8 *Es sei G eine Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt $[X,Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$.*

Proposition 1.5.9 *Es sei $\varphi : G \to K$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen und seien $H := \ker\varphi$, $\mathfrak{h} := \ker(\varphi)_*$. Dann ist H eine abgeschlossene Lie-Untergruppe von G, deren Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ ist.*

Beispiel Man betrachtet den Homomorphismus von Lie-Gruppen $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$. Seine Ableitung ist $\det_*(\xi) = \mathrm{Tr}(\xi)$.
Beispiele Beschreibung der Lie-Algebren $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{o}(n)$, $\mathrm{so}(n)$, $\mathrm{u}(n)$, $\mathrm{su}(n)$.

1.6 Darstellungen

Definition 1.6.1 Darstellung einer Lie-Gruppe *in einem endlich dimensionalem Vektorraum*

Definition 1.6.2 Darstellung einer Lie-Algebra *in einem endlich dimensionalem Vektorraum*

Es sei G eine Lie-Gruppe, $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Für $g \in G$ definiert man **den inneren Automorphismus**

$$\mathrm{Ad}_g : G \to G, \qquad \mathrm{Ad}_g(x) := g \cdot x \cdot g^{-1}.$$

Der induziert $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(G)$. Man erhält eine Abbildung

$$\mathrm{ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{ad}_g := (\mathrm{Ad}_g)_{*,e}.$$

Die adjungierte Darstellung von G ist:

$$\mathrm{ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}); \qquad \mathrm{ad}(g) := \mathrm{ad}_g,$$

und die induziert **die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$**:

$$\mathfrak{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(\mathfrak{g}), \qquad \mathfrak{ad} := (\mathrm{ad})_*.$$

Proposition 1.6.3 *Es sei G eine Lie-Gruppe und es sei $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Dann gilt für alle $A, B \in \mathfrak{g}$:*

$$\mathfrak{ad}(A)(B) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left(\exp(tA) \exp(sB) \exp(-tA)\right)|_{s,t=0} = [A,B].$$

Proposition 1.6.4 *Es sei G eine Matrixgruppe und es sei $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra. Dann ist $\mathrm{ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ durch $\mathrm{ad}_g(A) = gAg^{-1}$ gegeben.*

Proposition 1.6.5 *Es sei H eine zusammenhängende Lie-Untergruppe einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G, es seien $\mathfrak{h}$ bzw. $\mathfrak{g}$ die entsprechenden Lie-Algebren. Dann ist H eine* <u>*normale*</u> *Untergruppe von G genau dann wenn $\mathfrak{h}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist.*

Definition 1.6.6 *i)* **Zentrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$**
ii) **Zentrum $Z(G)$ einer Lie-Gruppe G.**

Proposition 1.6.7 *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Dann gilt* $Z(G) = \mathrm{ker} \mathrm{ad}$.

Corollar 1.6.8 *Das Zentrum $Z(G)$ einer zusammenhängende Lie-Gruppe G ist eine abgeschlossene Lie-Untergruppe von G, deren Lie-Algebra das Zentrum von $\mathfrak{g}$ ist.*

Corollar 1.6.9 *Eine* <u>*zusammenhängende*</u> *Lie-Gruppe ist Abelsch genau dann wenn ihre Lie-Algebra Abelsch ist.*

Proposition 1.6.10 *Es seien X, Y Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einer Lie-Gruppe G. Giltt $[X, Y] = 0$, so hat man* $\exp(X+Y) = \exp X + \exp Y$.

1.7 Operationen von Lie-Gruppen

Definition 1.7.1 *i)* **Rechtsoperation (Linksoperation)** *einer Lie-Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit*
ii) **effektive, freie, transitive** *Operationen.*

Bemerkung Jede freie Operation ist effektiv.
Bemerkungen i) Eine Darstellung einer Lie-Gruppe G auf einem Vektorraum V liefert eine Linksoperation von G auf der Mannigfaltigkeit V.
ii) Sei $\mu : G \times Q \to Q$ eine Linksoperation von G auf Q und nehme an, $q \in Q$ sei ein fester Punkt für diese Operation. Dann ist

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(T_q X), \qquad \rho(g) := (\mu_g)_{*|_{T_q X}}$$

eine Darstellung von G.

Es sei G eine Lie-Gruppe, die auf der Mannigfaltigkeit Q operiert. Für $A \in \mathfrak{g}$ sei

$$\gamma^A(t) : \mathbb{R} \to G, \quad \gamma^A(t) := \exp(tA).$$

Es sei nun $q \in Q$ fest und betrachte die Kurve α_q auf Q, definiert durch

$$\alpha_q : \mathbb{R} \to Q, \quad \alpha_q(t) := q \cdot \gamma^A(t).$$

Definiere

$$A_q^* := (\alpha_q)_{*,0}\left(\frac{d}{ds}_{|_{s=0}}\right) = (q \cdot \gamma^A)_{*,0}\left(\frac{d}{ds}_{|_{s=0}}\right).$$

Es kann gezeigt werden, dass für $A \in \mathfrak{g}$ die Zuordnung $q \mapsto A_q^*$ differenzierbar ist. Somit hat man eine Abbildung $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(Q)$, $A \mapsto A^*$ definiert. Die Eigenschaften dieser Abbildung sind in der folgenden Proposition beschrieben.

Proposition 1.7.2 *Es sei G eine Lie-Gruppe, die auf der Mannigfaltigkeit Q von rechts operiert.*

i) Die Abbildung σ ist ein Lie-Algebra Homomorphismus.

ii) Wenn G frei auf Q operiert, so ist, für alle A in $\mathfrak{g}$ die nicht null sind, $\sigma(A)$ nirgends verschwindend auf Q.

iii) Wenn G effektiv auf Q operiert, so ist σ ein injektiver Lie-Algebra Homomorphismus.

Definition 1.7.3 *i)* **Die Bahn eines Punktes**

ii) **Die Standgruppe eines Punktes.**

Bemerkungen i) Wenn die Operation von G auf Q transitiv ist, so ist für alle q in Q die Bahn von q gleich Q.

ii) Die Einschränkung der Operation von G auf jeder Bahn liefert eine transitive Operation.

iii) Wenn die Operation von G auf Q frei ist, so ist für alle q in Q die Standgruppe $Iso(q)$ gleich $\{e\}$.

iv) Für q in Q ist die Standgruppe $Iso(q)$ eine Lie-Untergruppe von G.

1.8 Homogene Räume

Theorem 1.8.1 *Es seien H eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe G, G/H die Menge aller Linksäquivalenzklassen modulo H und $\pi : G \to G/H$ die natürliche Projektion. Dann besitzt G/H eine eindeutig bestimmte Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so dass gilt*

(a) π ist differenzierbar;

(b) für $gH \in G/H$ existert eine Umgebung W von gH und eine differenzierbare Abbildung $\tau : W \to G$, sodass $\pi \circ \tau = \mathrm{id}_W$ gilt (man sagt, dass τ ein lokaler Schnitt von G/H in G ist).

Theorem 1.8.2 *Es sei H eine abgeschlossene normale Untergruppe einer Lie-Gruppe G. Dann wird die Mannigfaltigkeit G/H, versehen mit der natürlichen Gruppenstruktur, zu einer Lie-Gruppe.*

Definition 1.8.3 Homogene Mannigfaltigkeiten

Theorem 1.8.4 *Es sei G eine Lie-Gruppe, die auf einer Mannigfaltigkeit Q transitiv operiert. Für $q \in Q$ gilt $G/Iso(q) \simeq M$.*

Beispiele

i) $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$; $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ $(n \geq 1)$.

ii) $\mathbb{S}^{2n-1} \simeq \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1)$; $\mathbb{S}^{2n-1} \simeq \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1)$ $(n \geq 1)$.

Speziell: $\mathbb{S}^3 \simeq \mathrm{SU}(2)$.

iii) $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}(n)/\mathrm{O}(n-1)$ $(n \geq 1)$.

iv) $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{PU}(n)$.

Proposition 1.8.5 *Es sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe G. Sind H und G/H zusammenhängend, so ist G zusammenhängend.*

Beispiele

i) Für $n \geq 1$ sind die Lie-Gruppen $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{U}(n)$ zusammenhängend.

ii) Für $n \geq 1$ hat $\mathrm{O}(n)$ zwei Zusammenhangskomponente.

iii) Für $n \geq 1$ hat $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zwei Zusammenhangskomponente.

Kapitel 2

Prinzipalbündel und assoziierte Faserbündel

2.1 Prinzipalbündel, Übergangsfunktionen

Definition 2.1.1 *i)* G-**Prinzipalbündel** $\pi : P \to X$*;*
ii) **Bündelatlas***,* **Übergangsfunktionen** $(\psi_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$.

Bemerkung Jede Faser eines Prinzipalbündels ist diffeomorph zu der Strukturgruppe G. Es gibt aber keine kanonische Identifizierung zwischen G und einer gegebenen Faser $\pi^{-1}(x)$, also keine natürliche Gruppenstruktur auf $\pi^{-1}(x)$.

Lemma 2.1.2 *Die Übergangsfunktionen eines Prinziplbündels erfüllen die Cozykelbedingungen*

$$\psi_{\alpha\gamma}(x) = \psi_{\alpha\beta}(x)\psi_{\beta\gamma}(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \tag{2.1}$$

Proposition 2.1.3 *Es seien G eine Lie-Gruppe, X eine Mannigfaltigkeit und $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung von X. Man setzt voraus, dass für alle α, β mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ eine Abbildung $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ gegeben ist, so dass die Cozykelbedingungen (2.1) erfüllt sind. Dann gibt es ein Prinzipalbündel $\pi : P \to X$ mit Strukturgruppe G, dessen Übergangsfunktionen bezüglich $(U_\alpha)_\alpha$ die $(\psi_{\beta\alpha})_{\beta,\alpha}$'s sind.*

Beispiel 2.1.4 *i) Das triviale G-Prinzipalbündel $pr_X : X \times G \to X$.*
*ii) Seien G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ abgeschlossene Lie-Untergruppe von G. Dann kann G als H-*__Prinzipalbündel__ *über ${}^{G}/_{H}$ aufgefasst werden.*
iii) Das Prinzipalbündel $L(X)$ der linearen Rahmen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X, dessen Strukturgruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist.

2.2 Homomorphismen, Unterbündel, Pullback

Definition 2.2.1 *i)* **Morphismus vom Typ** φ*;*
ii) **Isomorphismus***,* **Isomorphismus über** X*;*
iii) **Unterbündel***.*

Beispiel 2.2.2 *Einschränkung.*

Bemerkung Ein Homomorphismus $f : P'(X', G') \to P(X, G)$ bildet die Elementen einer Faser auf derselben Faser ab und somit induziert eine Abbildung $\tilde{f} : X' \to X$. Es folgt, dass $(f, \tilde{f})$ ein Morphismus von Faserräumen ist.

Proposition 2.2.3 *Es seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel und $f : Y \to X$ differenzierbar. Dann existieren ein G-Prinzipalbündel $f^* : f^* \to Y$ und ein Morphismus $\Phi : f^*P \to P$ vom Typ id_G, der f induziert. Sind $\tilde{\pi} : \tilde{P} \to X'$ ein weiters G-Prinzipalbündel und $\Psi : \tilde{P} \to P$ ein Morphismus vom Typ id_G, der f induziert, dann sind $\tilde{P}$ und f^*P isomorph über Y.*

Beispiel 2.2.4 *i) Pullback mittels Inklusion.*
ii) Faserprodukt $P \times_X Q$.

2.3 Assoziierte Bündel

2.3.1 Definition und Beispiele

Proposition 2.3.1 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel und $\rho : G \times F \to F$ eine Linksoperation auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit F. Sei*

$$E = (P \times F)/\sim \ (\overset{Not}{=} P \times_\rho F)$$

die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich

$$(p, f) \sim (p', f') :\Leftrightarrow \exists\, g \in G \text{ s.d. } \begin{cases} p' = p \cdot g \\ f' = g^{-1} \cdot f (= \rho(g)^{-1}(f)) \end{cases}$$

und $\pi_E : E \to X, \pi_E([p, f]) := \pi(p)$. Dann wird $\pi_E : E \to X$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Faserbündel mit standard Faser F.

Notation Man sagt, E sei ein zu P **assoziiertes Faserbündel**.

Bemerkung 2.3.2 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel; $E = P \times_\rho F$ ein assoziiertes Bündel. Ein Element $p \in P$ induziert eine Abbildung*

$$\tilde{p} : F \to E_{\pi(p)},\ \tilde{p}(f) := [p, f];$$

für alle $p \in P, g \in G, f \in F$ gilt $\widetilde{p \cdot g}(f) = \tilde{p}(g \cdot f)$.

Proposition 2.3.3 *Sei* $\pi_E : E \to X$ *ein* $\mathcal{C}^\infty$*-Faserbündel mit standard Faser* F*. Man nimmt an, es existiert eine Lie-Gruppe* G *mit* $G \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{Aut}(F)$ *(als abstrakte Untergruppe) und ein Bündelatlas von* E*, sodass die entsprechende Übergangsfunktionen* G*-wertig sind. Dann existiert ein* G*-Prinzipalbündel* $\pi : P \to X$*, sodass* $E \simeq P \times_\iota F$ *(als* $\mathcal{C}^\infty$*-Faserbündel).*

Beispiel 2.3.4 *i)* $\mathrm{Ad}(P) := P \times_{\mathrm{Ad}} G$*; (Bündel von Gruppen, aber i.a.* <u>*kein*</u> *Prinzipalbündel),*

ii) $\mathrm{ad}(P) := P \times_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$.

2.3.2 Beziehung zwischen invarianten Abbildungen und Schnitten in dem assoziierten Bündel

Definition 2.3.5 Schnitt*,* **Schnitt über** A*.*

Notation $\Gamma(X, E)$, $\Gamma(U, E)$.

Proposition 2.3.6 *Seien* $\pi : P \to X$ *ein* G*-Prinzipalbündel und* $\rho : G \times F \to F$ *und betrachte das assoziierte Faserbündel* $E := P \times_\rho F$*. Dann gibt es eine 1:1 Korrespondenz zwischen* $\mathcal{C}^\infty$*-Schnitte in* E *und äquivariante* $\mathcal{C}^\infty$*-Abbildungen* $\eta : P \to F$*,* $\eta(p \cdot g) = g^{-1} \cdot \eta(p)$*.*

Proposition 2.3.7 *Sei* $\pi : P \to X$ *ein* $\mathcal{C}^\infty$*-Faserraum,* π *Submersion und* P *sei versehen mit einer glatten, freien* G*-Operation, sodass die* G*-Bahnen mit den fasern von* π *übereinstimmen. Man nimmt an, dass die (wohldefinierte!) Abbildung*

$$\tau : P \times_{(\pi,\pi)} P \to G, \qquad q = p \cdot \tau(p, q)$$

differenzierbar ist. Sei $U \subset X$ *offen. Die folgende Daten sind äquivalent:*

i) ein Diffeomorphismus $h_U : P_U \to U \times G$*, mit* $h_U = (\pi, \phi_U)$ *und sodass* $\phi_U(p \cdot g) = \phi_U(p) \cdot g$*;*

ii) lokalen Schnitt in P *über* U*.*

Theorem 2.3.8 *Sei* G *eine Lie-Gruppe,*$H \subset G$ *eine abgeschlossene Lie-Untergruppe. Dann erhält man ein* H*-Prinzipalbündel* $\pi : G \to G/H$*.*

2.4 Reduktion der Strukturgruppe

Definition 2.4.1 Reduktion der Strukturgruppe *eines Prinzipalbündels.*

Bemerkung Im allgemeinen verlängt man nicht, dass die Untergruppe G' abgeschlossen in G ist.

Proposition 2.4.2 *Die Strukturgruppe eines* G*-Prinzipalbündels* $\pi : P \to X$ *kann auf eine Untergruppe* H *reduziert werden, genau dann wenn es ein Bündelatlas von* P *gibt, sodass die entsprechende Übergangsfunktionen* H*-wertig sind.*

Proposition 2.4.3 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel und $H \subset G$ eine abgeschlossene Lie-Untergruppe. Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) Die Strukturgruppe von P ist zu H reduzierbar.

ii) Das Faserbündel $P \times G/H$ besitzt einen globalen Schnitt.

Proposition 2.4.4 *Sei $E = P \times_\rho F$ ein (zu $\pi : P \to X$ via ρ assoziiertes) Faserbündel, sodass $F \simeq \mathbb{R}^m$ (diffeomorph). Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Dann kann jeder Schnitt über A zu einem Schnitt über X fortgesetzt werden. Insbesondere besitzt E einen globalen Schnitt.*

Beispiel 2.4.5 *i) Die Strukturgruppe jedem $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-Prinzipalbündel ist zu $\mathrm{O}(n)$ reduzierbar.*

ii) Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, $K \subset G$ eine maximale kompakte Untergruppe. Dann ist die Strukturgruppe jedem G-Prinzipalbündel zu K reduzierbar.

Proposition 2.4.6 *Für ein G-Prinzipalbündel $\pi : P \to X$ sind die folgende Aussagen äquivalent:*

i) Es besitzt einen globalen $\mathcal{C}^\infty$-Schnitt.

ii) Es ist trivialisierbar.

iii) Die Stukturgruppe G ist zu $\{e\}$ reduzierbar.

2.5 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$-Prinzipalbündel und Vektorbündeln

Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $r \in \mathbb{N}$.

2.5.1 Die Beziehung

Proposition 2.5.1 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine lineare Darstellung von G auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann ist $E : P \times_\rho V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel.*

Proposition 2.5.2 *Sei $\pi_E : E \to X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel vom Rang r. Für $x \in X$ definiert man*

$$P_{E,x} := \{b_x = (b_{1,x}, \ldots, b_{r,x}) \,|\, (b_{1,x}, \ldots, b_{r,x}) \text{ Rahmen für } E_x\}$$

*und seien $P_E := \coprod_{x \in X} P_{E,x}$, $\pi : P_E \to X$ kanonisch. Dann wird $\pi : P_E \to X$ auf natürliche Weise ein $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$-Prinzipalbündel (***das Prinzipalbündel der Rahmen von** *E.*

Bemerkung 2.5.3 *Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel, P_E das $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$-Prinzipalbündel der Rahmen. Jedes Element $b \in P_{E,x}$ induziert einen linearen Isomorphismus $\tilde{b} : \mathbb{K}^r \to E_x$ und umgekehrt.*

Beispiel 2.5.4 *Das* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-Prinzipalbündel* $L(X)$ *der linearen Rahmen einer* n*-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit* X*.*

Bemerkung 2.5.5 *Es seien* $\pi : P \to X$ *ein* G*-Prinzipalbündel,* $\rho_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ $(i = 1, 2)$ *lineare Darstellungen von* G *und* $\varphi : V_1 \to V_2$ *linear. Ist* φ G*-äquivariant, d.h.*

$$\varphi(\rho_1(g) \cdot v) = \rho_2(g) \cdot \varphi(v), \quad \forall g \in G,\ v \in V_1,$$

so induziert φ *einen Vektorbündelhomomorphismus* $P \times_{\rho_1} V_1 \to P \times_{\rho_2} V_2$*.*

2.5.2 Reduktion der Strukturgruppe in Vektorbündeln

Lemma 2.5.6 *Sei* $\pi_E : E \to X$ *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorbündel vom Rang* r *und sei* $\pi : P_E \to X$ *das Prinzipalbündel der Rahmen. Sei* $H \subset \mathrm{GL}(r,\mathbb{K})$ *eine abgeschlossene Untergruppe. Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) Die Strukturgruppe von P_E *kann zu* H *reduziert werden.*

ii) Es existiert ein Bündelatlas von E*, sodass die entprechende Übergangsfunktionen* H*-wertig sind.*

Sprechweise: *Die Strukturgruppe von* E *kann zu* H *reduziert werden.*

Proposition 2.5.7 *Sei* E *ein* $\mathbb{R}$*- (*$\mathbb{C}$*-)Vektorbündel vom Rang* r*.*

i) Geben eine Euklidische (bzw. Hermitesche) Bündelmetrik auf E *ist äquivalent zu geben eine Reduktion der Strukturgruppe zu* $\mathrm{O}(r)$ *(bzw.* $\mathrm{U}(r)$*).*

ii) Geben eine globale Trivialisierung von $\det E$ *ist äquivalent zu geben eine Reduktion der Strukturgruppe zu* $\mathrm{SL}(r,\mathbb{R})$ *(bzw.* $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$*).*

iii) Geben eine Euklidische (bzw. Hermitesche) Bündelmetrik auf E *und einen globalen Schnitt in* $\det E$*, dessen Norm in jedem Punkt* 1 *ist, ist äquivalent zu geben eine Reduktion der Strukturgruppe zu* $\mathrm{SO}(r)$ *(bzw.* $\mathrm{SU}(r)$*).*

Beispiel 2.5.8 *Reduktion der Strukturgruppe des Bündels* $L(X)$ *von* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *nach* $\mathrm{O}(n)$*.*

2.6 Die Eichgruppe

Definition 2.6.1 Automorphismus von P**, Eichgruppe**.

Proposition 2.6.2 *Es sei* $\pi : P \to X$ *ein* G*-Prinzipalbündel. Es ist äquivalent anzugeben:*

i) Ein Element der Eichgruppe.

ii) Eine Ad*-äquivariante differenzierbare Abbildung* $\eta : P \to G$*.*

iii) Ein Element von $\Gamma(X, \mathrm{Ad}(P))$*.*

Bemerkung Die Eichgruppe trägt i.a. (falls $\dim X > 0$ und $\dim G > 0$) keine natürliche Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, sie ist also keine Lie-Gruppe. Der Raum $A^0(X, \mathrm{ad}(P))$ heisst **die formelle Lie-Algebra** der Eichgruppe.

2.7 Fundamentalvektorfeld

Definition 2.7.1 Fundamentalvektorfeld $W^\sharp$.

Proposition 2.7.2 *Sei $\mu : P \times G \to P$ eine G-Operation auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit P.*

i) Die Abbildung $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(T_P/P)$, $\sigma(W) := W^\sharp$ ist ein Homomorphismus von Lie-Algebren.

ii) Für alle $g \in G$ gilt

$$(R_g)_*(W^\sharp) = ((R_g)_*W)^\sharp = (\mathrm{ad}_{g^{-1}}(W))^\sharp.$$

iii) Ist die G-Operation frei, so ist für $W \neq 0$ das Vektorfeld $W^\sharp$ nirgends verschwindend auf P.

iv) Ist die G-Operation effektiv, so ist σ injektiv.

Es sei $P(X, G)$ ein Prinzipalbündel. Die Operation von G auf P induziert, gemäss Prop. 1.7.2 i), einen Lie-Algebra Homomorphismus $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(P)$. Für ξ in $\mathfrak{g}$ heisst das Vektorfeld ξ^* **das Fundamentalvektorfeld** induziert von ξ. Die Operation von G bildet jede Faser auf sich selbst ab; es folgt, dass für p in P, ξ^*_p tangent zu der Faser P_p ist.

Die Operation von G ist frei, deshalb ist, für $\xi \neq 0$, das Vektorfeld ξ^* niergends verschwienend auf P (Prop. 1.7.2 ii)). Anderseits, ist die Dimension der Faser gleich der Dimension von $\mathfrak{g}$ und somit, für $p \in P$ ist die Abbildung $\mathfrak{g} \to T_pP$, $\xi \mapsto \xi^*_p$ ein linearer Isomorphismus.

2.8 Beispiele und Übungen

Beispiel 2.8.1 *i) Existenz von* $\mathrm{Spin}(4)$*-Strukturen auf* 4*-dimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten: topologisches Hinderniss.*

ii) Existenz von $\mathrm{Spin}^c(4)$*-Strukturen auf* 4*-dimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten.*

Übung 2.8.2 *Es seien $P_1(X_1, G_1)$ und $P_2(X_2, G_2)$ Prinzipalbündel; $\varphi : G_1 \to G_2$ ein surjektiver Lie-Gruppen Homomorphismus und $\tilde{\varphi} : P_1 \to P_2$ ein Morphismus vom Typ φ. Ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv?*

Übung 2.8.3 *Es seien G_1, G_2 Lie-Gruppen, $\varphi : G_1 \to G_2$ ein Lie-Gruppen Homomorphismus und P_1 ein G_1-Prinzipalbündel. Dann trägt $P_2 := P_1 \times_\varphi G_2$ natürlicherweise die Struktur eines G_2-Prinzipalbündel und*

$$\tilde{\varphi} : P_1 \to P_2, \quad \tilde{\varphi}(p_1) := [p_1, e_2]$$

ist ein Morphismus vom Typ φ.

Übung 2.8.4 *Es seien* $P_1(X_1, G_1)$, $P_2(X_2, G_2)$ *Prinzipalbündel und* $\tilde{\varphi} : P_1 \to P_2$ *ein Morphismus vom Typ* φ. *Man nimmt an,* $\varphi, \tilde{\varphi}$ *seien surjektiv. Dann gilt* $P_1 \times_\varphi G_2 \simeq P_2$.

Übung 2.8.5 *Es sei* $G = G_1 \times G_2$ *und* P *ein* G*-Prinzipalbündel. Trägt* $P \times_{\mathrm{pr}_1} G_1$ *die Struktur eines Prinzipalbündels?*

Kapitel 3

Zusammenhänge

3.1 Vorbereitungen

Definition 3.1.1 *i) W-wertige (differenzierbare) r-Form auf einer Mannigfaltigkeit M, $A^r(M;W)$.*

ii) Äussere Ableitung.

Definition 3.1.2 *(Pseudo)tensoriale r-Form vom Typ (ρ, W) in einem Prinzipalbündel P, $A^r_\rho(P;W)$*

Lemma 3.1.3 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel; $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ und $r \in \mathbb{N}$.*

i) Ist η eine pseudotensoriale r-Form vom Typ (ρ, W) , so ist die äussere Ableitung $d\eta$ pseudotensorial.

ii) Es existiert ein Isomorphismus von Vektorräumen

$$A^r_\rho(P;W) \simeq A^r(X, P \times_\rho W).$$

Definition 3.1.4 Lie-Klammer"

$\mathfrak{g}$-wertiger Formen auf M

$$[\eta\wedge\theta](Y_1, \ldots, Y_{r+s}) := \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma\in S_{r+s}} sgn(\sigma)[\eta(Y_{\sigma(1)}, \ldots Y_{\sigma(r)}, \theta(Y_{\sigma(r+1)}, \ldots Y_{\sigma(r+s)})],$$

$\eta \in A^r(M, \mathfrak{g}), \theta \in A^s(M, \mathfrak{g}), Y_1, \ldots Y_{r+s} \in \mathcal{C}^\infty(T_M/M)$.

3.2 Zusammenhänge in Prinzipalbündeln

3.2.1 Horizontale Distribution

Definition 3.2.1 Vertikale Distribution V.

Definition 3.2.2 Zusammenhang *A, horizontaler Unterraum A_p, Raum der Zusammenhänge $\mathcal{A}(P)$.*

Lemma 3.2.3 *Sei $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel. Es ist äquivalent anzugeben:*

i) Ein Zusammenhang A in P.

ii) Ein Homomorphismus von Vektorbündeln $v_A : T_P \to T_P$ sodass

$$v_A \circ v_A = v_A; \quad \mathrm{im} v_A = V; \quad (R_g)_* \circ v_A = v_A \circ (R_g)_* \, \forall g \in G.$$

iii) Ein Homomorphismus von Vektorbündeln $a : T_P \to T_P$ sodass

$$a_A \circ a_A = a_A; \quad \mathrm{ker} a_A = V; \quad (R_g)_* \circ a_A = a_A \circ (R_g)_* \, \forall g \in G.$$

Notation Horizontale (bzw. **vertikale**) Komponente $a_A(Z)$ (bzw. $v_A(Z)$) eines Vektorfeldes $Z \in \mathcal{C}^\infty(T_P/P)$.

3.2.2 Zusammenhangsform

Proposition 3.2.4 *Sei $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel.*

i) Jeder Zusammenhang A auf P definiert eine **Zusammenhangsform** *$\omega_A \in A^1(P; \mathfrak{g})$, für die gilt:*

(a) $\omega_{A,p}(W_p^\sharp) = W$, für alle $W \in \mathfrak{g}, p \in P$.

(b) $R_g^* \omega_A = \mathrm{ad}_{g^{-1}} \cdot \omega_A$, für alle $g \in G$.

ii) Jede $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form $\omega \in A^1(P; \mathfrak{g})$, die (a) und (b) erfüllt, definiert einen eindeutig bestimten Zusammenhang A auf P mit $\omega_A = \omega$.

Proposition 3.2.5 *Der Raum $\mathcal{A}(P)$ der Zusammenhänge in einem Prinzipalbündel $\pi : P \to X$ ist ein (nicht leerer) affiner Raum von Richtung $A^1(X, \mathrm{ad}(P))$.*

3.2.3 Eichpotentialen

Proposition 3.2.6 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel, $h_\alpha = (\pi, \phi_\alpha)_\alpha$ ein Bündelatlas von P, das einer Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ entspricht, $s_\alpha : U_\alpha \to P_{U_\alpha}, s_\alpha(x) := h_\alpha^{-1}(x, e)$ und seien $(\psi_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ die entsprechende Übergangsfunktionen. Für α, β definiert man die $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form auf $U_\alpha \cap U_\beta$ durch $\theta_{\alpha\beta} := \psi_{\alpha\beta}^* \theta$ (θ ist die kanonische $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form auf G).*

i) Ist ω eine Zusammenhangsform und $(\omega_\alpha)_\alpha$ die Familie von **Eichpotentialen** *gegeben durch $\omega_\alpha := s_\alpha^* \omega$, so gilt für alle $x \in U_\alpha \cap U_\beta$*

$$\omega_{\beta,x} = \mathrm{ad}_{\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}} \cdot \omega_{\alpha,x} + \theta_{\alpha\beta,x}. \tag{3.1}$$

ii) Ist $(\omega_\alpha)_\alpha$ eine Familie von $\mathfrak{g}$-wertige 1-Formen, die (3.1) erfüllen, so existiert eine eindeutig bestimmte Zusammenhangsform ω auf P, die diese Familie induziert.

3.2.4 Paralleltransporte

Definition 3.2.7 *A-horizontales Vektorfeld, Liftung bezüglich A.*

Proposition 3.2.8 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel, $A \in \mathcal{A}(P)$. Es sei*

$$HL_A : \{Z \in \mathcal{C}^\infty(T_P/P) |\ Z\ A\text{-horizontal},\ (R_g)_*(Z) = Z\,\forall g \in G\}.$$

Dann ist HL_A ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^\infty(T_P/P)$ und es gibt einen Isomorhismus von <u>*$\mathbb{R}$-Vektorräumen*</u>

$$\mathcal{C}^\infty(T_X/X) \to HL_A, \quad Y \mapsto Y^*.$$

Sind $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, $Y, Z \in \mathcal{C}^\infty(T_X/X)$, so gilt:

$$(fY)^* = f^*Y^*\ (\text{wobei } f^* := f \circ \pi), \quad ([Y,Z])^* = a_A([Y^*, Z^*]).$$

Definition 3.2.9 *Horizontale Kurve, horizontale Liftung einer Kurve.*

Lemma 3.2.10 *Sei G eine Lie-Gruppe, sei $Y : [0,1] \to T_{G,e}(\simeq \mathfrak{g})$ eine differezierbare Kurve. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Kurve $\gamma : [0,1] \to G$, sodass*

$$\begin{cases} \dot\gamma(t) & = & (R_{\gamma(t)})_{*,e}(Y(t)) \\ \gamma(0) & = & e. \end{cases}$$

Proposition 3.2.11 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel auf X, $A \in \mathcal{A}(P)$ und $\alpha : [0,1] \to X$ eine Kurve auf X. Für $p_0 \in P$ existiert eine eindeutig bestimmte horizontale Liftung $\alpha^* : [0,1] \to P$ von α mit $\alpha^*(0) = p_0$.*

Definition 3.2.12 *Paraleltransport $\mathcal{P}^\alpha_{x_0,x_1}$ von x_0 nach x_1 längs α.*

3.2.5 Kovariante Ableitung

Definition 3.2.13 Kovariante Ableitung $D : A^0(P) \to A^1(P)$.

Lemma 3.2.14 *Seien $\pi : P \to X$ ein G-Prinzipalbündel, $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ eine Darstellung und $A \in \mathcal{A}(P)$. Sei a_A die horizontale Projektion und*

$$a_A^* : A^r(P,W) \to A^r(P,W), \quad a_A^*(\eta)(Z_1, \ldots, Z_r) := \eta(a_A(Z_1, \ldots, a_A(Z_r)).$$

Ist η pseudotensorial, so ist $a_A^*(\eta)$ <u>*tensorial*</u>*.*

Proposition 3.2.15 *Sei $\pi : P \to G$ ein G-Prinzipalbündel.*

i) Jeder Zusammenhang A induziert eine kovariante Ableitung $d_A := a_A^* \circ d$.

ii) Für jede kovariante Ableitung $D : A^0(P) \to A^1(P)$ existiert ein eindeutig bestimmter Zusammenhang A in P, sodass $D = d_A$.

3.3 Zusammenhänge in assoziierten Bündeln

3.4 Krümmung der Zusammenhänge

Definition 3.4.1 **Krümmung** F_A *eines Zusammenhangs* A.

Theorem 3.4.2 (Die Strukturgleichung) *Seien* P *ein* G*-Prinzipalbündel* $A, \in \mathcal{A}(P)$. *Es gilt:*

$$F_A = d\omega_A + \frac{1}{2}[\omega_A \wedge \omega_A].$$

Theorem 3.4.3 (Die Bianchi Gleichung) *Seien* P *ein* G*-Prinzipalbündel* $A, \in \mathcal{A}(P)$. *Dann gilt* $d_A F_A = 0$.

3.5 Zussamenhänge und Homomorphismen von Prinzipalbündeln

Proposition 3.5.1 *Seien* $\pi : P \to X$, $\pi' : P' \to X'$ G*- (bzw.* G'*-) Prinzipalbündel;* $f : P' \to P$ *ein Morphismus vom Typ* φ, *der* $\tilde{f} : X' \to X$ *induziert. Man nimmt an,* $\tilde{f}$ *sei ein* *<u>Diffeomorhismus</u>. Jeder Zusammenhang* A' *in* P' *induziert einen eindeutig bestimmten Zusammenhang, bezeichnet* $f(A')$ *in* P, *sodass die horizontalen Unterräume von* A' *auf den horizontalen Unterräumen von* $f(A')$ *abgebildet werden.*

Sind weiter $\omega_{A'}$ *bzw.* $\omega_{f(A')}$ *die entsprechende Zusammenhangsformen und* $F_{A'}$ *bzw.* $F_{f(A')}$ *die Krümmungsformen, so gilt*

$$f^*\omega_{f(A')} = \varphi_* \cdot \omega_{A'}, \qquad f^*F_{f(A')} = \varphi_* \cdot F_{A'}.$$

Sprechweise f bildet den Zusammenhang A' auf den Zusammenhang A ab.

Proposition 3.5.2 *Seien* $\pi : P \to X$, $\pi' : P' \to X'$ G*- (bzw.* G'*-) Prinzipalbündel;* $f : P' \to P$ *ein Morphismus vom Typ* φ, *der* $\tilde{f} : X' \to X$ *induziert. Man nimmt an, dass* φ *ein* *<u>Isomorhismus</u> von Lie-Gruppen ist. Für jeder* $A \in \mathcal{A}(P)$ *existiert einen eindeutig bestimmten Zusammenhang* $A' \in \mathcal{A}(P')$, *dessen horizontalen Unterräumen auf den horizontalen Unterräumen von* A *durch* f *abgebildet werden.*

Sind weiter $\omega_{A'}$ *bzw.* ω_A *die entsprechende Zusammenhangsformen und* $F_{A'}$ *bzw.* F_A *die Krümmungsformen, so gilt*

$$f^*\omega_A = \varphi_* \cdot \omega_{A'}, \qquad f^*F_A = \varphi_* \cdot F_{A'}.$$

Sprechweise A' ist induziert von A.

Corollar 3.5.3 *Sei* $\pi : P \to X$ *ein* G*-Prinzipalbündel;* $f : Y \to X$ *differenzierbar. Dann induziert jeder Zusammenhang* $A \in \mathcal{A}(P)$ *einen Zusammenhang* $f^*A \in \mathcal{A}(f^*P)$.

3.6 Reduzierbarkeit der Zusammenhänge

Literaturverzeichnis

[1] T. Bröcker, T. Tom Dieck, *Representations of compacts Lie Groups*, Springer, New York, 1985.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience, John Wiley, New York, 1963.

[3] M. Schottenloher, *Geometrie und Symmetrie in der Physik*, Vieweg, 1995.

[4] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman & Co., 1971.