Elemente de teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe. Aplicații în studiul inelului de germeni de funcții olomorfe

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2013-2014

Formula integrală a lui Cauchy (cazul unei variabile)

Teoremă (formula integrală Cauchy-Pompeiu) *Fie* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *deschis și mărginit și cu frontiera* $\partial\Omega$ *reuniune finită de curbe Jordan de clasă* $\mathcal{C}^1$. *Fie* $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. *Pentru orice* $z \in \Omega$ *are loc egalitatea*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Corolar. *Dacă* f *este olomorfă, atunci pentru orice* $z \in \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Rezultate importante demonstrate pe baza formulei lui Cauchy

- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.

Rezultate importante demonstrate pe baza formulei lui Cauchy

- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.
- Principiul de identitate / principiul prelungirii analitice.

Rezultate importante demonstrate pe baza formulei lui Cauchy

- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.
- Principiul de identitate / principiul prelungirii analitice.
- Principiul de maxim.

Rezultate importante demonstrate pe baza formulei lui Cauchy

- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.
- Principiul de identitate / principiul prelungirii analitice.
- Principiul de maxim.
- **Propoziție (Lema lui Poincaré pentru operatorul $\bar{\partial}$)** *Fie Ω ca în ipotezele de la Teorema lui Cauchy și fie $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Funcția $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dată de, pentru $z \in \Omega$ de*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Omega \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

este bine definită, $\mathcal{C}^\infty$ pe Ω și verifică egalitatea

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Cazul general

- Formula lui Cauchy.

Cazul general

- Formula lui Cauchy.
- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.

Cazul general

- Formula lui Cauchy.
- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.
- Principiul de identitate / principiul prelungirii analitice.

Cazul general

- Formula lui Cauchy.
- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.
- Principiul de identitate / principiul prelungirii analitice.
- Principiul de maxim.

Cazul general

- Formula lui Cauchy.
- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.
- Principiul de identitate / principiul prelungirii analitice.
- Principiul de maxim.
- Lema lui Poincaré pentru operatorul $\bar{\partial}$.

Cazul general

- Formula lui Cauchy.
- f olomorfă $\Leftrightarrow$ f analitică.
- Principiul de identitate / principiul prelungirii analitice.
- Principiul de maxim.
- Lema lui Poincaré pentru operatorul $\bar{\partial}$.
- **Diferențe:** Teorema lui Hartogs.

Pregătiri

- **Cadru de lucru și convenții:**

Pregătiri

- **Cadru de lucru și convenții:**
  - $\mathbb{C}^n$, coordonate $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$
  - se notează $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$

Pregătiri

- **Cadru de lucru și convenții:**
  - $\mathbb{C}^n$, coordonate $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$
  - se notează $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$
  - se lucrează în jurul lui 0

Pregătiri

- **Cadru de lucru și convenții:**
  - $\mathbb{C}^n$, coordonate $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$
  - se notează $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$
  - se lucrează în jurul lui 0
- **Lemă** Fie f olomorfă în jurul originii, $f \not\equiv 0$. Există o alegere a sistemului de coordonate $z_1, z_2, \ldots, z_n$ astfel ca f să nu fie identic nulă pe axa $z_n = 0$. În particular, pentru această alegere a sistemului de coordonate, există un $s \geq 0$ astfel ca $f(0, z_n)/z_n^s$ să aibă limită finită, nenulă, pentru $z_n \to 0$.

Pregătiri

- **Cadru de lucru și convenții:**
  - $\mathbb{C}^n$, coordonate $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$
  - se notează $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$
  - se lucrează în jurul lui 0
- **Lemă** Fie f olomorfă în jurul originii, $f \not\equiv 0$. Există o alegere a sistemului de coordonate $z_1, z_2, \dots, z_n$ astfel ca f să nu fie identic nulă pe axa $z_n = 0$. În particular, pentru această alegere a sistemului de coordonate, există un $s \geq 0$ astfel ca $f(0, z_n)/z_n^s$ să aibă limită finită, nenulă, pentru $z_n \to 0$.
- (**Idee de demonstrație:** Există o mulțime densă de vectori v pentru care funcția $t \mapsto f(tv)$ să nu fie identic nulă; se alege un sistem de coordonate pentru care un astfel de v este egal cu $(0, 0, \dots, 1)$.)

Noțiunea de polinom Weierstrass

- **Polinom Weierstrass de grad** s **în** z_n: este un polinom de forma

$$P(z', z_n) = z_n^s + a_1(z')z_n^{s-1} + \ldots + a_s(z') = \sum_{k=0}^{s} a_k(z')z_n^{s-k},$$

unde:

Noțiunea de polinom Weierstrass

- **Polinom Weierstrass de grad** s **în** z_n: este un polinom de forma

$$P(z', z_n) = z_n^s + a_1(z')z_n^{s-1} + \ldots + a_s(z') = \sum_{k=0}^{s} a_k(z')z_n^{s-k},$$

unde:

  - $a_0(z') \equiv 1$; $a_1(0) = 0, \ldots, a_s(0) = 0$;

Noțiunea de polinom Weierstrass

- **Polinom Weierstrass de grad** s **în** z_n: este un polinom de forma

$$P(z', z_n) = z_n^s + a_1(z')z_n^{s-1} + \ldots + a_s(z') = \sum_{k=0}^{s} a_k(z')z_n^{s-k},$$

unde:

  - $a_0(z') \equiv 1$; $a_1(0) = 0, \ldots, a_s(0) = 0$;
  - $a_1(z'), \ldots, a_s(z')$ sunt olomorfe pe o vecinătate $|z'| \leq r'$ a originii din $\mathbb{C}^{n-1}$.

Noțiunea de polinom Weierstrass

- **Polinom Weierstrass de grad** s **în** z_n: este un polinom de forma

$$P(z', z_n) = z_n^s + a_1(z')z_n^{s-1} + \ldots + a_s(z') = \sum_{k=0}^{s} a_k(z')z_n^{s-k},$$

unde:
  - $a_0(z') \equiv 1$; $a_1(0) = 0, \ldots, a_s(0) = 0$;
  - $a_1(z'), \ldots, a_s(z')$ sunt olomorfe pe o vecinătate $|z'| \leq r'$ a originii din $\mathbb{C}^{n-1}$.
- **De fapt:** Un polinom Weierstrass de grad s în z_n este un polinom $P(z', z_n) \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$, de grad s, având coeficientul lui z_n^s egal cu 1 și astfel ca $P(0, z_n) = z_n^s$.

Teorema de pregătire a lui Weierstrass

Teoremă *Fie f olomorfă într-o vecinătate a lui 0, astfel ca $f(0, z_n)/z_n^s$ să aibă limită finită, nenulă, pentru $z_n \to 0$. Există un polinom Weierstrass $P(z', z_n)$ de grad s în z_n și o funcție olomorfă u inversabilă pe o vecinătate o originii astfel ca*

$$f(z) = P(z', z_n)u(z). \tag{1}$$

În plus, reprezentarea (1) *este unică.*

"Zerourile unei funcții olomorfe într-o vecinătate a originii, sunt date, pentru majoritatea sistemelor de coordonate, de zerourile unui polinom Weierstrass."

Teorema de împărțire a lui Weierstrass

Teoremă *Fie* $P(z', z_n)$ *un polinom Weierstrass fixat, de grad* s *în* z_n. *Pentru orice funcție olomorfă mărginită* f *pe* $\Delta = \Delta(r', r_n)$ *există* q, R *olomorfe pe* Δ, *cu* $R(z', z_n)$ *polinom Weierstrass de grad* $\leq s - 1$ *în* z_n *astfel ca*

$$f(z) = P(z', z_n)q(z) + R(z', z_n) \tag{2}$$

și $\sup_\Delta |q| \leq C \sup_\Delta |f|$, $\sup_\Delta |R| \leq C \sup_\Delta |f|$, *unde* C *este o constantă independentă de* f. *În plus, reprezentarea* (2) *este unică.*

Structura inelului de germeni de funcții olomorfe

- Fie X o varietate complexă, $\mathscr{O}_X$ fasciculul structural (fasciculul de germeni de funcții olomorfe).

Structura inelului de germeni de funcții olomorfe

- Fie X o varietate complexă, $\mathscr{O}_X$ fasciculul structural (fasciculul de germeni de funcții olomorfe).
- Fie $x \in X$ arbitrar, fixat; fie $\mathscr{O}_{X,x}$ inelul local al germenilor de funcții olomorfe în x.

Structura inelului de germeni de funcții olomorfe

- Fie X o varietate complexă, $\mathscr{O}_X$ fasciculul structural (fasciculul de germeni de funcții olomorfe).
- Fie $x \in X$ arbitrar, fixat; fie $\mathscr{O}_{X,x}$ inelul local al germenilor de funcții olomorfe în x.
- **Propoziție** *Inelul* $\mathscr{O}_{X,x}$ *este domeniu de integritate.*

Structura inelului de germeni de funcții olomorfe

- Fie X o varietate complexă, $\mathscr{O}_X$ fasciculul structural (fasciculul de germeni de funcții olomorfe).
- Fie $x \in X$ arbitrar, fixat; fie $\mathscr{O}_{X,x}$ inelul local al germenilor de funcții olomorfe în x.
- **Propoziție** *Inelul $\mathscr{O}_{X,x}$ este domeniu de integritate.*
- **Teoremă** *Inelul $\mathscr{O}_{X,x}$ este Noetherian.*

Structura inelului de germeni de funcții olomorfe

- Fie X o varietate complexă, $\mathscr{O}_X$ fasciculul structural (fasciculul de germeni de funcții olomorfe).
- Fie $x \in X$ arbitrar, fixat; fie $\mathscr{O}_{X,x}$ inelul local al germenilor de funcții olomorfe în x.
- **Propoziție** *Inelul $\mathscr{O}_{X,x}$ este domeniu de integritate.*
- **Teoremă** *Inelul $\mathscr{O}_{X,x}$ este Noetherian.*
- **Teoremă** *Inelul $\mathscr{O}_{X,x}$ este factorial.*