GEOMETRIE ANALITICĂ

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2007-2008

Cuprins

1 Elemente de algebră liniară **3**
- 1.1 Spaţii vectoriale. Definiţie. Exemple . . . 3
- 1.2 Combinaţii liniare. Baze şi repere . . . 3
- 1.3 Subspaţii vectoriale . . . 7
- 1.4 Aplicaţii liniare . . . 9
- 1.5 Spaţii vectoriale euclidiene . . . 11
- 1.6 Aplicaţii ortogonale . . . 14

2 Geometrie afină **16**
- 2.1 Combinaţii afine. Afin (in)dependenţă . . . 16
- 2.2 Repere carteziene . . . 17
- 2.3 Varietăţi liniare . . . 17
  - 2.3.1 Definiţie. Ecuaţiile varietăţilor liniare . . . 17
  - 2.3.2 Fascicole de hiperplane . . . 20
  - 2.3.3 Poziţii relative ale varietăţilor liniare. Paralelism afin . . . 21
  - 2.3.4 Suma a două varietăţi liniare . . . 23
- 2.4 Mulţimi convexe . . . 24
- 2.5 Raport . . . 25
- 2.6 Aplicaţii afine . . . 26
  - 2.6.1 Translaţii . . . 26
  - 2.6.2 Omotetii . . . 27
  - 2.6.3 Proiecţii . . . 27
  - 2.6.4 Simetrii . . . 27
- 2.7 Exerciţii . . . 28

3 Geometrie euclidiană **31**
- 3.1 Distanţe şi unghiuri în spaţiul $\mathbf{R}^n$ . . . 31
- 3.2 Repere carteziene ortonormate . . . 32
- 3.3 Perpendicularitatea varietăţilor liniare . . . 32
- 3.4 Izometrii . . . 33
- 3.5 Proiecţii centrale . . . 34
- 3.6 Exerciţii . . . 38

4 Conice **39**

A Proiecte **41**

Bibliografie **44**

Capitolul 1

Elemente de algebră liniară

1.1 Spaţii vectoriale. Definiţie. Exemple

Definiţia 1.1 Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ. Un K-**spaţiu vectorial** (**spaţiu vectorial peste corpul** K) este un triplet $(V, +, \cdot)$ format dintr-o mulţime nevidă V şi două legi de compoziţie $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ astfel încât sunt verificate axiomele spaţiului vectorial:

(i) $(V, +)$ este grup abelian,

(ii) $1 \cdot v = v$, pentru orice $v \in V$,

(iii) $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$, pentru orice $a, b \in K$, $v \in V$,

(iv) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$, pentru orice $a \in K, v, w \in V$,

(v) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$, pentru orice $a, b \in K, v \in V$.

Terminologie. Elementele lui V se numesc **vectori**, iar elementele lui K se numesc **scalari**.

Exemplul 1.2 Fie $\mathcal{V}_2$ (respectiv $\mathcal{V}_3$) mulţimea vectorilor liberi din planul geometric (respectiv din spaţiu). În raport cu operaţiile de adunare a vectorilor, respectiv de înmulţire cu scalari reali, aceste mulţimi au structuri naturale de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale.

Exemplul 1.3 Mulţimea $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in K\}$ are o structură naturală de K-spaţiu vectorial, cu operaţiile date de

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$a \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (ax_1, \ldots, ax_n)$$

($a \in K$ şi $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$).
Cazuri particulare importante sunt $\mathbb{R}$-spaţiile vectoriale $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 1.4 Verificaţi axiomele spaţiului vectorial pentru spaţiul vectorial din exemplul 1.3.

1.2 Combinaţii liniare. Baze şi repere

Fie V un K-spaţiu vectorial.

Definiţia 1.5 Fie $S = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset V$ un sistem de vectori.

(i) O **combinaţie liniară** a vectorilor $v_1, \ldots, v_q$ este un vector de forma $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_q v_q$, unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in K$ sunt scalari.

(ii) Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor din sistemul S se numeşte **acoperire liniară** a lui S şi se notează $L(S)$.

Observaţia 1.6 Dacă $S = \{v_1, \ldots, v_q\}$ este un sistem de vectori, atunci avem

$$L(S) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_q v_q \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_q \in K\}.$$

Exemplul 1.7 Considerăm $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

(i) Fie vectorii $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-1,2,-1)$, $v_3 = (0,-1,2)$ şi scalarii $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 3$. Combinaţia liniară a vectorilor v_1, v_2, v_3 cu scalarii indicaţi este vectorul

$$v = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = 1 \cdot (1,2,3) + (-2) \cdot (-1,2,-1) + 3 \cdot (0,-1,2) =$$

$$= (1,2,3) + (2,-4,2) + (0,-3,6) = (3,5,11).$$

(ii) Stabilim în continuare dacă $v = (-1,4,8)$ este o combinaţie liniară a vectorilor $v_1 = (-2,0,-1)$, $v_2 = (2,2,6)$, $v_3 = (-1,2,3)$. Aceasta este echivalent cu existenţa unor scalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel ca $v = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i$, cu alte cuvinte

$$(-1,4,8) = \alpha_1 \cdot (-2,0,-1) + \alpha_2 \cdot (2,2,6) + \alpha_3 \cdot (-1,2,3).$$

Această egalitate din $\mathbb{R}^3$ este echivalentă cu sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} -1 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ 4 = 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 8 = -\alpha_1 + 6\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases},$$

care admite soluţia (unică!) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, deci $v = v_1 + v_2 + v_3$.

(iii) Vectorul $(-1,1,2)$ nu este o combinaţie liniară a vectorilor $(1,0,0)$ şi $(0,3,0)$ (de ce?).

(iv) Pentru $S = \{(1,2,0),(2,1,-1)\}$ avem

$$L(S) = \{(\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Definiţia 1.8 (i) Un sistem de vectori $S = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset V$ se numeşte **sistem de generatori** dacă $L(S) = V$.

(ii) Un spaţiu vectorial se numeşte **finit generat** dacă admite un sistem finit de generatori.

Exemplul 1.9 Spaţiul K^n este finit generat, admiţând sistemul de generatori $\{e_1, \ldots, e_n\}$, unde

$$e_1 = (1,0,\ldots,0),\ e_2 = (0,1,\ldots,0),\ \ldots,\ e_n = (0,0,\ldots,1).$$

Exemplul 1.10 În $\mathbb{R}^3$ sistemele de vectori

$$S_1 = \{(1,0,2),(0,1,0),(2,0,1)\},\ S_2 = \{(1,0,1),(2,1,0),(3,1,2),(1,1,1)\}$$

sunt sisteme de generatori. În schimb, sistemele de vectori

$$S_3 = \{(1,2,3),(2,-1,-3)\},\ S_4 = \{(1,0,1),(2,1,0),(3,1,1)\}$$

nu sunt sisteme de generatori.

Definiţia 1.11 (i) Un sistem de vectori $S = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset V$ se numeşte **liniar dependent** dacă există scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in K$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_q v_q = 0$.

(ii) Un sistem de vectori $S = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset V$ se numeşte **liniar independent** dacă este îndeplinită condiţia: $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_q v_q = 0$ dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0$.

Exemplul 1.12 Sistemul $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este un sistem liniar independent în K^n.

Exemplul 1.13 În $\mathbb{R}^3$ sistemele de vectori

$$S_1 = \{(1,0,2),(0,1,0),(2,0,1)\}, \; S_2 = \{(1,0,1),(2,1,0),(3,1,2)\}$$

sunt liniar independente, iar sistemul $S_3 = \{(1,0,1),(2,1,0),(3,1,1)\}$ este liniar dependent.

Definiţia 1.14 (i) Un sistem de vectori $S = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset V$ se numeşte **bază** a lui V dacă este un sistem de generatori liniar independent.

(ii) O bază ordonată a unui spaţiu vectorial se numeşte **reper**.

Exemplul 1.15 Sistemul de vectori $\{e_1, \ldots, e_n\}$ formează o bază a lui K^n, numită **baza canonică**, iar reperul $(e_1, \ldots, e_n)$ se numeşte **reper canonic**.

Exemplul 1.16 (i) Sistemele de vectori

$$S_1 = \{(1,0,2),(0,1,0),(2,0,1)\}, \; S_2 = \{(1,0,1),(2,1,0),(3,1,2)\}$$

formează baze ale lui $\mathbb{R}^3$.

(ii) Unei baze $\{b_1, b_2\}$ a lui $\mathbb{R}^2$ îi putem asocia două repere distincte: (b_1, b_2) şi (b_2, b_1).

Teorema 1.17 Fie V un K-spaţiu vectorial finit generat. Atunci V admite (cel puţin) o bază finită. Mai mult, orice două baze ale lui V au acelaşi cardinal.

Definiţia 1.18 **Dimensiunea** unui K-spaţiu vectorial finit generat V este cardinalul unei baze (deci al oricărei baze) şi este notată cu $\dim_K V$.

Exemplul 1.19 Conform celor arătate anterior, avem $\dim_K K^n = n$.

Observaţia 1.20 Fie $\mathcal{R} = (b_1, \ldots, b_n)$ un reper al K-spaţiului vectorial V. Pentru orice vector $x \in V$ există şi sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n \in K$ astfel ca $x = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$.

Exemplul 1.21 Componentele vectorului $(2, -3) \in \mathbb{R}^2$ în reperul canonic (e_1, e_2) sunt $(2, -3)$, iar componentele acestui vector în reperul (e_2, e_1) sunt $(-3, 2)$.

Definiţia 1.22 Cu notaţiile din observaţia 1.20, sistemul de scalari $(x_1, \ldots, x_n)$ reprezintă **componentele vectorului** x în reperul $\mathcal{R}$.

Observaţia 1.23 Fie $\mathcal{R} = (b_1, \ldots, b_n)$ şi $\mathcal{R}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ două repere ale unui K-spaţiu vectorial n-dimensional V. Cum sistemul de vectori $b_1, \ldots, b_n$ formează o bază a lui V, există şi sunt unici scalarii $(\alpha_{ji})_{j,i=1,\ldots,n}$ astfel ca

$$b'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} b_j, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Definiţia 1.24 Cu notaţiile din observaţia 1.23, matricea $(\alpha_{ji})_{j,i=1,\ldots,n}$ se numeşte **matrice de trecere de la reperul $\mathcal{R}$ la reperul $\mathcal{R}'$** şi este notată cu $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}$

Exemplul 1.25 În $\mathbb{R}^2$ considerăm reperul canonic $\mathcal{R}_0 = (e_1, e_2)$ şi reperul $\mathcal{R} = (b_1, b_2)$ format din vectorii $b_1 = (1, 3)$, $b_2 = (2, 5)$. Cum

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 \\ b_2 &= 2 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2, \end{aligned}$$

deducem că avem

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_0\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, din egalităţile

$$\begin{aligned} e_1 &= -5b_1 + 3b_2 \\ e_2 &= 2b_1 - b_2, \end{aligned}$$

rezultă că

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observaţia 1.26 Fie $\mathcal{R} = (b_1, \ldots, b_n)$ şi $\mathcal{R}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ două repere ale unui K-spaţiu vectorial n-dimensional V.

(i) Matricea $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}$ este inversabilă şi are loc egalitatea $\mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}$.

(ii) Fie x un vector care în reperul $\mathcal{R}$ are coordonatele $(x_1, \ldots, x_n)$, iar în reperul $\mathcal{R}'$ are coordonatele $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Atunci, cu notaţiile din observaţia 1.23, avem

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Notând cu $(x)_{\mathcal{R}} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, respectiv cu $(x)_{\mathcal{R}'} = (x'_1, \ldots, x'_n)$ matricele coloană ale coordonatelor lui x în cele două repere, putem scrie relaţiile (1.1) sub forma matriceală $(x)_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}(x)_{\mathcal{R}'}$.

Definiţia 1.27 Fie $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}'$ două repere ale unui $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial V. Dacă $\det \mathcal{M}_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} > 0$, cele două repere sunt **orientate la fel**, iar dacă $\det \mathcal{M}_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} < 0$, cele două repere sunt **orientate opus**.

Exemplul 1.28 Reperele $\mathcal{R}_0$ şi $\mathcal{R}$ din exemplul 1.25 sunt orientate opus.

Definiţia 1.29 Fie $\mathcal{R}$ un reper al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ şi $\mathcal{R}_0$ reperul canonic al acestui spaţiu vectorial. Reperul $\mathcal{R}$ se numeşte **reper drept** (respectiv **reper strâmb**) dacă $\det \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0\mathcal{R}} > 0$ (respectiv $\det \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0\mathcal{R}} < 0$).

Definiţia 1.30 Fie $S = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset K^n$ un sistem de vectori din spaţiul vectorial K^n. **Matricea asociată sistemului de vectori** S este acea matrice $A_S \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ care are pe coloana i componentele vectorului v_i $(i = 1, \ldots, q)$.

Exemplul 1.31 Pentru $S = \{(1, -2, 3), (1, 0, 1), (0, -1, 4), (2, 6, -5)\}$ avem

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Propoziţia 1.32 (Criteriu de verificare a liniar independenţei sau a faptului că un sistem de vectori formează sistem de generatori). Fie $S = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset K^n$ un sistem de vectori şi $A_S \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ matricea asociată lui S. Atunci:

(i) S este liniar independent dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A_S = q$.

(ii) S este sistem de generatori dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A_S = n$.

(iii) S este bază dacă şi numai dacă $q = n = \operatorname{rang} A_S$.

Exemplul 1.33 Pentru sistemul S din exemplul 1.31 avem $\operatorname{rang} A_S = 3$, deci S este un sistem de generatori care nu este liniar independent.

Exerciţiul 1.34 Fie $S = \{(1,2,1),(2,4,2),(1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Stabiliţi dacă următorii vectori sunt elemente ale lui $L(S)$: $(0,1,0)$, $(3,6,3)$, $(4,5,4)$, $(0,0,0)$.

Exerciţiul 1.35 Studiaţi liniar independenţa sistemelor de vectori

$$S_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\},\ S_2 = \{(1,3,-1),(2,6,-2)\}.$$

Exerciţiul 1.36 Stabiliţi dacă sistemele de mai jos sunt sisteme de generatori pentru $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\},\ S_2 = \{(1,3,-1),(2,0,-1),(0,-6,2)\}.$$

Exerciţiul 1.37 Stabiliţi pentru ce valori ale parametrului α mulţimile de mai jos formează baze ale $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$:

$$S_1 = \{(-1,3,2),(2,\alpha,3),(2,0,1)\},\ S_2 = \{(2,-1,\alpha),(1,0,\alpha),(-1,2,3)\}.$$

1.3 Subspaţii vectoriale

Fie V un K-spaţiu vectorial.

Definiţia 1.38 O submulţime nevidă $\emptyset \neq W \subset V$ se numeşte **subspaţiu vectorial** dacă pentru orice $\alpha \in K, v, w \in W$ avem $v + w \in W, \alpha v \in W$.

Definiţia 1.39 Un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 se numeşte **dreaptă vectorială**, iar un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 se numeşte **plan vectorial**.

Exemplul 1.40

(i) Mulţimea $W = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$ este un plan vectorial în $\mathbb{R}^3$.

(ii) Mulţimea $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ este un plan vectorial în $\mathbb{R}^3$.

(iii) Orice spaţiu vectorial V admite subspaţiile triviale $\{0_V\}$ şi V.

Observaţia 1.41 (Reprezentări parametrice şi implicite ale subspaţiilor lui $\mathbb{R}^n$) Această observaţie generalizează (i) şi (ii) din exemplul 1.40.

• Fie $S = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset K^n$ o submulţime liniar independentă. Atunci $L(S) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_q v_q \,|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_q \in K\}$ este subspaţiu vectorial al lui K^n; S este o bază a lui $L(S)$ şi, în particular, $\dim_K L(S) = q$. Spunem că am dat o **reprezentare parametrică a lui** $L(S)$. Concret, dacă avem $S = \{(1,2,-1),(0,1,3)\} \subset \mathbb{R}^3$, o reprezentare parametrică lui $L(S)$ este

$$L(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha + \beta \\ x_3 = -\alpha + 3\beta \end{cases},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

• Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ o matrice cu coeficienţi în K. Atunci mulţimea $W = \{X \mid AX = 0\}$ a soluţiilor sistemului liniar omogen $AX = 0$ formează un subspaţiu vectorial al lui K^n cu $\dim_K W = n - \operatorname{rang} A$ (cu $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ am notat vectorul coloană $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ al necunoscutelor sistemului). Spunem că W a fost descris printr-o **reprezentare implicită**. Concret, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, atunci subspaţiul soluţiilor sistemului liniar omogen asociat este

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{ll} x_1 - 2x_2 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 0 \end{array} \right. \}.$$

• Pentru orice susbspaţiu vectorial al lui K^n putem găsi atât reprezentări parametrice, cât şi implicite. În general, acestea nu sunt unice.

• Trecerea de la o reprezentare parametrică la o reprezentare implicită se face eliminând parametrii. Concret, subspaţiul $L(S)$ descris mai sus are reprezentarea implicită $L(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$.

• Trecerea de la o reprezentare implicită la una parametrică se face rezolvând sistemul de ecuaţii liniar omogen care dă reprezentarea implicită; necunoscutele secundare vor deveni parametri. De exemplu, subspaţiul W descris mai sus admite reprezentarea parametrică $W = \{(2\alpha, \alpha, 7\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Observaţia 1.42 (i) Intersecţia a două subspaţii vectoriale este un subspaţiu vectorial.

(ii) Reuniunea a două subspaţii vectoriale nu este, în general, subspaţiu vectorial. Mai precis, $W_1 \cup W_2$ este subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă $W_1 \subset W_2$ sau $W_2 \subset W_1$.

Definiţia 1.43 **Suma a două subspaţii vectoriale** W_1, W_2, notată $W_1 + W_2$, este subspaţiul generat de reuniunea $W_1 \cup W_2$, i.e. $W_1 + W_2 := L(W_1 \cup W_2)$.

Lema 1.44 $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$.

Observaţia 1.45 Fie W_1, W_2 subspaţii ale lui V_K cu $\dim_K(W_1 \cap W_2) = p$, $\dim_K W_1 = q$, $\dim_K W_2 = r$. Dacă $\{e_1, \ldots, e_p\}$ este o bază a lui $W_1 \cap W_2$ şi dacă $\{e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_q\}$, respectiv $\{e_1, \ldots, e_p, h_{p+1}, \ldots, h_r\}$ sunt baze ale lui W_1, respectiv W_2, atunci $\{e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_q, h_{p+1}, \ldots, h_r\}$ este o bază a lui $W_1 + W_2$. În particular are loc enunţul cunoscut ca **teorema dimensiunii a lui Grassmann**

$$\dim_K(W_1 + W_2) + \dim_K(W_1 \cap W_2) = \dim_K W_1 + \dim_K W_2.$$

Exemplul 1.46 În $\mathbb{R}^4$ considerăm subspaţiile vectoriale

$$W_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0\},$$

$$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}.$$

Intersecţia lor este dată de

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{array} \right. \} = \{(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

iar suma lor este

$$W_1 + W_2 = \{(\alpha+\beta+\gamma, \alpha-\beta-\gamma, \alpha, \alpha+2\beta) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \{x \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Definiţia 1.47 Fie W un subspaţiu vectorial al lui V. Un subspaţiu vectorial W' al lui V se numeşte **complement** al lui W dacă $W \cap W' = \{0_V\}$ şi $W + W' = V$. În acest caz scriem $V = W \oplus W'$.

Exemplul 1.48 Fie $W = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + x_2 = 0\}$. Atunci atât subspaţiul $W' = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 - x_2 = 0\}$, cât şi $W'' = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + 2x_2 = 0\}$ reprezintă complemente ale lui W.

Exerciţiul 1.49 Scrieţi ecuaţii parametrice şi implicite şi precizaţi dimensiunea subspaţiului vectorial $L(S)$ dacă:
a) $S = \{(1, 2, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
b) $S = \{(2, 0, 1), (-1, 2, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$;
c) $S = \{(1, 2, -2), (2, 4, -4)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 1.50 Indicaţi baze şi precizaţi dimensiunea pentru fiecare din următoarele subspaţii:
a) $W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_3 = 0,\, x_2 = 0\}$;
b) $W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$;
c) $W_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$.

Exerciţiul 1.51 Determinaţi dimensiunea sumei şi a intersecţiei subspaţiilor $L(S_1)$ şi $L(S_2)$ pentru mulţimile:
a) $S_1 = \{(1, 2, 3)\}$, $S_2 = \{(2, 1, 1), (-1, 1, 2)\}$ din $\mathbb{R}^3$;
b) $S_1 = \{(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), \}$, $S_2 = \{(1, 0, 0, 0), (1, 2, 2, -1)\}$ din $\mathbb{R}^4$.

Exerciţiul 1.52 Descrieţi (folosind eventual atât reprezentări parametrice cât şi implicite) suma şi intersecţia subspaţiilor W_1 şi W_2 de mai jos şi precizaţi dimensiunea subspaţiilor determinate:
a) $W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_3 = 0\}$;
b) $W_1 = \{(2t, t, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(3s, -s, -s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$;
c) $W_1 = \{(2s + 2t, s, s - t, 3s - t) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$,
$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$.

Exerciţiul 1.53 În $\mathbb{R}^3$ considerăm subspaţiile

$$W_1 = \{x \,|\, x_1 + x_2 = 0,\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\},\;\; W_2 = \{x \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Arătaţi că $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ şi scrieţi vectorul $(1, 1, 1)$ ca suma dintre un vector din W_1 şi unul din W_2.

Exerciţiul 1.54 Construiţi un complement al subspaţiului vectorial
$W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

1.4 Aplicaţii liniare

Definiţia 1.55 Fie V şi V' două K-spaţii vectoriale. O funcţie $f : V \to V'$ se numeşte **aplicaţie liniară** dacă $f(v+w) = f(v)+f(w)$, $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, pentru orice $\alpha \in K$ şi $v, w \in V$.

Exemplul 1.56 (i) Aplicaţia identică şi funcţia nulă sunt aplicaţii liniare. În general, omotetia de raport $\alpha \in K$ definită prin $L_\alpha : V \to V$, $L_\alpha(v) = \alpha v$ este o aplicaţie liniară.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 + 2x_3)$ este aplicaţie liniară.

Observaţia 1.57 În general, orice aplicaţie liniară $f : K^n \to K^m$ este de forma $f(X) = AX$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ este o matrice şi $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$. Concret, aplicaţia liniară din exemplul 1.56 (ii) corespunde matricei
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lema 1.58 Fie W_1, W_2 subspaţii vectoriale ale lui V, astfel ca $V = W_1 \oplus W_2$. Pentru orice $v \in V$ există şi sunt unice elementele $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ astfel ca $v = w_1 + w_2$.

Definiţia 1.59 Cu notaţiile din lema 1.58, aplicaţia $p : V \to V$, definită prin $p(v) = w_1$ se numeşte **proiecţie pe W_1 de-a lungul lui W_2**. Aplicaţia $s : V \to V$ dată de $s := 2p - \mathrm{id}_V$ se numeşte **simetrie** asociată lui p, de **axă** W_1 şi **direcţie** W_2.

Exemplul 1.60 Considerăm spaţiul vectorial $V = \mathbb{R}^2$ şi subspaţiile vectoriale $W_1 = \{x \,|\, x_1 - x_2 = 0\}$, $W_2 = \{x \,|\, x_1 + x_2 = 0\}$. Proiecţia pe W_1 de-a lungul lui W_2 este dată de $p(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, iar simetria asociată este $s(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

Definiţia 1.61 Fie $f : V \to V'$ o aplicaţie liniară. **Nucleul**, respectiv **imaginea** lui f sunt definite prin

$$\operatorname{Ker} f := \{v \in V \,|\, f(v) = 0_{V'}\}, \quad \operatorname{Im} f := \{f(v) \,|\, v \in V\}.$$

Propoziţia 1.62 Fie $f : V \to V'$ o aplicaţie liniară.

(i) Nucleul şi imaginea lui f sunt subspaţii vectoriale.

(ii) Fie $\{b_1, \ldots, b_n\}$ o bază a lui V ($\dim_K V = n$), astfel ca $\{b_1, \ldots, b_q\}$ să fie o bază a lui $\operatorname{Ker} f$. Atunci $\{f(b_{q+1}), \ldots, f(b_n)\}$ formează o bază a lui $\operatorname{Im} f$. În particular, are loc egalitatea $\dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K \operatorname{Im} f = \dim_K V$.

Exemplul 1.63 Pentru aplicaţia liniară din exemplul 1.56 (ii) avem

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 - x_3 = 0,\, 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\};\ \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2.$$

Exerciţiul 1.64 Descrieţi $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$ scriind (dacă este cazul) ecuaţii parametrice şi implicite pentru aceste subspaţii şi indicând baze ale lor pentru aplicaţiile liniare:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, 2x_1)$;

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3 - x_4)$.

Exerciţiul 1.65 Fie $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ şi $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$.

a) Să se determine dimensiunea subspaţiilor vectoriale $\operatorname{Ker} f \cap W, \operatorname{Ker} f + W$, indicând şi baze ale acestora.

b) Să se descrie subspaţiul vectorial $f(W)$ implicit şi parametric.

Exerciţiul 1.66 Fie $W_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$ şi
$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$.

a) Să se arate că $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$.

b) Notăm cu p_1, respectiv p_2, proiecţia pe W_1 de-a lungul lui W_2, respectiv proiecţia pe W_2 de-a lungul lui W_1 şi cu s_1, s_2 simetriile asociate. Să se descrie explicit aplicaţiile p_1, p_2, s_1, s_2.

1.5 Spaţii vectoriale euclidiene

Definiţia 1.67 (i) Fie E un spaţiu vectorial real. Un **produs scalar** pe E este o aplicaţie $\langle \cdot\,, \cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:
(a) $\langle av + bw, u\rangle = a\langle v, u\rangle + b\langle w, u\rangle$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in E$;
(b) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, $\forall v, w \in E$;
(c) $\langle v, v\rangle \geq 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă $v = 0_E$.

(ii) **Norma** unui vector v este definită prin $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ iar **versorul** unui vector nenul $v \neq 0$ este vectorul $\frac{v}{\|v\|}$.

(iii) Un **spaţiu vectorial euclidian** este o pereche $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ formată dintr-un spaţiu vectorial real E şi un produs scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pe E.

Exemplul 1.68 Pe $\mathbb{R}^n$ avem **produsul scalar canonic** definit prin

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Perechea $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ o vom numi **spaţiu euclidian standard**. Pentru simplificarea notaţiilor, în cele ce urmează vom omite scrierea produsului scalar, vorbind de spaţiul vectorial euclidian (standard) $\mathbb{R}^n$, subînţelegând că este înzestrat cu produsul scalar canonic.

Concret, produsul scalar canonic dintre vectorii $(1, -1, 3)$ şi $(2, 0, -1)$ din $\mathbb{R}^3$ este -1; norma vectorului $(1, 1, -1)$ este $\sqrt{3}$, iar versorul său este vectorul $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

În continuarea acestei secţiuni $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este un spaţiu vectorial euclidian.

Teorema 1.69 (Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz)
Pentru orice $v, w \in E$ are loc inegalitatea

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă v şi w sunt liniar dependenţi.

Definiţia 1.70 (i) Fie $v, w \in E$ doi vectori nenuli. **Unghiul dintre** v **şi** w, notat $(\widehat{v, w})$, este unicul număr real $\theta \in [0, \pi]$ cu proprietatea

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}.$$

(ii) Vectorii $v, w \in E$ se numesc **ortogonali (perpendiculari)** dacă $\langle v, w\rangle = 0$. În acest caz scriem $v \perp w$ şi avem $(\widehat{v, w}) = \frac{\pi}{2}$.

Exemplul 1.71 În spaţiul vectorial euclidian standard $\mathbb{R}^3$ considerăm vectorii $u = (-1, 2, -2)$, $v = (0, 1, 1)$ şi $w = (-1, 1, 0)$. Atunci $u \perp v$ şi $(\widehat{u, w}) = \frac{\pi}{4}$.

Definiţia 1.72 (i) O bază $\{b_1, \ldots, b_n\}$ a unui spaţiu vectorial euclidian se numeşte **ortogonală** dacă $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ pentru orice $i \neq j$ şi se numeşte **ortonormată** dacă $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$ pentru orice $i, j = 1, \ldots, n$.

(ii) Un reper $(b_1, \ldots, b_n)$ se numeşte **ortonormat** dacă baza $\{b_1, \ldots, b_n\}$ este ortonormată.

Observaţia 1.73 Fie $\mathcal{R}$ un reper al lui $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_0$ reperul canonic al acestui spaţiu şi $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_0\mathcal{R}}$ matricea de trecere de la reperul canonic la $\mathcal{R}$. Reperul $\mathcal{R}$ este ortonormat dacă şi numai dacă matricea $\mathcal{M}_{\mathcal{R}_0\mathcal{R}}$ este ortogonală.

Exemplul 1.74 (i) Baza şi reperul canonice ale lui $\mathbb{R}^n$ sunt ortonormate.

(ii) Vectorii $(1,1),(-1,1)$ formează o bază ortogonală a lui $\mathbb{R}^2$ care nu este ortonormată.

(iii) Vectorii $b_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), b_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ formează o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^2$. Reperul (b_1, b_2) este un reper ortonormat drept, iar reperul (b_2, b_1) este un reper ortonormat strâmb.

Definiţia 1.75 **Produsul mixt** $x \wedge y \wedge z$ al vectorilor $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ din $\mathbb{R}^3$ este, prin definiţie, numărul real

$$x \wedge y \wedge z := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Lema 1.76 Fie $x, y \in \mathbb{R}^3$ doi vectori. Există şi este unic un vector w cu proprietatea că

$$\langle w, z \rangle = x \wedge y \wedge z, \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^3.$$

Definiţia 1.77 Vectorul w din lema 1.76 se numeşte **produs vectorial** al lui x şi y şi este notat cu $x \times y$.

Exemplul 1.78 Vectorii reperului canonic (e_1, e_2, e_3) verifică relaţiile

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observaţia 1.79 Coordonatele lui $x \times y$ în reperul canonic sunt date de formula

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Cu alte cuvinte, produsul vectorial poate fi obţinut din dezvoltarea unui determinant <u>formal</u>:

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix}.$$

Trebuie observat că ultima coloană a determinantului de mai sus are ca elemente vectori, în timp ce primele două sunt coloane de numere.

Exemplul 1.80 Produsul vectorial $x \times y$ al vectorilor $x = (1,2,3)$ şi $y = (-1,2,0)$ este

$$x \times y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} e_3 = -6e_1 - 3e_2 + 4e_3 = (-6, -3, 4).$$

Observaţia 1.81 (i) Produsul vectorial nu este asociativ, dar verifică **identitatea lui Jacobi** $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Produsul vectorial este anticomutativ: $x \times y = -y \times x$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^3$.

(iii) $x \times y = 0$ dacă şi numai dacă x şi y sunt liniar dependenţi.

(iv) $\langle x \times y, x \rangle = 0$, $\langle x \times y, y \rangle = 0$. În particular, dacă x şi y sunt liniar independenţi, vectorul $x \times y$ este nenul şi este perpendicular pe planul determinat de x şi y. În consecinţă, $\mathcal{R} = (x, y, x \times y)$ este un reper al lui $\mathbb{R}^3$. Mai mult, acest reper este la fel orientat cu reperul canonic $\mathcal{R}_0$, deoarece

$$\det \mathcal{M}_{\mathcal{R}_0\mathcal{R}} = \det(x, y, x \times y) = x \wedge y \wedge (x \times y) = \langle x \times y, x \times y \rangle = \|x \times y\|^2 > 0.$$

(v) Un reper ortonormat $\mathcal{R} = (b_1, b_2, b_3)$ este un reper drept dacă şi numai dacă are loc una din egalităţile

$$\begin{aligned} b_1 \times b_2 &= b_3 \\ b_2 \times b_3 &= b_1 \\ b_3 \times b_1 &= b_2. \end{aligned}$$

Comparând aceste relaţii cu cele din formulele (1.2), deducem că un reper ortonormat $\mathcal{R}$ este drept dacă se comportă la fel ca reperul canonic faţă de produsele vectoriale ale vectorilor din $\mathcal{R}$.

Definiţia 1.82 Subspaţiile $W_1, W_2 \subset E$ se numesc **ortogonale (perpendiculare)** dacă oricare ar fi $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ avem $w_1 \perp w_2$.

Definiţia 1.83 Fie $W \subset E$ un subspaţiu vectorial. **Complementul ortogonal** al lui W este definit prin

$$W^\perp := \{x \in E \,|\, x \perp w,\ \forall w \in W\}.$$

Propoziţia 1.84 (i) Complementul ortogonal al unui subspaţiu W este, la rândul său, subspaţiu vectorial al lui E.

(ii) Fie $\{b_1, \ldots, b_q\}$ o bază a lui W. Atunci $x \in W^\perp$ dacă şi numai dacă $\langle x, b_1 \rangle = \ldots = \langle x, b_q \rangle = 0$. Aceste egalităţi ne dau o reprezentare implicită a lui $W^\perp$.

Propoziţia 1.85 Complementul ortogonal al subspaţiului $W \subset E$ verifică proprietăţile

$$W^\perp \perp W, \quad E = W \oplus W^\perp.$$

Mai mult, $W^\perp$ este unicul subspaţiu care verifică simultan aceste două condiţii şi orice subspaţiu ortogonal pe W este inclus în $W^\perp$.

Exemplul 1.86 Considerăm $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Atunci $(1, 2, -3)$ este o bază a lui W şi $W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$. Subspaţiul $W' = \{(3\alpha, 0, \alpha) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ este, la rândul său, ortogonal pe W, dar, cum $W + W' \neq \mathbb{R}^3$, nu este complement al lui W. Pe de altă parte, subspaţiul $W'' = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ este un complement al lui W, dar nu este perpendicular pe acesta.

Exerciţiul 1.87 Pentru fiecare din submulţimile S ale spaţiului vectorial euclidian standard $\mathbb{R}^3$ indicate mai jos construiţi subspaţiul $L(S)^\perp$:

a) $S = \{(1, 2, 3)\}$;

b) $S = \{(1, -1, 0), (2, 2, 1)\}$.

Exerciţiul 1.88 Determinaţi complementul ortogonal şi indicaţi o bază a acestuia pentru fiecare din următoarele subspaţii:

a) $W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$;

b) $W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$.

1.6 Aplicaţii ortogonale

Definiţia 1.89 (i) Fie $(E_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$, $(E_2, \langle,\cdot,\cdot\rangle_2)$ două spaţii vectoriale euclidiene. O aplicaţie liniară $f : E_1 \to E_2$ se numeşte **aplicaţie ortogonală** dacă pentru orice $v, w \in E_1$ are loc egalitatea $\langle f(v), f(w)\rangle_2 = \langle v, w\rangle_1$.

(ii) Când cele două spaţii vectoriale euclidiene coincid, vorbim de o **transformare ortogonală**.

Observaţia 1.90 O aplicaţie ortogonală păstrează normele şi unghiurile.

Lema 1.91 Considerăm spaţiul vectorial euclidian standard $\mathbb{R}^n$. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică de ordinul n şi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(X) = AX$ aplicaţia liniară asociată. Atunci f este o aplicaţie ortogonală dacă şi numai dacă A este o matrice ortogonală, i.e. $A^tA = \mathbb{I}_n$, unde A^t este transpusa lui A şi $\mathbb{I}_n$ este matricea identică de ordinul n.

Observaţia 1.92 Dacă A este matrice ortogonală, atunci $\det A \in \{\pm 1\}$.

Exemplul 1.93 Aplicaţiile liniare

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ g(x) = (\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3)$$

sunt aplicaţii ortogonale corespunzătoare respectiv matricelor

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.94 (Clasificarea transformărilor ortogonale plane). Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(X) = AX$ o transformare ortogonală a spaţiului vectorial euclidian standard $\mathbb{R}^2$ corespunzătoare matricei A.

(i) Dacă $\det A = 1$, atunci există $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel ca

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) Dacă $\det A = -1$, atunci există $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel ca

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Observaţia 1.95 O transformare ortogonală de tipul (i) din teorema 1.94 este o **rotaţie** de unghi θ. O transformare ortogonală de tipul (ii) este o simetrie cu axa determinată de vectorul $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$ şi direcţia determinată de vectorul $(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$.

Teorema 1.96 (Clasificarea transformărilor ortogonale în spaţiu). Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o transformare ortogonală a spaţiului vectorial euclidian standard $\mathbb{R}^3$ corespunzătoare matricei A.

(i) Dacă $\det A = 1$, atunci există o bază ortonormată $\{b_1, b_2, b_3\}$ a lui $\mathbb{R}^3$ şi $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel ca

$$\begin{aligned} f(b_1) &= b_1, \\ f(b_2) &= (\cos\theta)b_2 + (\sin\theta)b_3, \\ f(b_3) &= (-\sin\theta)b_2 + (\cos\theta)b_3. \end{aligned}$$

(ii) Dacă $\det A = -1$, atunci există o bază ortonormată $\{b_1, b_2, b_3\}$ a lui $\mathbb{R}^3$ şi $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel ca

$$\begin{aligned} f(b_1) &= -b_1, \\ f(b_2) &= (\cos\theta)b_2 + (\sin\theta)b_3, \\ f(b_3) &= (-\sin\theta)b_2 + (\cos\theta)b_3. \end{aligned}$$

Observaţia 1.97 O transformare de tipul (i) din teorema 1.96 reprezintă o rotaţie de unghi θ în planul $L(\{b_2, b_3\})$ în jurul axei $L(\{b_1\})$. O transformare de tipul (ii) reprezintă compunerea dintre o rotaţie de unghi θ în planul $L(\{b_2, b_3\})$ în jurul axei $L(\{b_1\})$ şi o simetrie de axă $L(\{b_2, b_3\})$ şi direcţie $L(\{b_1\})$.

Exerciţiul 1.98 În $\mathbb{R}^2$ considerăm vectorul $b_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

a) Construiţi un vector b_2 astfel ca $\{b_1, b_2\}$ să fie o bază ortonormată. Este soluţia unică?

b) Scrieţi explicit simetria de axă $L(\{b_1\})$ şi direcţie $L(\{b_2\})$ şi verificaţi că este o transformare ortogonală.

Exerciţiul 1.99 În $\mathbb{R}^3$ considerăm vectorul $b_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

a) Determinaţi subspaţiul $L(\{b_1\})^{\perp}$ şi construiţi o bază ortonormată $\{b_2, b_3\}$ a acestuia.

b) Scrieţi explicit rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$ facută în planul $L(\{b_2, b_3\})$ în jurul axei $L(\{b_1\})$ şi verificaţi că este o transformare ortogonală.

Capitolul 2

Geometrie afină

2.1 Combinaţii afine. Afin (in)dependenţă

Definiţia 2.1 Fie $P_1, \ldots, P_q$ puncte din K^n. O combinaţie de forma $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_q P_q$, unde $\alpha_1 + \ldots + \alpha_q = 1$ se numeşte **combinaţie afină** a punctelor $P_1, \ldots, P_q$ cu ponderile $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Punctul $P := \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_q P_q$ se numeşte **centru de greutate** al punctelor $P_1, \ldots, P_q$ cu ponderile $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$.

Exemplul 2.2 (i) Dacă A şi B sunt două puncte din $\mathbb{R}^n$, atunci punctul $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ este o combinaţie afină a punctelor A şi B. Concret, dacă $A = (1, 2, -1)$, $B = (3, 0, -3)$, avem $M = (2, 1, -2)$.

(ii) Punctul $G = (0, 0, 0)$ este o combinaţie afină a punctelor $A = (1, 0, 0)$, $B = (-2, -2, 1), C = (1, 2, -1)$ din $\mathbb{R}^3$ cu ponderile $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

Definiţia 2.3 Fie $M = \{P_1, \ldots, P_q\} \subset K^n$ o mulţime de puncte din K^n. Mulţimea tuturor combinaţiilor afine ale punctelor $P_1, \ldots, P_q$ se numeşte **acoperire afină** a mulţimii M şi se notează $\mathrm{Af}(M)$. Avem

$$\mathrm{Af}(M) = \{\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_q P_q \,|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_q \in K, \alpha_1 + \ldots + \alpha_q = 1\}.$$

Exemplul 2.4 Pentru mulţimea $M = \{(1, 0, 1), (2, 1, -3)\} \subset \mathbb{R}^3$ avem
$\mathrm{Af}(M) = \{(\alpha + 2\beta, \beta, \alpha - 3\beta) \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha + \beta = 1\}$.

Definiţia 2.5 Fie $A, B \in K^n$ două puncte. **Vectorul determinat de A şi B** (notat cu $\overrightarrow{AB}$) este, prin definiţie, $\overrightarrow{AB} := B - A \in K^n$.
ATENŢIE! Atunci când lucrăm cu K^n mulţimea vectorilor coincide cu mulţimea punctelor. În funcţie de context, trebuie facută distincţia între <u>vector</u> şi <u>punct</u>.

Exemplul 2.6 (i) Pentru orice punct A avem $\overrightarrow{AA} = 0$.

(ii) Pentru $A = (3, 4, -5), B = (6, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$, avem $\overrightarrow{AB} = (3, -2, 6)$.

Definiţia 2.7 Un sistem de puncte $\{P_0, P_1, \ldots, P_q\}$ din K^n se numeşte **afin independent** (respectiv **afin dependent**) dacă şi numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_q}\}$ este liniar independent (respectiv liniar dependent).

Exemplul 2.8 (i) Două puncte sunt afin independente dacă şi numai dacă ele sunt distincte.

(ii) Punctele $A, B, \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ sunt afin dependente.

(iii) Punctele $(1, 2, 3), (2, 1, 1), (1, 0, 1)$ din $\mathbb{R}^3$ sunt afin independente.

2.2 Repere carteziene

Definiţia 2.9 Un **reper cartezian** $(O; \mathcal{R} = (b_1, \ldots, b_n))$ al spaţiului K^n este format dintr-un punct O, numit **originea reperului** şi un reper $\mathcal{R} = (b_1, \ldots, b_n)$ al K-spaţiului vectorial K^n.

Exemplul 2.10 (i) **Reperul cartezian canonic** al lui K^n are originea în punctul $(0, \ldots, 0)$, iar reperul corespunzător al lui K^n este cel canonic $\mathcal{R}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$.

(ii) În $\mathbb{R}^2$ considerăm punctul $A = (-2, 2)$ şi vectorii $b_1 = (1, 3)$ şi $b_2 = (2, 5)$. Sistemul $(A; (b_1, b_2))$ este un reper cartezian al lui $\mathbb{R}^2$.

Observaţia 2.11 Fie $(O; \mathcal{R} = (b_1, \ldots, b_n))$ un reper cartezian al lui K^n şi $P \in K^n$ un punct. Cum $(b_1, \ldots, b_n)$ este un reper al K-spaţiului vectorial K^n, există şi sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n$ astfel ca

$$\overrightarrow{OP} = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$$

(aceşti scalari reprezintă componentele vectorului $\overrightarrow{OP}$ în reperul $\mathcal{R}$).

Definiţia 2.12 Cu notaţiile din observaţia 2.11, sistemul $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ reprezintă **coordonatele punctului** P în reperul cartezian dat.

Exemplul 2.13 (i) Coordonatele unui punct $P = (x_1, \ldots, x_n)$ din K^n în raport cu reperul cartezian canonic sunt $(x_1, \ldots, x_n)$.

(ii) În $\mathbb{R}^2$ considerăm reperul $(A; (b_1, b_2))$, unde $A = (-2, 2)$, $b_1 = (1, 3)$, $b_2 = (2, 5)$ şi determinăm coordonatele punctului $P = (3, 1)$ în acest reper. Vectorul $\overrightarrow{AP}$ este egal cu $\overrightarrow{AP} = P - A = (5, -1)$. Componentele sale în reperul (b_1, b_2) sunt acei scalari α, β pentru care $(5, -1) = \alpha b_1 + \beta b_2$. Suntem conduşi la sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 5 \\ 3\alpha + 5\beta = -1, \end{cases}$$

care admite soluţia $\alpha = -27, \beta = 16$, deci coordonatele lui P în reperul cartezian dat sunt $(-27, 16)$.

Definiţia 2.14 Fie $(O; (b_1, \ldots, b_n))$ un reper cartezian al lui $\mathbb{R}^n$. **Sistemul de axe** $Ox_1, \ldots, Ox_n$ asociat este definit prin

$$Ox_i = \{P \in \mathbb{R}^n \mid \overrightarrow{OP} = \lambda b_i, \lambda \geq 0\}, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

2.3 Varietăţi liniare

2.3.1 Definiţie. Ecuaţiile varietăţilor liniare

În cele ce urmează K va fi un corp de caracteristică diferită de 2.

Definiţia 2.15 O submulţime $L \subset K^n$ a lui K^n se numeşte **varietate liniară** dacă pentru orice două puncte $A, B \in L$ avem $\mathrm{Af}(\{A, B\}) \subset L$ (i.e. oricare ar fi $A, B \in L$ şi $\alpha, \beta \in K$ cu $\alpha + \beta = 1$ avem $\alpha A + \beta B \in L$).

Exemplul 2.16 (i) Mulţimea vidă şi K^n sunt varietăţi liniare.

(ii) Mulţimile formate dintr-un singur punct sunt varietăţi liniare.

(iii) Dacă $A \subset K^n$ este o mulţime finită de puncte, acoperirea sa afină este o varietate liniară.

(iv) Mulţimea $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 - x_3 = 3,\, x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1\}$ este varietate liniară.

(v) Mulţimea $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \begin{cases} x_1 = 1 + s - t \\ x_2 = -2 + t \qquad s, t \in \mathbb{R}\} \\ x_3 = 3 + 2s + 2t \end{cases}$ este varietate liniară.

Teorema 2.17 O submulţime a lui K^n este varietate liniară dacă şi numai dacă ea coincide cu acoperirea sa afină.

Teorema 2.18 (Descrierea varietăţilor liniare nevide cu ajutorul subspaţiilor vectoriale)

(i) Fie $P \in K^n$ un punct şi $W \subset K^n$ un subspaţiu vectorial. Atunci mulţimea $P + W = \{P + w \,|\, w \in W\}$ este varietate liniară în K^n.

(ii) Fie L o varietate liniară nevidă în K^n. Atunci există un unic subspaţiu W al lui K^n, numit **subspaţiul director al lui** L, astfel ca pentru orice $P_0 \in L$ să avem $L = P_0 + W$. Mai mult, oricare ar fi $P_0 \in L$ are loc egalitatea $W = \{\overrightarrow{P_0P} \,|\, P \in L\}$.

Corolarul 2.19 Fie $P \in K^n$ un punct fixat şi $W \subset K^n$ un subspaţiu vectorial al lui K^n. Atunci există o unică varietate liniară care să treacă prin P şi să aibă subspaţiul director W.

Definiţia 2.20 (i) **Dimensiunea unei varietăţi liniare** L este dimensiunea subspaţiului său director şi este notată cu $\dim_K L$.

(ii) O varietate liniară de dimensiune 1 se numeşte **dreaptă**. O varietate liniară de dimensiune 2 se numeşte **plan**. O varietate liniară de dimensiune $n-1$ din K^n se numeşte **hiperplan**.

Exemplul 2.21 (i) Dacă $P \in K^n$ este un punct, atunci varietatea liniară $L = \{P\}$ are subspaţiul director nul $\{0_{K^n}\}$ şi are dimensiunea 0. Varietatea liniară K^n are dimensiunea n.

(ii) Varietatea liniară descrisă în exemplul 2.16 (iv) este o dreaptă cu subspaţiul director $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$.

(iii) Varietatea liniară L din exemplul 2.16 (v) este un plan cu subspaţiul director $W = \{(s - t, t, 2s + 2t) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$.

Observaţia 2.22 (Ecuaţii parametrice şi implicite pentru varietăţi liniare)

Această observaţie generalizează (iv) şi (v) din exemplul 2.16.

• Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ şi $B \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$ matrice cu coeficienţi în K. Atunci mulţimea $L = \{X \,|\, AX = B\}$ a soluţiilor sistemului liniar $AX = B$ formează o varietate liniară a lui K^n. Dacă L este nevidă (i.e. dacă sistemul $AX = B$ este compatibil), atunci subspaţiul său director W este dat de mulţimea soluţiilor sistemului liniar omogen asociat $W = \{X \,|\, AX = 0\}$. Ca şi în cazul subspaţiilor vectoriale, spunem că varietatea liniară L a fost descrisă printr-o **reprezentare implicită**. Concret, varietatea liniară descrisă în exemplul 2.16 (iv) corespunde matricelor $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Fie $S = \{v_1, \dots, v_q\} \subset K^n$ o submulţime liniar independentă şi fie $P \in K^n$ un punct fixat. Atunci

$$L = P + L(S) = \{P + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_q v_q \,|\, \alpha_1, \dots, \alpha_q \in K\}$$

este o varietate liniară în K^n cu subspaţiu director $L(S)$. Spunem că am dat o **reprezentare parametrică a lui** L. Concret, varietatea liniară din exemplul 2.16 (v) corespunde punctului $P = (1, -2, 3)$ şi vectorilor $v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (-1, 1, 2)$.

• Pentru orice varietate liniară putem găsi atât reprezentări parametrice, cât şi implicite. În general, acestea nu sunt unice.

• Trecerea de la o reprezentare parametrică la o reprezentare implicită se face eliminând parametrii. Concret, varietatea L din exemplul 2.16 (v) are reprezentarea implicită $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -9\}$.

• Trecerea de la o reprezentare implicită la una parametrică se face rezolvând sistemul de ecuaţii care dă reprezentarea implicită; necunoscutele secundare vor deveni parametri. De exemplu, varietatea liniară L din exemplul 2.16 (iv) admite reprezentarea parametrică $W = \{(5, t, 2 + t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Propoziţia 2.23 Fie $M = \{P_0, P_1, \dots, P_q\}$ un sistem de puncte afin independente din K^n. Atunci $\mathrm{Af}(M)$ este varietatea liniară care trece prin P_0 şi are subspaţiul director $L(\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_q}\})$.

Observaţia 2.24

I. Ecuaţii ale dreptelor

• Ecuaţiile dreptei când se dau un punct şi direcţia sa

Fie $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ un punct şi $v = (v_1, \dots, v_n)$ un vector nenul. Dreapta d determinată de A şi având subspaţiul director $L(\{v\})$ are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ \dots\dots \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases}, \ t \in K$$

şi ecuaţiile implicite

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{v_n}$$

(prin convenţie, dacă pentru un indice j avem $v_j = 0$, atunci $x_j - a_j = 0$). Vectorul v se numeşte **vector director** al dreptei d; pentru orice scalar λ <u>nenul</u> λv este, la rândul său, un vector director al lui d.

• Ecuaţiile dreptei determinate de două puncte distincte

Fie $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n)$ două puncte distincte (deci afin independente) din K^n. Conform propoziţiei 2.23 punctele A şi B determină o varietate liniară având subspaţiul director generat de vectorul $\overrightarrow{AB}$, deci o dreaptă, notată AB. Cum $\overrightarrow{AB}$ este un vector director al lui AB, ecuaţiile parametrice ale acestei drepte sunt

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1) = (1 - t)a_1 + tb_1 \\ \dots\dots \\ x_n = a_n + t(b_n - a_n) = (1 - t)a_n + tb_n \end{cases}, \ t \in K,$$

iar ecuaţiile implicite se scriu sub forma

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

Observăm că un punct C este situat pe dreapta AB dacă şi numai dacă există $t \in K$ astfel ca $C = (1-t)A + tB$, deci dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt liniar dependenţi (vezi şi secţiunea 2.5).

II. Ecuaţii ale planelor

• Ecuaţiile planului când se dau un punct şi subspaţiul său director
Fie $A = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ un punct şi $v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in K^n$ doi vectori liniar independenţi. Planul π determinat de A şi având subspaţiul director $L(\{v, w\})$ are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 + sw_1 \\ \ldots\ldots \\ x_n = a_n + tv_n + sw_n \end{cases}, \ t, s \in K.$$

• Ecuaţiile planului determinat de trei puncte necoliniare
Fie $A = (a_1, \ldots, a_n), B = (b_1, \ldots, b_n), C = (c_1, \ldots, c_n)$ trei puncte necoliniare. Acest fapt este echivalent cu faptul că vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt liniar independenţi, deci, conform propoziţiei 2.23 punctele A, B şi C determină o varietate liniară având subspaţiul director generat de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, adică un plan, notat (ABC) şi care are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1) + s(c_1 - a_1) = (1 - t - s)a_1 + tb_1 + sc_1 \\ \ldots\ldots \\ x_n = a_n + t(b_n - a_n) + s(c_n - a_n) = (1 - t - s)a_n + tb_n + sc_n \end{cases}, \ t, s \in K.$$

III. Ecuaţii ale hiperplanelor

• Ecuaţia implicită a hiperplanului
Fie $A = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ un punct şi $v_1, \ldots, v_{n-1}$ vectori liniar independenţi din K^n. Hiperplanul H care trece prin A şi are subspaţiul director egal cu $L(\{v_1, \ldots, v_{n-1}\})$ are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t_1 v_{11} + t_2 v_{21} + \ldots + t_{n-1} v_{n-11} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_n + t_1 v_{1n} + t_2 v_{2n} + \ldots + t_{n-1} v_{n-1n} \end{cases}, \ t_1, \ldots, t_{n-1} \in K.$$

Hiperplanul H are o singură ecuaţie implicită, care se obţine privind ecuaţiile de mai sus ca pe un sistem liniar cu necunoscutele $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Acest sistem este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei asociate este egal cu rangul matricei extinse, deci dacă şi numai dacă determinantul matricei extinse este 0, i.e.

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_{11} & \ldots & v_{n-11} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ x_n - a_n & v_{1n} & \ldots & v_{n-1n} \end{vmatrix} = 0.$$

2.3.2 Fascicole de hiperplane

Definiţia 2.25 Fie L o varietate liniară de dimensiune $n-2$ din K^n. Mulţimea tuturor hiperplanelor care conţin varietatea L se numeşte **fascicol de hiperplane de axă (suport)** L.

Observaţia 2.26 (i) Dacă varietatea L are ecuaţiile implicite

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_0 = 0,$$

atunci un hiperplan din L are o ecuaţie implicită de forma

$$\lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + a_0) + \mu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + \beta_0) = 0,$$

cu $\lambda, \mu \in K$.

(ii) Pentru $n = 2$ vorbim de un **fascicol de drepte**, iar pentru $n = 3$ de un **fascicol de plane**.

2.3.3 Poziţii relative ale varietăţilor liniare. Paralelism afin

Propoziţia 2.27 Fie L_1 şi L_2 varietăţi liniare în K^n având subspaţiile directoare W_1, respectiv W_2. Atunci $L_1 \cap L_2$ este varietate liniară. Dacă $L_1 \cap L_2$ este nevidă, atunci subspaţiul său director este $W_1 \cap W_2$.

Exemplul 2.28 Fie varietăţile $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 = 3, x_1 - x_3 = 2\}$, $L_1' = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 = 1, x_1 - x_3 = 2\}$ şi $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, 2x_1 - x_2 - x_3 = 5\}$. Atunci $L_1 \cap L_2 = L_1$ şi $L_1' \cap L_2 = L_1 \cap L_1' = \emptyset$.

Definiţia 2.29 Fie L_1, L_2 varietăţi liniare având subspaţiile directoare W_1 respectiv W_2. Spunem că L_1 este **paralelă** cu L_2 şi scriem $L_1 \| L_2$ dacă $W_1 \subseteq W_2$ sau $W_2 \subseteq W_1$.

Exemplul 2.30 Varietăţile liniare L_1, L_1', L_2 din exemplul 2.28 sunt paralele două câte două.

Observaţia 2.31 (i) În planul K^2 condiţia de paralelism a dreptelor se reduce la paralelismul definit prin coincidenţă sau neintersecţie.

(ii) În spaţiul K^3 condiţia de paralelism a planelor se reduce la paralelismul definit prin coincidenţă sau neintersecţie, iar condiţia de paralelism dintre o dreaptă şi un plan se reduce la incluziune sau neintersecţie.

Propoziţia 2.32 (Postulatul lui Euclid) Fie $P \in K^n$ un punct şi $L \subset K^n$ o varietate liniară. Atunci există o unică varietate liniară care conţine punctul P, este paralelă cu L şi are dimensiunea egală cu cea a lui L.

Exemplul 2.33 În $\mathbb{R}^3$ considerăm punctul $P = (2, -1, 4)$ şi varietatea liniară $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2\}$. Atunci varietatea liniară L', unde $L' = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4\}$ conţine punctul P, este paralelă cu L şi are aceeaşi dimensiune cu aceasta. În schimb, varietatea liniară $L'' = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4,\ x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$ conţine punctul P şi este paralelă cu L, dar nu are aceeaşi dimensiune cu ea.

Observaţia 2.34 (Poziţia relativă a două varietăţi liniare paralele) Fie L_1 şi L_2 două varietăţi liniare paralele. Atunci $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ sau $L_1 \subseteq L_2$ sau $L_2 \subseteq L_1$.

Exemplul 2.35 În $\mathbb{R}^3$ dreptele L_1 şi L_2, cu $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = 1, x_2 = 2\}$ şi $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = 2, x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$ au intersecţia vidă, dar nu sunt paralele.

Observaţia 2.36

• Poziţia relativă a două drepte din K^n descrise parametric

Fie d şi d' două drepte având ecuaţiile parametrice

$$d : \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases} t \in K; \quad d' : \begin{cases} x_1 = a'_1 + t'v'_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = a'_n + t'v'_n \end{cases} t' \in K.$$

Considerăm matricele

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 \\ \vdots & \vdots \\ v_n & v'_n \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 & a'_1 - a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & v'_n & a'_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Atunci:

(i) d şi d' se intersectează dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$;

(ii) d şi d' sunt paralele dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = 1$.

Aşadar: dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 1$ cele două drepte coincid, dacă $\operatorname{rang} A = 1, \operatorname{rang} \bar{A} = 2$ cele două drepte sunt paralele dar distincte, dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2$ cele două drepte se intersectează într-un singur punct, iar dacă $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \bar{A} = 3$, cele două drepte sunt neconcurente şi neparalele (necoplanare).

Concret, dreptele

$$d : \begin{cases} x_1 = 1 + 3t \\ x_2 = -1 - 3t \\ x_3 = 2t \end{cases} t \in \mathbb{R} \qquad d' : \begin{cases} x_1 = 2 + 2t' \\ x_2 = 2 \\ x_3 = t' \end{cases} t' \in K$$

sunt concurente în punctul $(-2, 2, -2)$, corespunzător valorilor parametrilor $t = -1, t' = -2$.

• Poziţia relativă a două hiperplane din K^n descrise implicit

Fie H şi H' două hiperplane de ecuaţii implicite $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha_0$, respectiv $\alpha'_1 x_1 + \ldots + \alpha'_n x_n = \alpha'_0$. Considerând matricele

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha'_1 & \ldots & \alpha'_n \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & \alpha_0 \\ \alpha'_1 & \ldots & \alpha'_n & \alpha'_0 \end{pmatrix},$$

avem că:

(i) H şi H' se intersectează dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$,

(ii) H şi H' sunt paralele dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = 1$.

Aşadar: dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 1$ cele două hiperplane coincid, dacă $\operatorname{rang} A = 1$, $\operatorname{rang} \bar{A} = 2$, cele două hiperplane sunt paralele dar distincte, iar dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2$, cele două hiperplane au ca intersecţie o varietate liniară de dimensiune $n - 2$.

Concret, considerăm în $\mathbb{R}^3$ planele π, π', π'' de ecuaţii $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$, $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$, respectiv $-x_1 + x_2 + 4x_3 = 5$. Atunci π este paralel cu π', dar distinct de acesta, iar π şi π'' sunt concurente, intersecţia lor fiind o dreaptă.

• Poziţia relativă a două drepte din K^3 descrise implicit

Fie d şi d' două drepte din K^3 date de ecuaţiile implicite:

$$d : \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = \beta_0 \end{cases} \qquad d : \begin{cases} \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 + \alpha'_3 x_3 = \alpha'_0 \\ \beta'_1 x_1 + \beta'_2 x_2 + \beta'_3 x_3 = \beta'_0 \end{cases}.$$

Formăm matricele

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_0 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_0 \end{pmatrix}.$$

Cu aceste notaţii obţinem următoarea caracterizare:
(i) d şi d' au intersecţia nevidă dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$,

(ii) d şi d' sunt paralele dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = 2$.

În concluzie, dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2$, cele două drepte coincid, dacă $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \bar{A} = 3$, cele două drepte sunt paralele dar distincte, dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3$, cele două drepte sunt concurente într-un singur punct, iar dacă $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} \bar{A} = 4$, cele două drepte sunt necoplanare.

De exemplu, dreptele de ecuaţii $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2, 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$, respectiv $x_1 - x_2 + 4x_3 = -1, x_1 - x_2 = 2$ sunt concurente în punctul $(-\frac{9}{4}, -\frac{17}{4}, -\frac{3}{4})$.

• Poziţia relativă dintre o dreaptă descrisă parametric şi un hiperplan descris implicit
În K^n considerăm dreapta d având ecuaţiile parametrice

$$d : \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases} \quad t \in K$$

şi hiperplanul H de ecuaţie $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha_0$. Atunci d şi H sunt paralele dacă şi numai dacă $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Condiţia ca d şi H să aibă intersecţia nevidă este ca

$$\operatorname{rang}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \operatorname{rang}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \alpha_0 - \alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_n a_n).$$

De exemplu, dreapta $\{(2 - 2t, 3 - 4t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ este paralelă cu planul de ecuaţie $2x_1 - x_2 = 3$, dar nu e inclusă în acesta.

2.3.4 Suma a două varietăţi liniare

Definiţia 2.37 Suma varietăţilor liniare L_1 şi L_2 din K^n, notată $L_1 + L_2$, este acoperirea afină a reuniunii lor: $L_1 + L_2 := \operatorname{Af}(L_1 \cup L_2)$.

Propoziţia 2.38 (Spaţiul director al sumei) Fie L_1 şi L_2 două varietăţi liniare având subspaţiile directoare W_1, respectiv W_2. Subspaţiul director al sumei $L_1 + L_2$ este egal cu:
• $W_1 + W_2$, dacă $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$,

• $W_1 + W_2 + L(\{\overrightarrow{O_1 O_2}\})$, dacă $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, unde $O_1 \in L_1, O_2 \in L_2$ sunt arbitrare.

Corolarul 2.39 (Teorema dimensiunii pentru varietăţi liniare) Fie L_1, L_2 varietăţi liniare în K^n cu subspaţiile directoare W_1, respectiv W_2. Atunci are loc egalitatea

$$\dim_K(L_1 + L_2) = \begin{cases} \dim_K L_1 + \dim_K L_2 - \dim_K(L_1 \cap L_2), & L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \\ \dim_K L_1 + \dim_K L_2 - \dim_K(W_1 \cap W_2) + 1, & L_1 \cap L_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Exemplul 2.40 Considerăm punctul $P = (2, -1, 0)$ şi dreapta d având reprezentarea parametrică $\{(1 - 2t, 2 + 3t, 4 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Atunci P nu aparţine lui d, deci intersecţia varietăţilor liniare $\{P\}$ şi d este mulţimea vidă. Suma

$P + d$ este un plan, având subspaţiul director generat de vectorii $(-2, 3, -1)$ şi $\overrightarrow{PA} = (-1, 3, 4)$, unde $A = (1, 2, 4) \in d$. Planul $P + d$ admite reprezentarea parametrică $\{(1-2t-s, 2+3t+3s, 4-t+4s) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$ şi reprezentarea implicită $15x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 21$.

Exemplul 2.41 În $\mathbb{R}^3$ considerăm dreptele d_1, d_2 şi d_3 având reprezentările parametrice $\{(1+2t, 3-t, 1+t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, $\{(2+2s, -s, 2+s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$, respectiv $\{(1+u, 2+u, 2u) \,|\, u \in \mathbb{R}\}$. Atunci d_1 şi d_2 sunt paralele şi distincte şi suma lor este planul de ecuaţie $2x_1 - x_2 - 5x_3 = -6$, iar d_1 şi d_3 sunt concurente în punctul $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ şi suma lor este planul de ecuaţie $x_1 + x_2 - x_3 = 3$.

2.4 Mulţimi convexe

În această secţiune spaţiile considerate sunt de forma $\mathbb{R}^n$ (corpul scalarilor este corpul numerelor reale).

Definiţia 2.42 Fie $A, B \in \mathbb{R}^n$ puncte (nu neapărat distincte). **Segmentul închis** $[AB]$, respectiv **segmentul deschis** (AB) sunt definite astfel:

$$[AB] := \{\lambda A + (1-\lambda)B \,|\, \lambda \in [0,1]\}, \ (AB) := \{\lambda A + (1-\lambda)B \,|\, \lambda \in (0,1)\}.$$

Dacă $C \in [AB]$ spunem că C se găseşte **între** A **şi** B sau că C **separă punctele** A **şi** B. Dacă $C \in (AB)$ spunem că C se găseşte **strict între** A **şi** B.

Definiţia 2.43 O mulţime $M \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **mulţime convexă** dacă pentru orice $A, B \in M$ avem $[AB] \subset M$.

Exemplul 2.44 (i) Spaţiul $\mathbb{R}^n$ este o mulţime convexă.

(ii) Mulţimea vidă şi mulţimile formate dintr-un singur punct sunt mulţimi convexe.

(iii) Orice varietate liniară este o mulţime convexă.

(iv) Mulţimea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4 \geq 0\}$ este o mulţime convexă. În general, dacă H este un hiperplan din $\mathbb{R}^n$ dat prin ecuaţia implicită $h(x) = 0$, mulţimile $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) \leq 0\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) \geq 0\}$, precum şi mulţimile $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) < 0\}$ şi $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, h(x) > 0\}$ sunt mulţimi convexe (numite **semispaţii închise, respectiv deschise determinate de** H).

Definiţia 2.45 Două puncte distincte A şi B sunt **separate (strict)** de către un hiperplan H dacă dreapta AB intersectează hiperplanul H într-un punct situat (strict) între A şi B. Punctele A şi B sunt situate **de aceeaşi parte** a lui H dacă nu sunt separate de către H.

Propoziţia 2.46 Fie H un hiperplan de ecuaţie implicită $h(x) = 0$. Două puncte distincte A şi B sunt separate strict de către H dacă şi numai dacă $h(A) \cdot h(B) < 0$.

Exemplul 2.47 În $\mathbb{R}^2$ considerăm dreapta d de ecuaţie implicită $h(x) = 0$, unde $h(x) = x_1 + 2x_2 - 1$ şi punctele $A = (1, 3)$, $B = (2, -1)$. Avem $h(A) = h(1, 3) = 6, h(B) = h(2, -1) = -1$, deci A şi B sunt separate de către d.

Observaţia 2.48 (i) Intersecţia $\cap_{\alpha \in A} M_\alpha$ a unei familii de mulţimi convexe $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este o mulţime convexă.

(ii) Fie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie afină. Dacă $X \subset \mathbb{R}^n$, respectiv $Y \subset \mathbb{R}^m$ sunt mulţimi convexe, atunci şi $\varphi(X) \subset \mathbb{R}^m$, respectiv $\varphi^{-1}(Y) \subset \mathbb{R}^n$ sunt mulţimi convexe.

Definiţia 2.49 **Închiderea (înfăşurătoarea/acoperirea) convexă** a unei mulţimi $M \subset \mathbb{R}^n$ este intersecţia tuturor mulţimilor convexe care conţin mulţimea M:

$$\text{conv}M := \bigcap_{X \supset M, X \text{convexă}} X.$$

Propoziţia 2.50 Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime. Atunci

$$\text{conv}M = \{\sum_{i=1}^{q} \lambda_i A_i \,|\, A_1, \ldots, A_q \in M,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_q > 0, \lambda_1 + \ldots + \lambda_q = 1,\ q \in \mathbb{N}\}.$$

Definiţia 2.51 (i) O intersecţie finită de semispaţii din $\mathbb{R}^n$ se numeşte **tronson** sau **poliedru convex**

(ii) Înfăşurătoarea convexă a unei mulţimi finite de puncte din $\mathbb{R}^n$ se numeşte **politop**.

(iii) Înfăşurătoarea convexă a unei mulţimi formate din $n+1$ puncte afin independente din $\mathbb{R}^n$ se numeşte **simplex** n**-dimensional**.

2.5 Raport

Lema 2.52 Fie A şi B două puncte distincte în K^n. Pentru orice punct $P \in AB$, $P \neq B$ există un unic scalar $r \in K \setminus \{-1\}$ astfel ca $\overrightarrow{AP} = r\ \overrightarrow{PB}$. Reciproc, fiecărui scalar $r \in K \setminus \{-1\}$, îi corespunde un unic punct $P \in AB$.

Definiţia 2.53 Scalarul r definit în lema 2.52 se numeşte **raportul** punctelor A, B, P (sau **raportul în care punctul** P **împarte segmentul** $[AB]$) şi este notat cu $r(A, P, B)$.

Observaţia 2.54 În calcularea raportului, <u>ordinea</u> punctelor este esenţială. Modul în care este definit această noţiune (mai precis ordinea în care sunt considerate punctele) diferă de la autor la autor.

Propoziţia 2.55 Fie A, B, P trei puncte coliniare, cu $P \neq B$. Atunci:

(i) $P = \frac{1}{r+1}A + \frac{r}{r+1}B$, unde $r = r(A, P, B)$;

(ii) $P = (1-\alpha)A + \alpha B$ dacă şi numai dacă $r(A, P, B) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$;

(ii) $P = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$ dacă şi numai dacă $r(A, P, B) = \frac{\beta}{\alpha}$.

Observaţia 2.56 Fie $P \in AB \setminus \{A, B\}$. Atunci:

(i) $r(A, P, B) > 0$ dacă şi numai dacă $P \in (AB)$;

(ii) $r(B, P, A) = \frac{1}{r(A,P,B)}$.

Exemplul 2.57 (i) În $\mathbb{R}^3$ considerăm punctele $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (0, 3, 7)$. Atunci punctele A, B, C sunt coliniare şi avem $r(A, C, B) = -\frac{1}{2}$, $r(B, C, A) = -2$, $r(C, A, B) = 1$, $r(C, B, A) = -2$.

(ii) Fie A, B două puncte din $\mathbb{R}^n$ şi $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Atunci $r(A, M, B) = 1$, $r(M, A, B) = -\frac{1}{2}$.

2.6 Aplicaţii afine

Definiţia 2.58 Fie L_1, L_2 varietăţi liniare în K^n, respectiv K^m. O funcţie $\varphi : L_1 \to L_2$ se numeşte **aplicaţie afină (morfism afin)** dacă pentru orice $\alpha, \beta \in K$ cu $\alpha+\beta = 1$ şi pentru orice $A, B \in L_1$ are loc egalitatea $\varphi(\alpha A+\beta B) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B)$. În cazul când $L_1 = L_2$, φ se numeşte **endomorfism afin**.

Exemplul 2.59 (i) Funcţia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită prin formula $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3 + 2, 3x_2 + 5x_3 - 4)$ este o aplicaţie afină.

(ii) Fie $\varphi : L_1 \to L_2$ aplicaţie afină şi $L'_1 \subset L_1$ o varietate liniară. Atunci restricţia lui φ la L'_1 este, la rândul său, o aplicaţie afină.

Teorema 2.60 (Caracterizarea aplicaţiilor afine cu ajutorul urmei) Fie L_1 şi L_2 varietăţi liniare având subspaţiile directoare W_1, respectiv W_2 şi $\varphi : L_1 \to L_2$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) φ este aplicaţie afină.

(ii) Există un punct $O \in L_1$ cu proprietatea că aplicaţia $f : W_1 \to W_2$, $f(\overrightarrow{OA}) := \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)}$, numită **urma** lui φ, este o aplicaţie liniară.

Observaţia 2.61 Cu notaţiile din teorema 2.60 avem $f(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(A)}$, oricare ar fi $P \in L_1$.

Observaţia 2.62 (i) O aplicaţie afină este injectivă (surjectivă) dacă şi numai dacă urma sa este injectivă (surjectivă).

(ii) Compunerea a două aplicaţii afine este o aplicaţie afină, iar urma compunerii este compunerea urmelor.

Observaţia 2.63 O aplicaţie afină φ este complet determinată de urma sa şi de o pereche de puncte corespondente $(O, \varphi(O))$.

Propoziţia 2.64 Fie $\varphi : K^n \to K^m$ o aplicaţie afină cu urma $f : K^n \to K^m$ corespunzătoare matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ (vezi observaţia 1.57). Atunci $\varphi(X) = A \cdot X + B$, unde $B = \varphi(0) \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$.

Exemplul 2.65 Aplicaţia afină din exemplul 2.59 (i) corespunde matricelor $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Observaţia 2.66 Aplicaţiile afine au următoarele proprietăţi:

- transformă varietăţile liniare în varietăţi liniare; mai mult, subspaţiul director al imaginii este imaginea prin aplicaţia urmă a subspaţiului director al varietăţii liniare transformate;
- transformă varietăţi liniare paralele în varietăţi liniare paralele;
- păstrează raportul a trei puncte coliniare.

2.6.1 Translaţii

Definiţia 2.67 O **translaţie** este un endomorfism afin al lui K^n a cărui urmă este identitatea lui K^n.

Observaţia 2.68 (i) O aplicaţie $\tau : K^n \to K^n$ este translaţie dacă şi numai dacă există $v \in K^n$ astfel ca $\tau(P) = P + v$ pentru orice $P \in K^n$. Vectorul v se numeşte **vectorul translaţiei** şi pentru orice $P \in K^n$ are loc egalitatea $v = \overrightarrow{P\tau(P)}$.

(ii) O translaţie diferită de translaţia de vector nul (i.e. diferită de aplicaţia identică) nu admite puncte fixe.

(iii) Mulţimea translaţiilor lui K^n formează un grup (în raport cu compunerea funcţiilor) izomorf cu K^n.

2.6.2 Omotetii

Definiţia 2.69 Fie $O \in K^n$ un punct şi $\lambda \in K^n \setminus \{0\}$ un scalar nenul. Se numeşte **omotetie de centru** O **şi putere (raport)** λ endomorfismul afin al lui K^n, notat cu H_O^λ, cu proprietatea că $H_O^\lambda(O) = O$ şi $\overrightarrow{OH_O^\lambda(P)} = \lambda\,\overrightarrow{OP}$ pentru orice $P \in K^n$.

Observaţia 2.70 (i) Avem $H_O^\lambda(P) = \lambda P + (1-\lambda)O$, pentru orice $P \in K^n$.

(ii) O omotetie de putere diferită de 1 şi de centru O admite un unic punct fix, şi anume O.

(iii) Mulţimea omotetiilor de centru fixat formează un grup (în raport cu compunerea funcţiilor) izomorf cu K^*.

(iv) În general, fie $H_{O_1}^{\lambda_1}, H_{O_2}^{\lambda_2}$ două omotetii. Atunci compunerea $H_{O_2}^{\lambda_2} \circ H_{O_1}^{\lambda_1}$ este egală cu:

- omotetia $H_O^{\lambda_1\lambda_2}$, unde $O = \frac{\lambda_2(1-\lambda_1)}{1-\lambda_1\lambda_2}O_1 + \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}O_2$, pentru $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$;
- translaţia de vector $(1-\lambda_2)\,\overrightarrow{O_1O_2}$, pentru $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

2.6.3 Proiecţii

Definiţia 2.71 O **proiecţie afină** este un endomorfism afin π având (cel puţin) un punct fix şi a cărui urmă este o proiecţie vectorială p. Nucleul W al urmei p se numeşte **direcţia proiecţiei afine** π. Se spune că π **este proiecţie pe** $\operatorname{Im}\pi$ **paralelă cu** W.

Observaţia 2.72 (i) Un endomorfism π este proiecţie afină dacă şi numai dacă $\pi^2 = \pi$.

(ii) Un endomorfism π al lui K^n este proiecţie dacă şi numai dacă există un subspaţiu vectorial W şi o varietate liniară L în K^n cu subspaţiu director complementar lui W astfel încât pentru orice punct P, $\pi(P)$ este intersecţia dintre L şi varietatea liniară de subspaţiu director W care trece prin P. În particular, punctele imaginii $\operatorname{Im}\pi$ sunt puncte fixe pentru π.

Exemplul 2.73 Aplicaţia afină

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \pi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 - x_2 - x_3 + 3, 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3, x_3)$$

este o proiecţie pe planul de ecuaţie $2x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$ cu direcţia dată de vectorul $(1, -1, 0)$.

2.6.4 Simetrii

Definiţia 2.74 O **simetrie afină** este un endomorfism afin având (cel puţin) un punct fix şi a cărui urmă este o simetrie vectorială.

Observaţia 2.75 (i) Un endomorfism afin σ al lui K^n este simetrie dacă şi numai dacă $\sigma^2 = \mathrm{id}_{K^n}$.

(ii) Dacă σ este o simetrie a lui K^n, atunci $\frac{1}{2}\mathrm{id}_{K^n} + \frac{1}{2}\sigma$ este o proiecţie. Reciproc, dacă π este o proiecţie a lui K^n, atunci $2\pi - \mathrm{id}_{K^n}$ este o simetrie. În consecinţă, pentru o simetrie putem vorbi de **direcţia** simetriei, care este direcţia proiecţiei asociate, şi de **axa** simetriei, care este imaginea proiecţiei asociate şi care coincide cu mulţimea punctelor fixe ale simetriei.

(iii) Un endomorfism afin σ al lui K^n este o simetrie dacă şi numai dacă există un subspaţiu vectorial W al lui K^n şi o varietate liniară L având direcţia un complement al lui L astfel încât pentru orice $P \in K^n$ să avem $\overrightarrow{P\sigma(P)} \in W$ şi $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\sigma(P) \in L$.

Exemplul 2.76 În $\mathbb{R}^3$ considerăm varietatea L de ecuaţie $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$ şi vectorul $(1, 0, 1)$. Simetria de axă L şi direcţie $(1, 0, 1)$ este aplicaţia $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 - x_3 + 3, x_2, -x_1 - x_2 + 3)$.

2.7 Exerciţii

Exerciţiul 2.77 În planul afin $\mathbb{R}^2$ considerăm punctele $A = (1, 2)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 1)$ şi $D = (1, 1)$. Arătaţi că orice punct P din plan este combinaţie afină (cu ponderi convenabil alese) a punctelor A, B, C. Rămâne afirmaţia valabilă pentru sistemul de puncte A, B, D?

Exerciţiul 2.78 Studiaţi independenţa afină a sistemelor de puncte de mai jos. Scrieţi apoi ecuaţii parametrice şi implicite pentru acoperirea lor afină şi precizaţi dimensiunea acesteia.

a) $A = (1, 1, 2), B = (1, 3, 1), C = (2, -2, 0)$ din $\mathbb{R}^3$,

b) $M = (1, 1, 1, 1), N = (2, 1, 3, 0), P = (1, 2, 3, 4), Q = (2, 2, 5, 3)$ din $\mathbb{R}^4$.

Exerciţiul 2.79 Scrieţi ecuaţii parametrice, indicaţi subspaţiul director şi precizaţi dimensiunea varietăţilor liniare:

a) $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 2, x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\}$;

b) $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 4\}$.

Exerciţiul 2.80 Scrieţi ecuaţii implicite, indicaţi subspaţiul director şi precizaţi dimensiunea varietăţilor liniare:

a) $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = (s - t + 1, s - t + 2, s - 3),\ s, t \in \mathbb{R}\}$;

b) $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = (s + 1, s - 2, s - 3),\ s \in \mathbb{R}\}$.

Exerciţiul 2.81 Scrieţi ecuaţii parametrice şi implicite pentru dreapta care trece prin punctul $P = (2, 0, 4)$ şi are direcţia dată de vectorul $v = (1, 0, -1)$. Aceeaşi cerinţă pentru dreapta determinată de punctele $A = (1, -1, 2)$ şi $B = (3, 1, -4)$.

Exerciţiul 2.82 Scrieţi ecuaţii parametrice şi implicite pentru planul care trece prin punctul $P = (2, 0, 4)$ şi are subspaţiul director generat de vectorii $v = (1, 0, -1)$ şi $w = (1, 1, -1)$.

Exerciţiul 2.83 În $\mathbb{R}^3$ considerăm punctele $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 2, -2)$ şi $C = (3, 1, 2)$. Arătaţi că A, B, C sunt necoliniare şi scrieţi ecuaţii parametrice şi implicite pentru planul determinat de ele.

Exerciţiul 2.84 Scrieţi ecuaţia implicită a hiperplanului determinat de n puncte afin independente din K^n. Particularizaţi apoi pentru $n = 2$ şi $n = 3$ pentru a obţine ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte din K^2, respectiv ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare din K^3 sub formă de determinant. Concret, arătaţi că punctele indicate mai jos sunt afin independente şi găsiţi ecuaţiile hiperplanelor determinate de acestea:

a) $A = (1, 2), B = (3, 4)$ din $\mathbb{R}^2$;

b) $C = (1, 3, 2), D = (1, 0, 2), E = (2, 1, -2)$ din $\mathbb{R}^3$;

c) $F = (0, -1, 0, 2), G = (1, 1, -1, 0), H = (1, -1, 2, -1), I = (2, -3, 2, 0)$ din $\mathbb{R}^4$.

Exercițiul 2.85 În $\mathbb{R}^3$ considerăm dreapta d având reprezentarea parametrică $d = \{(2 - 2t, 1 + t, 3 - t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Construiți trei drepte d_1, d_2, d_3 astfel ca d_1 să fie paralelă cu d dar distinctă de aceasta, d_2 să fie concurentă cu d într-un singur punct, iar d_3 și d să fie necoplanare. Scrieți apoi ecuații parametrice și implicite pentru sumele $d + d_1, d + d_2$. Ce se poate spune despre varietatea liniară $d + d_3$?

Exercițiul 2.86 Exprimați poziția relativă a două plane descrise parametric cu ajutorul unor condiții de rang (vezi observația 2.36). Concret, stabiliți poziția relativă a planelor $\pi = \{(2 - s - t, 3 - s + t, 3s - 2t) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$, $\pi' = \{(1 - 2s, 2 + 2t, 3 + s - 5t) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$ din $\mathbb{R}^3$.

Exercițiul 2.87 Exprimați poziția relativă a dintre o dreaptă și un plan descrise parametric cu ajutorul unor condiții de rang (vezi observația 2.36). Concret, stabiliți poziția relativă a dreptei $d = \{(2 - t, 3 + 4t, 3 + 3t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ față de planul $\pi = \{(1 - s - t, 2 + s - 2t, 3 + s - t) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$.

Exercițiul 2.88 Considerăm dreapta d având reprezentarea implicită $2x_1 - x_2 - x_3 = 3, x_2 + 3x_3 = 1$. Construiți trei drepte d_1, d_2, d_3 astfel ca d_1 să fie paralelă cu d dar diferită de aceasta, d_2 să fie concurentă cu d într-un singur punct și d_3 să fie necoplanară cu d. Scrieți apoi ecuații parametrice și implicite pentru sumele $d + d_1, d + d_2$. Cu cine este egală varietatea liniară $d + d_3$?

Exercițiul 2.89 Considerăm planul π având reprezentarea implicită $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Construiți trei drepte d_1, d_2, d_3 astfel ca d_1 să fie inclusă în π, d_2 să fie paralelă cu π și neinclusă în acesta, iar d_3 să se intersecteze cu π într-un singur punct. Cine sunt varietățile liniare $\pi + d_1, \pi + d_2, \pi + d_3$?

Exercițiul 2.90 (i) Construiți trei plane în $\mathbb{R}^3$ care să fie concurente în punctul $(1, -1, 2)$.

(ii) Construiți trei plane în $\mathbb{R}^3$ care să se intersecteze două câte două astfel ca dreptele de intersecție să fie paralele.

Exercițiul 2.91 În $\mathbb{R}^4$ considerăm dreptele

$$d : \begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = 2 - 3t \\ x_3 = 1 + t \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad d' : \begin{cases} x_1 = 2 + s \\ x_2 = 1 - 3s \\ x_3 = -2 - s \\ x_4 = 1 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Stabiliți care este poziția relativă a celor două drepte și apoi descrieți (folosind, dacă este cazul, atât reprezentări parametrice cât și implicite) intersecția și suma lor.

Exercițiul 2.92 În $\mathbb{R}^3$ considerăm planele de ecuații $x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$, $2x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$, respectiv $\lambda x_1 + x_2 - 3x_3 + \mu = 0$. Determinați λ și μ astfel ca cele trei plane să aparțină aceluiași fascicol.

Exercițiul 2.93 În $\mathbb{R}^3$ considerăm punctele $A = (-1, 2, 2), B = (1, -1, 0), C = (\lambda + 1, -4, -2)$. Determinați λ astfel ca punctele A, B și C să fie coliniare și în acest caz calculați rapoartele $r(A, B, C)$, $r(C, A, B)$ și $r(C, B, A)$.

Exercițiul 2.94 Scrieți explicit proiecția pe varietatea liniară L cu direcția dată de subspațiul W, precum și simetria asociată, dacă:

a) $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0\}$, $W = L(\{(1,1,1)\}$;

b) $L = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 = 3, x_3 - x_4 = 2\}$, $W = L(\{(1,0,1,2),(1,1,2,0)\})$.

Exercițiul 2.95 Fie punctele $A = (2,1), B = (1,2), C = (2,-1)$ din $\mathbb{R}^2$. Arătați că aceste puncte nu sunt coliniare și stabiliți poziția relativă a punctului $D = (3,1)$ față de triunghiul ABC.

Capitolul 3

Geometrie euclidiană

3.1 Distanţe şi unghiuri în spaţiul $\mathbf{R}^n$

În cele ce urmează vom considera spaţiul $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu produsul scalar standard $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$; norma unui vector x este $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Definiţii şi rezultate analoage au loc pentru orice produs scalar pe $\mathbb{R}^n$; modificări trebuie făcute doar în formulele în care apare explicit expresia produsului scalar cu care lucrăm.

Definiţia 3.1 (i) Fie $A, B \in \mathbb{R}^n$ două puncte. **Distanţa** dintre A şi B este $d(A, B) := \| \overrightarrow{AB} \|$.

(ii) Fie $d, g \subset \mathbb{R}^n$ două drepte cu vectori directori v, respectiv w. **Unghiul** dreptelor d şi g este unicul număr real $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pentru care este verificată relaţia

$$\cos\theta = \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Observaţia 3.2 (Inegalitatea triunghiului) Fie $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ trei puncte. Are loc inegalitatea triunghiului

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

cu egalitate dacă şi numai dacă C este între A şi B.

Observaţia 3.3 Dacă $A = (x_1, \ldots, x_n)$, $B = (y_1, \ldots, y_n)$, atunci avem

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}.$$

Definiţia 3.4 Fie d o dreaptă de vector director $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Cosinusurile unghiurilor făcute de dreaptă cu axele de coordonate

$$\cos\theta_i = \frac{|\langle v, e_i\rangle|}{\|v\| \cdot \|e_i\|} = \frac{v_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}}$$

se numesc **cosinusuri directoare** ale dreptei d.

3.2 Repere carteziene ortonormate

Definiţia 3.5 Fie $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ un reper cartezian. Dacă reperul $\mathcal{B}$ este un reper ortonormat al spaţiului vectorial euclidian $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}$ este un **reper cartezian ortonormat**. Dacă $\mathcal{B}$ este un reper ortonormat drept (strâmb) al spaţiului vectorial euclidian $\mathbb{R}^n$, atunci $\mathcal{R}$ se numeşte **reper cartezian ortonormat drept (strâmb)**.

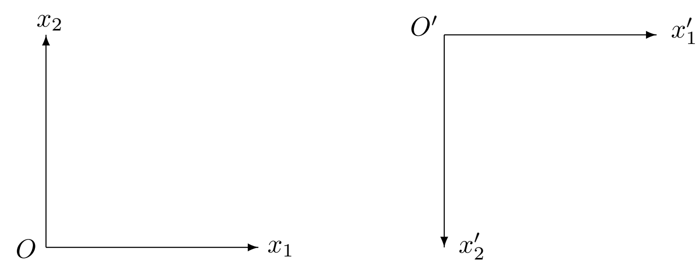

Fig. 1. Sisteme de axe în $\mathbb{R}^2$ asociate unui reper ortonormat drept, respectiv unui reper ortonormat strâmb.

3.3 Perpendicularitatea varietăţilor liniare

Definiţia 3.6 Fie L_1 şi L_2 două varietăţi liniare având subspaţiile directoare W_1, respectiv W_2.

(i) Varietăţile L_1 şi L_2 se numesc **perpendiculare** dacă $W_1 \perp W_2$.

(ii) Varietăţile L_1 şi L_2 se numesc **normale** dacă $W_1^{\perp} = W_2$.

Observaţia 3.7 Dacă varietăţile L_1 şi L_2 din $\mathbb{R}^n$ sunt normale, atunci are loc relaţia $\dim L_1 + \dim L_2 = n$ şi intersecţia dintre L_1 şi L_2 este exact un punct.

Exemplul 3.8 În $\mathbb{R}^3$ considerăm dreptele $d_1 = \{1 - 2t, 2 + 3t, 1 - t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, $d_2 = \{2 - s, s, 1 + 5s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$ şi planul π având ecuaţia implicită $-2x_1 + 3x_2 - x_3 + 11 = 0$. Dreptele d_1 şi d_2 sunt perpendiculare, fără a fi varietăţi liniare normale, în schimb dreapta d şi planul π sunt varietăţi liniare normale, având punctul de intersecţie $(3, -1, 2)$.

Observaţia 3.9 (Condiţii de perpendicularitate) Această observaţie generalizează exemplul 3.8.

• **Condiţia de perpendicularitate dintre două drepte descrise parametric**

Fie d şi d' două drepte având ecuaţiile parametrice

$$d : \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases} t \in \mathbb{R}; \quad d' : \begin{cases} x_1 = a'_1 + t'v'_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = a'_n + t'v'_n \end{cases} t' \in \mathbb{R}.$$

Dreptele d şi d' sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $v_1v'_1 + \ldots + v_nv'_n = 0$.

• **Condiţia de perpendicularitate dintre o dreaptă descrisă parametric şi un hiperplan descris implicit**

Fie d o dreaptă de ecuaţii parametrice

$$d : \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

şi H un hiperplan de ecuaţie implicită $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0$. Dreapta d şi hiperplanul H sunt normale dacă şi numai dacă

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} = 1,$$

deci dacă şi numai dacă vectorul $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ este vector director pentru dreapta d.

Propoziţia 3.10 Fie $A \in \mathbb{R}^n$ un punct şi $L \subset \mathbb{R}^n$ o varietate liniară. Există o unică varietate L' care trece prin P şi este normală la L.

Lema 3.11 Fie $A \in \mathbb{R}^n$ un punct şi $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplan. Fie B punctul în care normala la H prin A intersectează pe H (B este piciorul perpendicularei dusă din A pe H). Atunci

$$d(A, B) = \min\{d(A, C) \,|\, C \in H\}.$$

Definiţia 3.12 Cu notaţiile din lema 3.11, $d(A, B)$ se numeşte **distanţa** de la punctul A la hiperplanul H şi se notează cu $d(A, H)$.

Observaţia 3.13 Dacă $A = (a_1, \ldots, a_n)$ şi hiperplanul H are ecuaţia implicită $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0$, atunci

$$d(A, H) = \frac{|\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n + \alpha_0|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}}.$$

Exemplul 3.14 În $\mathbb{R}^4$ considerăm punctul $A = (1, 2, 2 - 1)$ şi hiperplanul H de ecuaţie $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 6 = 0$. Dreapta d care trece prin A şi este normală pe H are reprezentarea parametrică $d = \{(1 + t, 2 + t, 2 - t, -1 - t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Punctul de intersecţie dintre d şi H este $B = (2, 3, 1, -2)$, iar distanţa de la A la H este $d(A, B) = 2$.

3.4 Izometrii

Definiţia 3.15 O izometrie este o aplicaţie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cu proprietatea că $d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$ pentru orice $A, B \in \mathbb{R}^n$.

Exemplul 3.16 (i) Translaţiile sunt izometrii.

(ii) Simetriile care au axa perpendiculară pe direcţie sunt izometrii.

(iii) Aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 3, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 4)$ este o izometrie a planului euclidian $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.17 O aplicaţie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este izometrie dacă şi numai dacă φ este aplicaţie afină cu urma ortogonală (**urma** lui φ este acea aplicaţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cu proprietatea că $f(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$ pentru orice două puncte O şi P).

Corolarul 3.18 O izometrie a lui $\mathbb{R}^n$ este o aplicaţie de forma $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(X) = A \cdot X + B$, cu A matrice ortogonală.

Observaţia 3.19 (i) O izometrie este o aplicaţie injectivă (rezultă că, în general, proiecţiile **nu** sunt izometrii).

(ii) O izometrie aplică varietăţi liniare în varietăţi liniare de aceeaşi dimensiune.

(iii) O izometrie păstrează relaţia "a fi între".

(iv) Compunerea a două izometrii este o izometrie.

(v) Dacă o izometrie este aplicaţie inversabilă, atunci inversa ei este tot o izometrie.

(vi) Pentru fiecare punct $O \in \mathbb{R}^n$, o izometrie a lui $\mathbb{R}^n$ se descompune în mod unic ca produsul dintre o izometrie cu punct fix O şi o translaţie.

3.5 Proiecţii centrale

Definiţia 3.20 Fie $E \in \mathbb{R}^3$ un punct, $\pi \subset \mathbb{R}^3$ un plan, astfel ca E să nu aparţină lui π şi fie π' planul paralel cu π care trece prin E. **Proiecţia centrală (proiecţia perspectivă)** de centru E şi plan π este acea aplicaţie $p : \mathbb{R}^3 \setminus \pi' \to \pi$ care îi asociază unui punct P din spaţiu (şi care nu îi aparţine lui π') intersecţia dreptei EP cu planul π.

Observaţia 3.21 O proiecţie centrală nu este o izometrie şi nu este o aplicaţie afină. De asemenea, o proiecţie centrală nu este dată de restricţia unei aplicaţii afine la $\mathbb{R}^3 \setminus \pi'$.

Observaţia 3.22 (Construirea unei proiecţii centrale) Presupunem că sunt date observatorul $E(x_1^E, x_2^E, x_3^E)$ precum şi sistemul de puncte

$$\mathcal{P} = \{P_i(x_1^{P_i}, x_2^{P_i}, x_3^{P_i}) \,|\, i = 1, \ldots, N\},$$

raportate la reperul cartezian ortonormat drept $(O; \mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3))$ având sistemul de axe asociat $Ox_1x_2x_3$. Planul de proiecţie va fi ales perpendicular pe dreapta OE.

Pasul 1. Alegerea unei origini convenabile a reperului
În cazul în care originea reperului, O, nu se află în interiorul paralelipipedului minim care conţine sistemul de puncte $\mathcal{P}$, se consideră centrul geometric C al acestui paralelipiped. Coordonatele (x_1^C, x_2^C, x_3^C) ale lui C sunt definite prin formulele

$$x_j^C = \frac{x_j^{\min} + x_j^{\max}}{2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

unde $x_j^{\min} = \min_i(x_j^{P_i})$, $x_j^{\max} = \max_i(x_j^{P_i})$, $j = 1, 2, 3$. Apoi se efectuează schimbarea originii reperului din O în C prin efectuarea unei translaţii de vector $\overrightarrow{OC}$, deci modificarea coordonatelor după formula $x_j \mapsto x_j - x_j^C$ $(i = 1, 2, 3)$. În continuare, C va fi redenumit O, deci coordonatele vor fi considerate în raport cu reperul $(O; \mathcal{B})$.

Pasul 2. Construirea reperului de observare. Exprimarea coordonatelor punctelor în noul reper
Scopul celui de-al doilea pas este de a construi un nou reper, numit reper de observare, având originea în punctul E şi axele convenabil alese şi de a determina coordonatele punctelor în noul reper. Ideea fundamentală este ca una din axe (spre exemplu cea de-a treia) să aibă ca suport dreapta EO: scopul acestei alegeri va deveni clar mai târziu, în Pasul 3. De asemenea, pentru ca reperul de observare să fie ortonormat, celelalte două axe vor trebui alese într-un mod cât mai convenabil în planul perpendicular pe EO care trece prin E, deci în planul tangent la sfera de centru O şi rază $\|OE\|$ în punctul O.

Pentru aceasta, considerăm **coordonatele sferice** (ρ, φ, θ) ale lui E în raport cu punctul O, unde

- $\rho \in (0, \infty)$ reprezintă **distanţa** de la punctul O la observatorul E;

• $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ reprezintă **latitudinea** punctului E, cu alte cuvinte, unghiul (orientat) dintre dreapta OE şi planul Ox_1x_2;

• $\theta \in [0, 2\pi)$ reprezintă **longitudinea** lui E, adică măsura unghiului dintre planele Ox_1x_3 şi OEx_3.

Relaţia dintre coordonatele carteziene (x_1^E, x_2^E, x_3^E) şi cele sferice (ρ, φ, θ) ale lui E este dată de formulele

$$\begin{cases} x_1^E = \rho\cos\varphi\cos\theta \\ x_2^E = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ x_3^E = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Aceste relaţii permit exprimarea coordonatelor sferice în funcţie de cele carteziene: de exemplu, $\rho = \sqrt{\sum_i (x_i^E)^2}$. Alternativ, ca date de intrare, pot fi introduse coordonatele sferice ale lui E în loc de coordonatele carteziene.

În acest moment poate fi construit reperul de observare $(E; \mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3))$: originea sa este punctul E, vectorii u_1, respectiv u_2, sunt versorii vectorilor tangenţi la cercul paralel, respectiv la meridianul prin E de pe sfera de centru O şi rază ρ, în timp ce vectorul u_3 este versorul lui $\overrightarrow{EO}$. Determinăm în continuare relaţiile dintre vectorii reperului $\mathcal{B}$ şi cei ai reperului $\mathcal{U}$. Cercul paralel şi cercul meridian prin E de pe sfera menţionată sunt curbele parametrizate (în raport cu reperul $Ox_1x_2x_3$)

$$c_p(t) = (\rho\cos\varphi\cos t, \rho\cos\varphi\sin t, \rho\sin\varphi),$$

$$c_m(t) = (\rho\cos t\cos\theta, \rho\cos t\sin\theta, \rho\sin t),$$

iar vectorii tangenţi la aceste două curbe în punctul $c(\theta) = E$ sunt

$$c_p'(\theta) = (-\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\cos\theta, 0),$$

$$c_m'(\varphi) = (-\rho\sin\varphi\cos\theta, -\rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi).$$

Vectorul $\overrightarrow{OE}$ are, în reperul $\mathcal{B}$, componentele $(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi)$. Aceste consideraţii arată că, în reperul $\mathcal{B}$, vectorii u_1, u_2, u_3 au componentele:

$$\begin{aligned} u_1 &= (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ u_2 &= (-\sin\varphi\cos\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi) \\ u_3 &= (-\cos\varphi\cos\theta, -\cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi), \end{aligned}$$

cu alte cuvinte,

$$\begin{aligned} u_1 &= -\sin\theta\, b_1 + \cos\theta\, b_2 \\ u_2 &= -\sin\varphi\cos\theta\, b_1 - \sin\varphi\sin\theta\, b_2 + \cos\varphi\, b_3 \\ u_3 &= -\cos\varphi\cos\theta\, b_1 - \cos\varphi\sin\theta\, b_2 - \sin\varphi\, b_3, \end{aligned}$$

deci matricea de trecere de la reperul $\mathcal{B}$ la reperul $\mathcal{U}$ este

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{U}}$ este o matrice ortogonală cu determinantul egal cu -1, ceea ce arată că reperul $\mathcal{U}$ este un reper ortonormat strâmb. Relaţia dintre componentele unui vector v în cele două repere $\mathcal{B}$, respectiv $\mathcal{U}$, se obţine din şirul de egalităţi

$$(v)_{\mathcal{U}} = \mathcal{M}_{\mathcal{U}\mathcal{B}} \cdot (v)_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{U}}^{-1} \cdot (v)_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{U}}^{t} \cdot (v)_{\mathcal{B}}. \tag{3.1}$$

Fie acum P un punct arbitrar din spaţiu, având coordonatele (x_1, x_2, x_3) în reperul $(O;\mathcal{B})$, respectiv (y_1, y_2, y_3) în reperul $(E;\mathcal{U})$. Relaţia dintre ele o obţinem în două etape:

− în prima etapă schimbăm doar originea reperului, determinând coordonatele lui P în reperul $(E;\mathcal{B})$:

$$x_i' = x_i - x_i^E, \qquad i = 1, 2, 3; \tag{3.2}$$

− în cea de-a doua etapă determinăm coordonatele (y_1, y_2, y_3) ale lui P în reperul $(E;\mathcal{U})$ prin relaţia

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathcal{M}^t_{\mathcal{B}\mathcal{U}} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Această formulă se bazează pe egalităţile (3.1) şi pe faptul că, prin definiţie, coordonatele lui P în reperul $(E;\mathcal{U})$ (respectiv $(E;\mathcal{B})$) sunt componentele vectorului $\overrightarrow{EP}$ în reperul $\mathcal{U}$ (respectiv $\mathcal{B}$).

Relaţia (3.3) permite determinarea coordonatelor punctelor din sistemul $\mathcal{P}$ în reperul de observare.

Pasul 3. Realizarea proiecţiei pe planul π

Planul π pe care se realizează proiecţia este considerat perpendicular pe dreapta OE, astfel ca O şi E să fie de o parte şi de alta a sa. Această alegere a lui π este în concordanţă cu faptul că observatorul E "priveşte" în direcţia lui O, care este situat în interiorul paralelipipedului minim determinat de sistemul de puncte $\mathcal{P}$, deci observatorul "vizualizează" sistemul de puncte $\mathcal{P}$. Notăm cu d distanţa de la punctul E la planul π. În reperul cartezian $(E;\mathcal{U})$, planul π, fiind perpendicular pe axa Ey_3, are ecuaţia $y_3 = d$, iar planul π' care trece prin E şi este paralel cu π are ecuaţia $y_3 = 0$.

Fie $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \pi'$ un punct care, în reperul $(E;\mathcal{U})$, are coordonatele (y_1, y_2, y_3). Proiecţia centrală a lui P este punctul P' aflat la intersecţia dreptei PE cu planul π. Coordonatele sale sunt

$$\left(\frac{y_1}{y_3}d, \frac{y_2}{y_3}d, d\right). \tag{3.4}$$

În final, introducem în planul π sistemul de coordonate $E'y_1'y_2'$. Acesta este obţinut proiectând pe planul π, de-a lungul dreptei OE (deci ortogonal), reperul $Ey_1y_2y_3$. În acest reper, coordonatele lui P' sunt

$$\left(\frac{y_1}{y_3}d, \frac{y_2}{y_3}d\right). \tag{3.5}$$

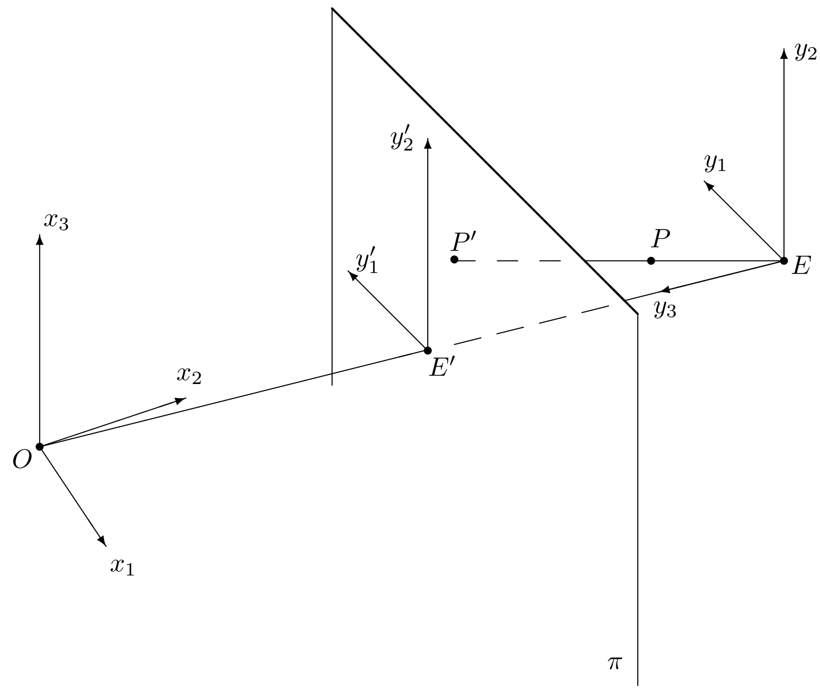

Fig. 2. Sistemele de coordonate $Ox_1x_2x_3$, $Ey_1y_2y_3$ şi $E'y_1'y_2'$. Punctul P' este proiecţia centrală a punctului P pe planul π.

Exemplul 3.23 Considerăm un sistem de 8 puncte care în reperul ortonormat iniţial $Ox_1x_2x_3$ au coordonatele

$$P_1(1,1,1),\ P_2(-1,1,1),\ P_3(-1,-1,1),\ P_4(1,-1,1),$$

$$P_5(1,1,-1),\ P_6(-1,1,-1),\ P_7(-1,-1,-1),\ P_8(1,-1,-1)$$

şi care reprezintă vârfurile unui cub având centrul în punctul O şi feţele paralele cu planele de coordonate. Considerăm că observatorul E are în acest reper coorodnatele sferice $\rho = 5, \varphi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$, ceea ce înseamnă că E are coordonatele carteziene $x_1^E = 0, x_2^E = 5, x_3^E = 0$; în particular punctul E este situat pe axa Ox_2. De asemenea, vom lua $d = 3$, cu alte cuvinte π este planul de ecuaţie $x_2 = 2$ (este perpendicular pe dreapta OE şi este situat între O şi E, la distanţa de 3 unităţi de observatorul E). Cum în acest caz centrul paralelipipedului minim coincide cu originea sistemului de coordonate, nu mai este necesar să efectuăm translaţia de la pasul 1 şi trecem direct la pasul 2. Folosind notaţiile de mai înainte, avem

$$\mathcal{M}_{\mathcal{BU}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\mathcal{BU}}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Coordonatele celor opt puncte în reperul $(E;\mathcal{B})$, bazate pe formulele (3.2), sunt respectiv:

$$P_1(1,-4,1),\ P_2(-1,-4,1),\ P_3(-1,-6,1),\ P_4(1,-6,1),$$

$$P_5(1,-4,-1),\ P_6(-1,-4,-1),\ P_7(-1,-6,-1),\ P_8(1,-6,-1),$$

iar coordonatele în reperul $(E;\mathcal{U})$, date de formulele (3.3), sunt

$$P_1(-1,1,4),\ P_2(1,1,4),\ P_3(1,1,6),\ P_4(-1,1,6),$$

$$P_5(-1,-1,4),\ P_6(1,-1,4),\ P_7(1,-1,6),\ P_8(-1,-1,6).$$

În continuare, utilizând relaţiile (3.4) şi (3.5), se obţin coordonatele punctelor de proiecţie în sistemul de coordonate $E'y_1'y_2'$ din planul π

$$P_1'\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right),\ P_2'\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right),\ P_3'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ P_4'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

$$P_5'\left(-\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right),\ P_6'\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right),\ P_7'\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ P_8'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Cum planul de proiecţie a fost ales paralel cu feţele $P_1P_2P_6P_5$, respectiv $P_4P_3P_7P_8$, ne aşteptăm ca proiecţiile acestor feţe să fie tot pătrate (acest fapt nu rămâne valabil pentru o configuraţie arbitrară!). Într-adevăr, punctele P_1', P_2', P_6', P_5', (reprezentând proiecţiile punctelor situate pe faţa mai apropiată de observator) determină un pătrat cu latura de $\frac{3}{2}$ în planul π, în vreme ce P_4', P_3', P_7', P_8' determină un pătrat cu latura 1 în acest plan.

3.6 Exerciţii

Exerciţiul 3.24 Cum poate fi definit unghiul dintre o dreaptă şi un plan din $\mathbb{R}^3$? Care este condiţia de perpendicularitate dintre două plane descrise implicit?

Exerciţiul 3.25 Determinaţi o dreaptă care trece prin punctul $P = (2,1,1)$ şi face cu axa Ox_1 un unghi de $\frac{\pi}{4}$. Este soluţia unică?

Exerciţiul 3.26 În $\mathbb{R}^3$ considerăm punctul $A = (1,3,2)$, dreapta d având reprezentarea parametrică $d = \{(1-t, 2+t, -1-t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$ şi planul H determinat de d şi de punctul $P = (1,1,1)$. Scrieţi ecuaţiile varietăţilor care trec prin A şi sunt normale la d, respectiv la H.

Exerciţiul 3.27 Determinaţi distanţa de la $A = (1,-1,0)$ la planul determinat de punctele $P = (1,1,1), Q = (1,2,0), R = (0,2,1)$.

Exerciţiul 3.28 În $\mathbb{R}^3$ considerăm dreptele $d = \{(1+s, 2-2s, 1+s)\,|\,s \in \mathbb{R}\}$, $g = \{(1-2t, t, 3+t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$. Arătaţi că dreptele d şi g sunt necoplanare şi scrieţi ecuaţiile perpendicularei lor comune.

Exerciţiul 3.29 Fie $P = (-1,0,1)$ şi H planul de ecuaţie $x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$.
a) Determinaţi ecuaţiile dreptei d care trece prin P normală la H.
b) Scrieţi explicit ecuaţiile proiecţiei făcute pe H paralel cu d şi ale simetriei asociate.

Exerciţiul 3.30 Determinaţi punctele B şi C din planul euclidian $\mathbb{R}^2$ astfel ca ABC să fie un triunghi echilateral cu centrul de greutate $O = (0,0)$, unde $A = (0,\sqrt{3})$ şi determinaţi toate izometriile planului care lasă triunghiul ABC invariant.

Exerciţiul 3.31 În planul $\mathbb{R}^2$ considerăm punctele $A = (1,0), B = (0,1), C = (-1,0), D = (0,-1)$. Arătaţi că $ABCD$ este un pătrat şi determinaţi izometriile planului care lasă acest pătrat invariant.

Capitolul 4

Conice

Definiţia 4.1 O **conică** (în $\mathbb{R}^2$) este o mulţime de puncte ale căror coordonate (x_1, x_2) verifică o ecuaţie de forma

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0, \tag{4.1}$$

unde $(a_{ij})_{i,j}$ sunt coeficienţi reali astfel ca $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$.

Definiţia 4.2 Pentru conica descrisă de ecuaţia (4.1) vom nota

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matricea a se numeşte **matricea conicei**, iar matricea A se numeşte **matricea extinsă a conicei**. Vom folosi, de asemenea, următoarele notaţii:

$$\delta := \det a, \quad \Delta := \det A, \quad r := \operatorname{rang} a, \quad R := \operatorname{rang} A.$$

Exemplul 4.3

(i) $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{25} - 1 = 0$. Avem $\delta = \dfrac{1}{225}$, $\Delta = -\dfrac{1}{225}$, $r = 2$, $R = 3$.

(ii) $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 - 5 = 0$. Avem $\delta = 12$, $\Delta = -140$, $r = 2$, $R = 3$.

(iii) $x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1 - 4 = 0$. Avem $\delta = -2$, $\Delta = 12$, $r = 2$, $R = 3$.

(iv) $x_2^2 - 6x_1 = 0$. Avem $\delta = 0$, $\Delta = -9$, $r = 1$, $R = 3$.

(v) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4 = 0$. Avem $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $r = 1$, $R = 2$.

Definiţia 4.4 Un punct $P_0 \in \mathbb{R}^2$ se numeşte **centru** al unei conice dacă simetria de centru P_0 invariază conica, i.e. dacă pentru orice punct P al conicei rezultă că $2P_0 - P$ (simetricul lui P faţă de P_0) este, la rândul său, un punct al conicei.

Propoziţia 4.5 Un punct $P_O = (x_{10}, x_{20})$ este centru al conicei dacă şi numai dacă perechea (x_{10}, x_{20}) este soluţie a sistemului

$$\begin{cases} a_{11}x_{10} + a_{12}x_{20} + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_{10} + a_{22}x_{20} + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Corolarul 4.6 (i) Mulţimea centrelor unei conice formează o varietate liniară (mulţimea vidă, un punct sau o dreaptă).

(ii) O conică are centru unic dacă şi numai dacă $\delta \neq 0$.

Definiţia 4.7 O conică se numeşte **nedegenerată** dacă $\Delta \neq 0$. În cazul în care $\Delta = 0$, conica se numeşte **degenerată**.

Propoziţia 4.8 (Clasificarea afină a conicelor)

(i) Numerele δ, Δ, r şi R asociate unei ecuaţii de forma (4.1) nu se modifică în urma unei schimbări afine de coordonate.

(ii) Printr-o schimbare de coordonate convenabil aleasă şi înmulţind, eventual, ecuaţia obţinută cu o constantă, orice ecuaţie de forma (4.1) poate fi adusă la una din formele de mai jos:

R	r	Forma canonică afină a conicei	Denumire
3	2	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	Elipsă
		$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	Hiperbolă
		$-x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	Elipsă vidă
3	1	$x_1^2 - 2x_2 = 0$	Parabolă
2	2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	Punct dublu
		$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Pereche de drepte secante
2	1	$x_1^2 - 1 = 0$	Pereche de drepte paralele
		$-x_1^2 - 1 = 0$	Pereche de drepte vidă
1	1	$x_1^2 = 0$	Dreaptă dublă

Anexa A

Proiecte

1. (Baze)

Input: $n \in \mathbb{N}$ $(n = 2; 3)$, vectori $v_1, \ldots, v_n, w \in \mathbb{R}^n$.

Output: -Stabileşte dacă $\{v_1, \ldots, v_n\}$ este o bază lui $\mathbb{R}^n$ şi în caz afirmativ scrie vectorul w ca o combinaţie liniară a vectorilor $v_1, \ldots, v_n$.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

2. (Repere în $\mathbb{R}^2$)

Input: vectori $b_1, b_2, v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^2$.

Output: -Stabileşte dacă $\{b_1, b_2\}$, respectiv $\{v_1, v_2\}$ sunt baze ale lui $\mathbb{R}^2$. În caz afirmativ, precizează dacă reperele (b_1, b_2) şi (v_1, v_2) sunt la fel orientate sau nu şi scrie componentele vectorului w în cele două repere.
-Reprezentare grafică.

3. (Subspaţii vectoriale)

Input: $n \in \mathbb{N}$ $(n = 2; 3)$, un subspaţiu vectorial W al lui $\mathbb{R}^n$ dat sub formă parametrică.

Output: -Scrie ecuaţii implicite pentru W.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

4. (Sumă directă)

Input: Subspaţii vectoriale W_1, W_2 ale lui $\mathbb{R}^2$ (unul parametric, celălalt implicit), un vector $w \in \mathbb{R}^2$.

Output: -Stabileşte dacă $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ şi în caz afirmativ scrie vectorul w ca suma dintre un vector din W_1 şi unul din W_2.
-Reprezentare grafică.

5. (Aplicaţii liniare)

Input: $n \in \mathbb{N}$ $(n = 2; 3)$, o aplicaţie liniară $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, vectori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$.

Output: -Calculează $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f$, $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f$ şi vectorii $f(v_1), f(v_2)$, precizând dacă sunt liniar independenţi sau nu.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

6. (Proiecţii)

Input: Subspaţii vectoriale W_1, W_2 ale lui $\mathbb{R}^2$.

Output: -Stabileşte dacă $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ şi în caz afirmativ determină proiecţia pe W_1 de-a lungul lui W_2.
-Reprezentare grafică.

7. (Drepte distincte determinate de q puncte)

Input: $n, q \in \mathbb{N}$ $(n = 2; 3)$, puncte $P_1, \ldots, P_q \in \mathbb{R}^n$.

Output: -Stabileşte câte drepte distincte formează aceste puncte.
-Pentru $n = 2$ scrie ecuaţiile acestor drepte şi realizează o reprezentare grafică.

8. (Reper cartezian)

Input: n $(n = 2; 3)$, puncte $O, P \in \mathbb{R}^n$, vectori $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$.

Output: Stabileşte dacă $b_1, \ldots, b_n$ sunt liniar independenţi şi în caz afirmativ determină cooordonatele punctului P în reperul cartezian $(O; (b_1, \ldots, b_n))$.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

9. (Varietăţi liniare)

Input: $n \in \mathbb{N}$ $(n = 2; 3)$, o varietate liniară L din $\mathbb{R}^n$ descrisă prin ecuaţii implicite.

Output: -Scrie ecuaţii parametrice pentru L.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

10. (Suma unor varietăţi liniare)

Input: $n \in \mathbb{N}$ $(n = 2; 3)$, varietăţi liniare L_1, L_2 ale lui $\mathbb{R}^n$.

Output: -Calculează dimensiunile varietăţilor liniare $L_1, L_2, L_1 \cap L_2, L_1 + L_2$ şi precizează dacă $\mathbb{R}^n = L_1 + L_2$.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

11. (Poziţie relativă a unor drepte)

Input: $n \in \mathbb{N}$ $(n = 2; 3)$, două drepte din $\mathbb{R}^n$.

Output: -Stabileşte poziţia relativă a celor două drepte. În cazul în care se intersectează determină punctul de intersecţie.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

12. (Poziţia relativă a unei drepte faţă de un triunghi)

Input: O dreaptă şi vârfurile unui triunghi din $\mathbb{R}^2$.

Output: -Precizează poziţia relativă a dreptei faţă de triunghi.
-Reprezentare grafică.

13. (Poziţia relativă a două triunghiuri)

Input: Vârfurile a două triunghiuri din $\mathbb{R}^2$.

Output: -Precizează dacă interioarele celor două triunghiuri au intersecţia nevidă, în caz afirmativ specificând dacă unul dintre ele este inclus în interiorul celuilalt.
-Reprezentare grafică.

14. (Acoperire convexă şi poligon)

Input: Patru puncte din planul $\mathbb{R}^2$.

Output: Desenează frontiera acoperirii convexe a celor patru puncte precum şi poligonul (poligoanele, dacă este cazul) determinat(e) de acestea.

15. (Paralelipiped minim / Minmax box)

Input: $n, q \in \mathbb{N}$ $(n = 2; 3)$, o mulţime de puncte $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_q\}$ din $\mathbb{R}^n$; un punct $Q \in \mathbb{R}^n$.

Output: -Coordonatele vârfurilor paralelipipedului minim determinat de sistemul de puncte $\mathcal{P}$.
-Decide dacă Q este situat în interiorul, pe frontiera sau în exteriorul acestui paralelipiped minim.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

16. (Ordinea a patru puncte coliniare)

Input: n ($n = 2; 3$), patru puncte din $\mathbb{R}^n$.

Output: -Stabileşte dacă cele patru puncte sunt coliniare. În caz afirmativ indică ordinea lor pe dreapta pe care sunt situate.
-Pentru $n = 2$ reprezentare grafică.

17. (Imaginea unei drepte printr-o aplicaţie afină)

Input: O aplicaţie afină f a lui $\mathbb{R}^2$, o dreaptă d din $\mathbb{R}^2$.

Output: Determină imaginea lui d prin f şi reprezintă grafic, atât pe d cât şi pe $f(d)$.

18. (Transformări afine)

Input: Cinci puncte O, A, B, A', B' din $\mathbb{R}^2$.

Output: -Stabileşte dacă există o transformare afină f astfel ca $f(\Delta OAB) = \Delta OA'B'$. În caz afirmativ, scrie explicit aplicaţia f.
-Reprezentare grafică.

19. (Proiecţia unor puncte)

Input: Un plan π, o dreaptă d, trei puncte A, B, C din $\mathbb{R}^3$.

Output: Calculează $p(A), p(B), p(C)$, unde p este proiecţia făcută pe π paralel cu d şi reprezintă grafic aceste trei puncte (în planul π).

20. (Proiecţia unor drepte)

Input: Un plan π, trei drepte d, d_1, d_2 din $\mathbb{R}^3$.

Output: Stabileşte natura şi poziţia relativă a varietăţilor liniare $p(d_1)$ şi $p(d_2)$, unde p este proiecţia făcută pe π paralel cu d şi le reprezintă grafic (în planul π).

21. (Simetrii)

Input: Două drepte d_1, d_2 şi trei puncte A, B, C din planul $\mathbb{R}^2$.

Output: -Determină punctele $s(A), s(B), s(C)$, unde s este simetria de axă d_1 şi direcţie d_2.
-Reprezentare grafică.

Bibliografie

[1] N. Abramescu, *Geometrie analitică*, Editura Universităţii Bucureşti, 1944.

[2] L. Bădescu, *Lecţii de Geometrie*, Editura Universităţii Bucureşti, 2000.

[3] M. Craioveanu şi I. D. Albu, *Geometrie afină şi euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1982.

[4] V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[5] Gh. Galbură şi F. Radó, *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[6] R. Miron, *Geometrie analitică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[7] L. Ornea şi A. Turtoi, *O introducere în geometrie*, Editura Theta, Bucureşti, 2000.

[8] E. Petrişor, *Modelare geometrică algoritmică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 2001.

[9] I. P. Popescu, *Geometrie afină şi euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1984.

[10] I. D. Teodorescu, *Geometrie analitică şi elemente de algebră liniară, Culegere de probleme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[11] A. Turtoi şi D.M. Petroşanu, *Elemente de geometrie*, Editura Fair Partners, Bucureşti, 2006.

[12] C. Udrişte, *Probleme de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[13] Gh. Vrănceanu, *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.