Introducere în teoria fasciculelor

Seminar 2
Luni, 24.02.2014.

---

1. (Pregătiri pentru introducerea conceptelor de fibră a unui fascicul şi de spaţiu etalat) Fie X un spaţiu topologic şi $\mathcal{F}$ un prefascicul de bază X.

a) Demonstraţi că $\sim$ (definită prin $(U, s_U) \sim (V, s_V)$, cu $U, V \in \mathcal{V}(x), s_U \in \mathcal{F}(U), s_V \in \mathcal{F}(V) \Leftrightarrow$ există $W \subset U \cap V$ astfel ca $\rho^U_W(s_U) = \rho^V_W(s_W)$) este o relaţie de echivalenţă.

b) Fie $V \subset U$ doi deschişi, $s \in \mathcal{F}(U)$. Dacă $t = \rho^U_V(s)$, atunci $t_x = s_x$, pentru orice $x \in V$.

c) Fie $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(V)$ secţiuni ale lui $\mathcal{F}$. Demonstraţi că $\{x \in X | s_x = t_x\}$ este o mulţime deschisă.

2. (Verificarea proprietăţilor de spaţiu etalat) Fie X un spaţiu topologic, $\mathcal{F}$ un prefascicul. Fie $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ aplicaţia naturală. Demonstraţi că π este: (i) surjectivă; (ii) continuă; (iii) homeomorfism local.

3. (Inelul de germeni de funcţii $\mathcal{C}^\infty$) Fie X o varietate diferenţiabilă şi fie $\mathscr{E} := \mathcal{C}^\infty_X$ fasciculul (de germeni) de funcţii $\mathcal{C}^\infty$ pe X. Demonstraţi că, pentru orice $x \in X$, fibra $\mathscr{E}_x$ este un inel local, descriind unicul ideal maximal.

4. (Prefascicolul asociat unui spaţiu etalat) Fie $(\mathcal{S}, \pi)$ un spaţiu etalat. Detaliaţi construcţia prefascicului de secţiuni $\mathcal{S}'$ asociat şi verificaţi axiomele de prefascicul.

5. (Morfism de prefascicule de la un prefascicul la fasciculul de secţiuni asociat) Fie $\mathcal{F}$ un prefascicul, $\widetilde{\mathcal{F}}'$ fasciculul de secţiuni asociat şi fie $\Phi = (\Phi_U)$ definită prin $\Phi_U(s) = \widetilde{s}$ ($\forall U \subset X$ deschis). Demonstraţi că Φ este un morfism de prefascicule.

6. (Verificarea axiomei de separare pentru spaţii etalate: diferenţa dintre cazul $\mathcal{C}^\infty$ şi cazul $\mathcal{C}^\omega$)

a) Considerăm o varietate *diferenţiabilă* X şi fasciculul $\mathcal{C}^\infty_X$. Arătaţi, printr-un exemplu, că topologia de pe spaţiul etalat asociat *nu este* Hausdorff.

b) Considerăm o varietate *analitică* X şi fasciculul $\mathcal{C}^\omega_X$. Demonstraţi că topologia de pe spaţiul etalat asociat *este* Hausdorff.

7. (Exemple de fascicule asociate unor prefascicule) Determinaţi fasciculizatul pentru:

a) prefascicolul de funcţii constante;

b) prefascicolul de la Exerciţiul 5, Seminar 1.