Introducere în teoria fasciculelor

Seminar 3
Luni, 03.03.2014.

---

1. (Un morfism de (pre)fascicule induce un morfism de spaţii etalate) Fie X un spaţiu topologic, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ prefascicule de bază X şi $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfism de prefascicule.

a) Demonstraţi că f induce în mod natural aplicaţii la nivel de fibre $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ($x \in X$, arbitrar).

b) Demonstraţi că dacă f este morfism de prefascicule de grupuri abeliene (etc.), atucni f_x este morfism de grupuri (etc.), pentru orice x.

2. (Nucleul este fascicul; descrierea fibrelor nucleului) Fie X un spaţiu topologic, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ fascicule de grupuri abeliene şi $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfism de fascicule de grupuri abeliene.

a) Demonstraţi că prefasciculul $\ker f$ verifică axioma (F2). Ce ipoteze pentru $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ au fost necesare?

b) Demonstraţi că $(\ker f)_x \simeq \ker(f_x)$, pentru orice x.

3. (Proprietăţi de universalitate) Fie $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfism de (pre)fascicule de grupuri abeliene (etc.). Demonstraţi proprietatea de universalitate corespunzătoare pentru $\ker f$, respectiv pentru $\operatorname{coker} f$.

4. (Morfisme surjective de fascicule)

a) Demonstraţi teorema de caracterizare a morfismelor surjective de fascicule.

b) Arătaţi că dacă un morfism de fascicule este "surjectiv la nivelul deschişilor", el este surjectiv.

5. (Exemplu) Considerăm $\mathcal{F} = \mathcal{C}^{\omega}_{\mathbb{R}}$ ca fascicul de grupuri abeliene şi fie $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$; $f(x) \mapsto xf(x)$. Stabiliţi dacă φ este morfism de fascicule de grupuri abeliene şi, în caz afirmativ, determinaţi $\ker \varphi$ şi $\operatorname{coker} \varphi$.