

Introducere în teoria fasciculelor

Seminar 4

Luni, 10.03.2014.

- (Imagine directă)** Fie X, Y spații topologice, $\varphi : X \rightarrow Y$ o aplicație continuă și \mathcal{F}, \mathcal{G} fascicule de bază X . Detaliați construcția morfismului de fascicule $\varphi_* : \varphi_*\mathcal{F} \rightarrow \varphi_*\mathcal{G}$.
- (Exemplu - imagine directă și imagine reciprocă)** Fie $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$, $\varphi(z) = z^2$. Determinați imaginea directă $\varphi_*\mathbb{Z}_{S^1}$ și imaginea inversă $\varphi^*\mathbb{Z}_{S^1}$ pentru fasciculul constant de fibră \mathbb{Z} . Ce se poate spune despre fasciculele $\varphi_*\varphi^*\mathbb{Z}_{S^1}$ și $\varphi^*\varphi_*\mathbb{Z}_{S^1}$? Puteți generaliza acest rezultat?
- (Legătura dintre imagine reciprocă și restricție)** Fie X un spațiu topologic, $U \subset X$ deschisă, $i_U : U \hookrightarrow X$ aplicația de incluziune și fie \mathcal{F} un fascicul pe X . Demonstrați că există un izomorfism natural $\mathcal{F}|_U \simeq i_U^*\mathcal{F}$ între restricția lui \mathcal{F} la U și imaginea reciprocă a lui \mathcal{F} prin aplicația de incluziune i_U .
- (Izomorfismele naturale pentru fasciculul $\mathcal{H}om$ depind de categoria considerată)** Fie X un spațiu topologic și fie \mathcal{F} un fascicul pe X . Demonstrați:
 - Dacă \mathcal{F} este un fascicul de mulțimi pe X , atunci $\mathcal{H}om(\{p\}_X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$.
 - Dacă \mathcal{F} este un fascicul de grupuri abeliene pe X , atunci $\mathcal{H}om_{Ab_X}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$ (ca fascicule de grupuri abeliene).
 - Dacă \mathcal{F} este un \mathcal{O}_X -Modul, atunci $\mathcal{H}om_{Mod_{\mathcal{O}_X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$ (ca \mathcal{O}_X -module).
- (Fasciculul $\mathcal{H}om$ și trecerea la fibre)** Fie X un spațiu topologic, \mathcal{F}, \mathcal{G} fascicule pe X și $x \in X$ fixat.
 - Prefasciculul $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ este fascicul dacă \mathcal{F} sau \mathcal{G} sunt doar prefascicule? (Indicație: se poate aplica proprietatea de universalitate a fasciculului asociat unui prefascicul?).
 - Explicați cum este construită aplicația naturală $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$.
 - Dați un exemplu în care aplicația de la b) nu este bijectivă.