Introducere în teoria fasciculelor

Seminar 8
Luni, 07.04.2014.

---

1. (**Rezoluţia canonică şi şiruri exacte scurte asociate**) Demonstraţi că şirul

$$0 \to \mathcal{Z}^q(\mathcal{F}) \to \mathcal{W}^q(\mathcal{F}) \to \mathcal{Z}^{q+1}(\mathcal{F}) \to 0$$

este exact pentru orice $q \geq 0$.

2. (**Fasciculul diferenţial indus de o rezoluţie**) Fie $\mathcal{F}$ un fascicul de grupuri abeliene de bază X şi fie $(\mathcal{L}^\bullet, j)$ o rezoluţie a lui $\mathcal{F}$, i.e. fie şirul exact de fascicule

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{L}^1 \longrightarrow \dots. \tag{1}$$

a) Demonstraţi că rezoluţia (1) defineşte un fascicul diferenţial $\mathcal{L}^\bullet$ pentru care $\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\bullet) = \mathcal{F}$ şi $\mathcal{H}^n(\mathcal{L}^\bullet) = 0$ pentru orice $n \neq 0$.

b) Demonstraţi că un şir de forma (1) este o rezoluţie dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile (i)-(iii) de mai jos:

(i) există aplicaţii injective de la secţiunile lui $\mathcal{F}$ la secţiunile lui $\mathcal{L}^0$ (la nivel de deschişi);

(ii) dată o secţiune $s \in \mathcal{L}^0(U)$ are loc echivalenţa: s este secţiune a lui $\mathcal{F} \Leftrightarrow ds = 0$;

(iii) dată o secţiune $s \in \mathcal{L}^n(U)$ $(n \geq 1)$ are loc echivalenţa: $ds = 0 \Leftrightarrow$ pentru orice deschis $V \subset U$ "suficient de mic" există $\sigma \in \mathcal{L}^{n-1}(V)$ astfel ca $d\sigma = s|_V$ pe V.

3. (**Rezoluţii şi produs tensorial**) Fie X un spaţiu topologic şi $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \dots$ o rezoluţie a fasciculului $\mathbb{Z}_X$, cu fascicule de grupuri abeliene fără torsiune (i.e. $\mathcal{L}^n_x$ este fără torsiune pentru orice n şi orice x). Demonstraţi că pentru orice fascicul $\mathcal{F}$, $0 \to \mathbb{Z}_X \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{F} \to \mathcal{L}^0 \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{F} \to \mathcal{L}^1 \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{F} \to \dots$ este o rezoluţie a fasciculului $\mathbb{Z}_X \otimes_{\mathbb{Z}_X} \mathcal{F}$.

4. (**De la rezoluţii de fascicule la complexe de colanţuri**) Fie $\mathcal{F}$ un fascicul de grupuri abeliene de bază X şi fie $(\mathcal{W}^\bullet(\mathcal{F}), j^0)$ rezoluţia canonică a lui $\mathcal{F}$. Detaliaţi cum $\Gamma(X, \mathcal{W}^\bullet(\mathcal{F}))$ generează, în mod natural, un complex de colanţuri.

5. (**H^0 şi Γ**) Fie $\mathcal{F}$ un fascicul de grupuri abeliene de bază X. Demonstraţi că $H^0(X, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{F})$.

6. (**Coomologia cu valori în produsul direct**) Fie $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ o familie local finită de fascicule de grupuri abeliene şi $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Demonstraţi că $H^q(X, \mathcal{F}) \simeq \prod_{i \in I} H^q(X, \mathcal{F}_i)$, pentru orice q. (Indicaţie: stabiliţi mai întâi o legătură între $\mathcal{W}^0(\mathcal{F})$ şi familia de fascicule $(\mathcal{W}^0(\mathcal{F}_i))_{i \in I}$).