Introducere în teoria fasciculelor

Seminar 11
Luni, 05.05.2014.

---

1. (Teorema lui Dolbeault: $H^q(X,\Omega_X^p) \simeq H_{\bar\partial}^{p,q}(X)$)
Fie X o varietate complexă. Pentru $p \geq 0$ se notează cu Ω_X^p fasciculul de germeni de p-forme olomorfe. De asemenea, pentru $p,q \geq 0$ se notează cu $\mathcal{A}_X^{p,q}$, respectiv $\mathcal{Z}_{\bar\partial}^{p,q}$, fasciculul de germeni de forme de tip (p,q) de clasă $\mathcal{C}^\infty$, respectiv subfasciculul de forme de tip (p,q) de clasă $\mathcal{C}^\infty$ care sunt $\bar\partial$ închise.

(i) Demonstraţi că şirul de mai jos este un şir exact de fascicule:

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}_X^{p,2} \xrightarrow{\bar\partial} \dots$$

(ii) "Descompuneţi" acest şir exact lung în şiruri exact scurte folosind fasciculele $(\mathcal{Z}_{\bar\partial}^{p,q})_{p,q}$.

(iii) Determinaţi $H^r(X,\mathcal{A}_X^{p,q})$.

(iv) Deduceţi existenţa unor izomorfisme

$$H^q(X,\Omega_X^p) \simeq H^{q-1}(X,\mathcal{Z}_{\bar\partial}^{p,1}) \simeq \ldots \simeq H^1(X,\mathcal{Z}_{\bar\partial}^{p,q-1}) \simeq H^0(X,\mathcal{Z}_{\bar\partial}^{p,q})/\bar\partial H^0(X,\mathcal{A}_X^{p,q-1}) = H_{\bar\partial}^{p,q}(X).$$

(v) Refaceţi demonstraţia de mai sus, aplicând direct teorema de Rham abstractă.

2. (Anularea unor grupuri de coomologie) Fie X o varietate complexă de dimensiune n. Demonstraţi că $H^q(X,\mathcal{O}_X) = 0$ pentru orice $q > n$.

3. (Coomologie cu valori în fascicule de bază $\mathbb{C}^n$) Demonstraţi afirmaţiile de mai jos:

(i) $H^q(\mathbb{C}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$, pentru orice $q > 0$;

(ii) $H^q(\mathbb{C}^n,\mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n}) = 0$, pentru orice $q > 0$;

(iii) $H^q(\mathbb{C}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*) = 0$, pentru orice $q > 0$.

4. (Diferenţiala Čech)

(i) Demonstraţi egalitatea $\delta^{q+1} \circ \delta^q = 0$ $(q \geq 0)$.

(ii) Scrieţi explicit cum acţionează operatorii δ^0 şi δ^1.

5. (Grupul de coomologie Čech pentru $q = 0$) Fie X un spaţiu topologic, $\mathscr{U}$ o acoperire deschisă a lui X şi $\mathcal{F}$ un fascicul de grupuri abeliene de bază X. Demonstraţi că există un izomorfism canonic $\check{H}^0(\mathscr{U},\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(X)$.