Introducere în teoria fasciculelor

Seminar 12
Luni, 12.05.2014.

---

1. (Colanţuri liftabile) Fie

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

un şir exact de fascicule de grupuri abeliene de bază X. Notăm cu $\check{C}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(\mathscr{U}, \mathcal{F}'')$ complexul colanţurilor Čech ale lui $\mathcal{F}''$ ce pot fi liftate în $\mathcal{F}$. Demonstraţi că dacă $\mathcal{F}'$ este flasc, atunci

$$\check{C}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(\mathscr{U}, \mathcal{F}'') = \check{C}^{\bullet}(\mathscr{U}, \mathcal{F}'') \;\text{ şi }\; \check{H}^{q}_{\mathcal{F}}(\mathscr{U}, \mathcal{F}'') = \check{H}^{q}(\mathscr{U}, \mathcal{F}''),\ \forall q.$$

2. (Identitatea este omotopă cu 0**)** Cu notaţiile de la curs, demonstraţi că

$$h^{q+1}\delta^q + \delta^{q+1}h^q = \mathrm{id}_{\check{C}^q(\mathscr{U}, \mathcal{F})}.$$

3. (Coomologie cu valori în fascicule de bază $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^l$**)** Fie $X = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^l$. Demonstraţi că $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$, pentru orice $q \geq 1$.

4. (Coomologie pentru $\mathbb{CP}^1$**)** Fie $\mathbb{P}^1 = \mathbb{CP}^1$ şi fie $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ fasciculul structural.

(i) Folosind coordonate omogene pe $\mathbb{P}^1 = \{[u : v] | (u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$, construiţi o acoperire aciclică $\mathscr{U} = \{U, V\}$ a lui $\mathbb{P}^1$.

(ii) Determinaţi $\check{C}^0(\mathscr{U}, \mathcal{O}), \check{C}^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})$ şi scrieţi explicit cum acţionează operatorul δ^0.

(iii) Calculaţi $\ker \delta^0$. Determinaţi $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O})$.

(iv) Calculaţi $\check{C}^1(\mathscr{U}, \mathcal{O})/_{\mathrm{im}\ \delta^0}$. Determinaţi $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O})$.

(Indicaţie (iii), (iv): folosind dezvoltări în serie Laurent).

(v)* Folosind acelaşi tip de argumente, determinaţi $H^0(\mathbb{P}^1, \Omega^1), H^1(\mathbb{P}^1, \Omega^1)$.

5. (Grup de coomologie infinit dimensional) Fie $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ şi fie $\mathcal{O}_X$ fasciculul structural. Demonstraţi că $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ este infinit dimensional. (Indicaţii: folosiţi teorema lui Hartogs; determinaţi o acoperire aciclică convenabilă pentru X; folosiţi dezvoltări în serie Laurent pentru a calcua $\check{C}^1$, $\delta^0(\check{C}^0)$).

6. (Grupuri de coomologie Čech şi rafinarea acoperirilor) Fie X un spaţiu topologic, $\mathcal{F}$ un fascicul de grupuri abeliene de bază X. Fie $\mathscr{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ o acoperire deschisă a lui X şi $\mathscr{V} = (V_\beta)_{\beta \in J}$ o rafinare a sa.

(i) Fie $\rho : J \to I$ o aplicaţie de rafinare şi $\rho^\bullet : \check{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^\bullet(\mathscr{V}, \mathcal{F})$ morfismul de colanţuri indus. Demonstraţi că $\rho^\bullet$ comută cu $\delta^\bullet$ (i.e. $\delta^q \circ \rho^q = \rho^q \circ \delta^q$, pentru orice q).

(ii) Fie Fie $\rho, \rho' : J \to I$ aplicaţii de rafinare. Demonstraţi că $\rho^\bullet$ şi $\rho'^\bullet$ sunt omotope.

7. (**Problema Cousin multiplicativă)** Orice hipersuprafaţă analitică din $\mathbb{C}^n$ este dată de zerourile unei singure funcţii olomorfe definită, pe $\mathbb{C}^n$. (Indicaţii: o hipersuprafaţă analitică este definită, *local*, de zerourile unei funcţii olomorfe, unică până la înmulţirea cu o funcţie inversabilă; se generează astfel o acoperire a lui $\mathbb{C}^n$; se stabileşte ce relaţie are loc pe intersecţii de deschişi, făcând legătura cu fasciculul $\mathcal{O}^*$).