

RAPORT ȘTIINȚIFIC PRIVIND IMPLEMENTAREA PROIECTULUI PN-II-ID-PCE-2011-3-0118 ÎN 2013

În această perioadă au fost elaborate 7 articole științifice, 6 dintre acestea fiind publicate sau acceptate spre publicare în reviste cotate ISI, iar unul este trimis spre evaluare pentru o posibilă publicare. De asemenea, articolul [C. Gherghe, *Harmonic maps and stability on locally conformal Kähler manifolds*], ce fusese trimis spre evaluare la o revistă cotată ISI în etapa 2012, a fost acceptat și a apărut în revista *Journal of Geometry and Physics*, 70 (2013), 48–53.

Conținutul celor șapte articole realizate în etapa 2013, ce acoperă în totalitate obiectivele propuse pentru aceasta etapă, poate fi sintetizat după cum urmează:

1. L. Ornea, M. Parton, V. Vuletescu: *Holomorphic submersions of locally conformally Kähler manifolds*, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, DOI 10.1007/s10231-013-0332-z, in press.

Acest articol este realizat în cadrul obiectivului 2 din planul de lucru. Trebuie menționat că în acest articol s-a obținut un rezultat mult mai general decât obiectivul inițial. Astfel, deși inițial ne propuseserăm să studiem doar cazul fibrărilor eliptice, în articol am obținut un rezultat de non-existență de metrici LCK pentru cazul submersiilor olomorfe - nu doar pentru fibrări local triviale, și nu doar pentru cazul în care fibrele sunt de dimensiune unu.

Rezultatul principal obținut este următorul. Dacă se consideră o submersie complex-analitică între varietăți compacte (cu fibre de dimensiune strict pozitivă), astfel încât o singură fibră a submersiei este de tip Kähler, atunci domeniul submersiei nu poate admite metrici LCK decât în cazul în care fibrele sunt curbe eliptice.

Consecințe importante:

- o nouă demonstrație a unui rezultat din 1999 al lui K. Tsukada (“The canonical foliation of a compact generalized Hopf manifold”, *Differential Geom. Appl.* 11 (1999), no. 1, 13–28), care arată că produsul a doua varietăți Vaisman regulate compacte nu admite metrici LCK;

- demonstrația faptului că produsul unei varietăți LCK (care nu este GCK) cu o varietate Kähler nu admite metrici LCK.

Legat de această a doua consecință, trebuie menționat că este încă deschisă problema existenței metricilor LCK pe un produs de varietăți LCK; rezultatul de mai sus sugerează că răspunsul ar putea fi negativ. Ne propunem să investigăm în continuare această problemă.

2. G. E. Vilcu: *Mixed paraquaternionic 3-submersions*, *Indagationes Mathematicae*, 24(2) (2013), 474–488.

În acest articol este introdusă o nouă clasă de submersii semi-Riemann, definite între varietăți înzestrate cu 3-structuri mixte și varietăți aproape paraquaternionice hermitiene. Sunt obținute proprietăți fundamentale ale acestei clase de submersii și sunt investigate transferul structurilor și geometria fibrelor. În particular se demonstrează că în cazul în care spațiul total al submersiei este mixt 3-cosymplectic sau

mixt 3-Sasaki, atunci o astfel de submersie este aplicație armonică. De asemenea, în articol sunt prezentate numeroase exemple nebanale de astfel de submersii.

3. G. E. Vilcu: *On Chen invariants and inequalities in quaternionic geometry*, Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:66.

În lucrarea [*Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math. 60, 568-578 (1993)], B.-Y. Chen a introdus noi tipuri de invarianti Riemann, cunoscuți astăzi ca δ -invarianti sau invarianti Chen, în scopul furnizării de răspunsuri la o problemă deschisă a lui S.S. Chern cu privire la existența imersiilor minimale într-un spațiu Euclidian de dimensiune arbitrară. În fapt, datorită lipsei de control a proprietăților extrinseci ale subvarietăților prin intermediul invariantilor intrinseci cunoscuți, nu a putut fi soluționată problema lui S.S. Chern înainte de introducerea δ -invariantilor. Astfel, în lucrarea mai sus citată, B.-Y. Chen obține o condiție necesară și suficientă pentru existența imersiilor izometrice minimale de la o varietate Riemann dată la un spațiu Euclidian și stabilește o inegalitate optimă pentru o subvarietate într-o formă spațială reală, utilizând pe de o parte curbura scalară și curbura secțională (ambele fiind invarianti intrinseci), iar pe de altă parte pătratul curburii medii (principalul invariant extrinsec).

În acest articol sunt prezentate extinderi ale inegalităților de tip Chen în context cuaternionic, sunt investigate și complet caracterizate cazurile de egalitate, iar în final sunt propuse șapte probleme deschise în domeniu.

4. G. E. Vilcu: *Canonical foliations on paraquaternionic Cauchy-Riemann submanifolds*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 399(2) (2013), 551–558.

Relativ recent, în lucrarea [S. Ianuș, S. Marchiafava, G.E. Vilcu, *Paraquaternionic CR-submanifolds of paraquaternionic Kähler manifolds and semi-Riemannian submersions*, Cent. Eur. J. Math. 8 (2010), no. 4, 735-753], autorii au introdus conceptul de CR-subvarietate paracuaternionică, stabilind câteva rezultate fundamentale cu privire la geometria acestor subvarietăți. În articolul [4] sunt generalizate aceste rezultate, fiind extins conceptul de CR-subvarietate paracuaternionică într-un context mai general, mai exact pe varietatea produs a două varietăți paracuaternionice Kähler, despre care se știe că admite o structură aproape paracuaternionică hermitiană canonică, însă aceasta nu mai este paracuaternionică Kähler. Mai întâi este investigată integrabilitatea distribuțiilor implicate în definiția CR-subvarietății și sunt studiate foliațiile canonice induse pe CR-subvarietăți paracuaternionice. În plus, sunt obținute condiții necesare și suficiente pentru ca o astfel de subvarietate să fie riglată în raport cu foliațiile canonice. În ultima parte a lucrării sunt găsite condiții necesare și suficiente pentru ca aceste foliații să fie semi-Riemanniene.

5. L. Ornea, M. Parton, P. Piccinni, V. Vuletescu: *Spin(9) geometry of the octonionic Hopf fibration*, Transformation Groups, 18, No. 3, 845–864 (2013)

Acest articol este realizat în cadrul obiectivului de extindere a noțiunilor și rezultatelor obținute în geometria LCK la cazul mai general al geometriilor local conforme cu structuri geometrice interesante, cum ar fi cele simplectice sau cu oloonii speciale (obiectivul 4 din planul de lucru). În articol se tratează cazul metricilor local conforme cu metrici cu oloonomie specială Spin(9).

Rezultatul principal obținut în acest articol este acela ca varietățile local conforme cu metrici cu oloonomie Spin(9) sunt câaturi ale sferei de dimensiune 15; cu

alte cuvinte, aceste varietăți constituie analoge ale varietăților Vaisman regulate din geometria LCK. De asemenea, în articol sunt prezentate exemple de astfel de varietăți - exemple nebanale, destul de dificil de obținut, deoarece studiul grupului $\text{Spin}(9)$ este strâns legat de cel al algebrei octonionilor (o algebră neasociativă, mult mai dificil de studiat decât corpul numerelor complexe care apare în cadrul varietăților LCK).

În plus, în articol s-a obținut o nouă demonstrație a unui rezultat foarte profund din 1992: B. Loo and A. Verjovsky, *The Hopf fibration over S^8 admits no S^1 -subfibration*, *Topology*, 31(2):239–254.

6. A.M. Ionescu, V. Slesar, M. Visinescu, G.E. Vilcu: *Transversal Killing and twistor spinors associated to the basic Dirac operators*, *Reviews in Mathematical Physics*, vol. 25, Issue 08, September 2013, 21 pp.

În acest articol se obține interacțiunea dintre spinorii Killing transversși și operatorul Dirac în contextul general al foliațiilor Riemanniene. În acest scop sunt definiți spinorii Killing transversși ca o extensie naturală a spinorilor bazici paraleli transversși în raport cu o conexiune modificată și este introdusă de asemenea într-un mod natural o clasă de spinori twistor. Aceste definiții diferă în cazul general al foliațiilor Riemanniene de cele clasice date de N. Ginoux sau G. Habib, dar pentru cazul particular cel mai convenabil al foliațiilor Riemann cu curbură armonică bazică, definițiile coincid, iar rezultatele obținute în această lucrare generalizează câteva rezultate importante demonstrate de S. D. Jung, în [*J. Geom. Phys.* 39 (2001) 253–264.] În finalul articolului sunt prezentate câteva aplicații interesante ale rezultatelor în fizica teoretică.

7. Cătălin Gherghe: *Harmonicity and spectral theory on Sasakian manifolds* (preprint, 2013).

Teoria aplicațiilor armonice între varietăți Riemanniene înzestrate cu structuri geometrice speciale își are originea în lucrarea lui Lichnerowicz [*Applications harmoniques et varietes Kähleriennes*, *Symposia Mathematica* 3(1980), 341–402].

Ianuș și Pastore au dezvoltat o teorie a aplicațiilor armonice între varietăți dotate cu structura metrică aproape de contact [*Harmonic maps on contact metric manifolds*, *Annales Math. Blaise Pascal*, 2(1995), 43–53]. Urmând ideile lui Rawnsley, ei au introdus o noțiune asemănătoare olomorfiei. Folosind tehnici similare, China a studiat armonicitatea submersiilor definite între varietăți metrice aproape de contact [*Harmonicity on maps between almost contact metric manifolds*, *Acta Math. Hungar.* 126 (2010), no. 4, 352–362]. În Secțiunea 3 demonstrăm un rezultat similar cu cel obținut de Lichnerowicz în cazul când codomeniul este varietate Sasaki.

Operatorul Laplace-Beltrami al unei varietăți Riemann compacte, poate fi privit ca operatorul Jacobi al unei aplicații armonice constante definite pe varietate cu valori în cercul unitate. Acesta este un motiv pentru a studia geometria spectrală a operatorului Jacobi asociat unei aplicații armonice. Acest lucru a fost făcut de Urakawa pentru cazul varietăților Kähler cu curbura olomorfa constantă [*Spectral Geometry of the second variation operator of harmonic maps*, *Illinois J. Math.* 33(1989), 250–267] și de către Kang și Kim pentru cazul formelor spațiale Sasaki [*On the Spectral Geometry for the Jacobi Operators of Harmonic maps into a Sasakian or Cosymplectic Space form*, *Comm. Korean Math. Soc.* 12 (1997)]. În Secțiunea 4 demonstrăm că spectrul operatorului Jacobi asociat unei aplicații armonice cu

valori într-o formă spațială Sasaki determină proprietățile geometrice al aplicației, de exemplu pe cea de a fi morfism armonic.

În Secțiunea 5 demonstrăm o teoremă de caracterizare a morfismelor armonice pentru aplicații definite pe o varietate Sasaki într-o varietate Hermitiană. Acest lucru este făcut prin mijloace similare celor folosite de Gudmundsson și Wood în cazul complex [*Harmonic morphisms between almost Hermitian manifolds*, Boll. U.M.I. 11-B (1997) suppl. fas. 2, 185–197].

Remarcăm de asemenea că diseminarea rezultatelor din activitatea desfășurată în cadrul proiectului în această etapă s-a materializat nu doar prin publicarea de articole, ci și prin participarea cu diverse lucrări la conferințe naționale și internaționale.