RAPORT STIINTIFIC AL GRANTULUI PN–II–ID–PCE–2011–3–1023, NR. 247/2011, IN PERIOADA 01.01.2012 – 28.11.2013

INTRODUCERE

Vom prezenta in acest raport activitatea desfasurata in perioada 01.01.2012 – 28.11.2013 de membrii grantului PN–II–ID–PCE–2011–3–1023, nr. 247/2011, avand titlul "Algorithmic and theoretical methods for studying monomial and binomial ideals with applications in combinatorics, commutative algebra and graph theory" si al carui director este Prof. dr. Dorin Popescu. Pentru o mai buna vizualizare vom prezenta in Sectiunea 1 rezultatele stiintifice obtinute in aceasta perioada de catre membrii grantului, iar in Sectiunea 2 vom prezenta modul in care au fost diseminate rezultatele acestui grant, la conferintele/stagiile de cercetare finantate din bugetul acestui grant. Mentionam ca toate realizarile cuprinse in cadrul acestui raport pot fi consultate la adresa grantului

https://dl.dropboxusercontent.com/u/112281424/grantPCE-2011-3-1023/indexDP.html

cu mentiunea ca rezultatele obtinute in 2012 sunt prezentate integral (ca urmare a raportarii anuale facute in 2012), pe cand rezultatele obtinute in 2013 urmeaza a fi actualizate pe pagina web dupa raportarea anuala de la sfarsitul lui noiembrie 2013.

In ceea ce priveste rezultatele stiintifice, dorim sa mentionam ca pana in acest moment echipa de cercetare a acestui grant a elaborat 18 lucrari, repartizate in fiecare an calendaristic cate 9. Mai precis, in anul 2012 au fost elaborate lucrarile [2, 18, 21, 20, 43, 44, 46, 9, 10] care au fost toate publicate (7), respectiv acceptate spre publicare (2) in reviste ISI de prestigiu. In anul 2013 au fost elaborate lucrarile [8, 30, 45, 47, 48, 23, 17, 22, 35] dintre care 3 au fost acceptate deja spre publicare (vezi [47, 23, 22]) in reviste ISI, iar celelalte au fost trimise spre publicare doar la reviste ISI. Asadar, per total, din cele 18 lucrari scrise sub finantarea acestui grant 12 au fost deja publicate sau acceptate spre publicare, toate in reviste ISI (vezi bibliografia pentru detaliile revistelor). In Sectiunea 1 sunt prezentate pe scurt rezultatele principale obtinute in cele 18 lucrari. Este important de precizat ca toate lucrarile elaborate sunt in tema contractului de cercetare. Acestea pot fi impartite in 2 categorii mari: 10 dintre ele abordeaza conjectura lui Stanley, oferind unele cazuri particulare in care aceasta este adevarata, iar celelalte 8 abordeaza teme de combinatorica prin metode de algebra comutativa, avand aplicatii si in alte domenii precum statistica algebrica. In ceea ce priveste diseminarea rezultatelor dorim sa facem precizarea ca membrii grantului, in afara participarii cu prezentari la conferinte internationale/nationale, au tinut prezentari in cadrul seminariilor stiintifice organizate la universitatile de care apartin, precum si la universitatile vizitate in timpul stagiilor de cercetare din strainatate.

1. Rezultate stiintifice obtinute

In cele ce urmeaza prezentam pe scurt rezultatele obtinute in cele 18 lucrari. Pentru o evidenta clara a anului in care au fost elaborate lucrarile vom prezenta mai intai lucrarile finalizate in anul 2012, si ulterior pe cele finalizate in anul 2013. Pentru prezentarea rezultatelor, vom nota cu S inelul de polinoame $K[x_1,\ldots,x_n]$ in n nedeterminate cu coeficienti intr-un corp K.

2012: In lucrarea [2] din bibliografie sunt caracterizate idealele monomiale nemixtate pentru care $\operatorname{depth}(S/I)=\operatorname{depth}(S/\operatorname{rad}(I))$, cu alte cuvinte, pe cele care au depth maximal. Faptul ca depth-ul este maximal este urmare a unui fapt bine cunoscut ca, pentru un ideal monomial I din S, numerele Betti descresc la trecerea la radicalul lui I, si prin urmare depth-ul creste prin trecerea de la ideal la radicalul sau. Aceasta caracterizare din [2] extinde rezultate din lucrarea [40]. In plus, ca aplicatie la rezultatul de mai sus, este caracterizata o clasa de complexe simpliciale pure pe care autorii le-au numit cu "depth rigid". Un complex simplicial Δ are depth rigid daca orice ideal nemixtat I al carui radical coincide cu idealul Stanley-Reisner al lui Δ are depth-ul maximal. Complexele simpliciale cu depth rigid generalizeaza in mod natural complexele simpliciale studiate de J. Herzog, Y. Takayama, N. Terai in [29]. De asemenea, este aratat ca daca un complex simplicial are depth rigid peste un corp de caracteristica 0, atunci aceasta proprietate se pastreaza peste corpuri de orice caracteristica.

In articolul [18] se studiaza idealele generate de m-minorii unei matrice $m\times n$ de nedeterminate ($m\le n$). Generatorii acestui ideal sunt asociati fatetelor unui complex simplicial pur Δ de dimensiune $m-1$. Din acest motiv aceste ideale sunt numite "determinantal facet ideals". In cazul cand $m=2$, deci cand Δ este un graf, idealul determinantal fateta J_Δ este ideal binomial muchie ("binomial edge ideal"). Idealele binomiale asociate unui graf au fost introduse recent in lucrarea [28] si au fost studiate intens in ultimii 3 ani. Structura idealelor determinantale fateta pentru $m\ge 3$ este mult mai complexa decat cea a idealelor binomiale muchie. In lucrarea [18] sunt obtinute rezultate privind bazele Groebner si proprietatile de primalitate ale acestor ideale. Se arata ca un ideal determinantal fateta are proprietatea ca generatorii sai formeaza baza Groebner relativ la ordonarea lexicografica indusa de ordinea naturala a nedeterminatelor daca si numai daca complexul simplicial asociat este inchis. Pentru un complex simplicial Δ inchis, se arata ca idealul determinantal asociat, J_Δ, este Cohen-Macaulay, iar K-algebra generata de generatorii lui J_Δ este Gorenstein. Cand Δ este un complex inchis, autorii au gasit o conditie necesara pentru primalitatea idealului J_Δ, conditie care se exprima in functie de proprietatile combinatoriale ale lui Δ. In plus, in conditii suplimentare asupra lui Δ, sunt date si conditii suficiente de primalitate a idealului determinantal asociat.

In lucrarea [21] se studiaza o clasa de ideale binomiale asociate matricelor patratice. Data X, o matrice patratica de ordinul n de nedeterminate si un graf simplu G pe multimea de varfuri $\{1,...,n\}$, am considerat idealul P_G generat de minorii diagonali de ordin 2 ai lui X formati cu elementele de la intersectia liniilor si coloanelor i si j, unde $\{i,j\}$ este muchie in graful G. Se determina cate o baza Groebner pentru acest ideal pentru diverse ordini monomiale. Se arata ca P_G este un ideal prim si intersectie completa si se calculeaza grupul claselor de divizori pentru domeniul normal $K[x_1,\ldots,x_n]/P_G$. In plus se demonstreaza de fapt ca acest grup este liber si se exprima rangul sau in functie de graful G. Cu ajutorul acestor ideale se arata ca se pot obtine inele normale cu grupul divizorilor liber de orice rang.

In lucrarea [20], se defineste un functor r^* de la categoria modulelor pozitiv definite la categoria modulelor libere de patrate care joaca un rol similar cu luarea radicalului pentru ideale monomiale. Se extind multe rezultate cunoscute din teoria idealelor monomiale la modulele multigraduate. De exemplu, se stia ca daca radicalul unui ideal monomial I este (secvential sau generalizat) Cohen-Macaulay sau Buchsbaum, atunci I are aceeasi proprietate, vezi [29]. In aceasta lucrare se demonstreaza ca aceste proprietati se extind la module multigraduate pozitiv definite. Mai precis, se arata ca prin trecerea de la un modul multigraduat pozitiv definit la "radicalul" sau numerele Betti nu cresc. Acesta este un fenomen complet similar cazului idealelor monomiale care, in particular, implica faptul ca depth-ul creste de la modul la radicalul sau. In schimb, asa cum se arata in articol, dimensiunea Krull descreste prin trecerea la radical. Spre deosebire de cazul monomial, exista exemple care arata ca in cazul modulelor multigraduate dimensiunea Krull a radicalului este strict mai mica decat cea a modulului. Folosind inegalitatile de mai sus se obtine ca proprietatea unui modul multigraduat pozitiv definit de a fi (secvential) Cohen-Macaulay se propaga si la radicalul sau. Mai mult, se studiaza conexiunile dintre functorul r^* si functorii: Ext, Dualul Alexander (introdus si studiat mai intai in [39]) si functorul Auslander-Reiten translate [5]. Legatura dintre functorul r^* si functorul Ext permite autorilor sa demonstreze ca in conditiile in care M si $r^*(M)$ au aceeasi dimensiune Krull, atunci M este Cohen-Macaulay generalizat daca si numai daca $r^*(M)$ are aceeasi proprietate si ca daca M este Buchsbaum, atunci si radicalul sau este Buchsbaum.

Lucrarile [43, 44, 46] prezinta rezultate importante in directia demonstrarii conjecturii lui Stanley pentru ideale monomiale libere de patrate. In lucrarea [43], se considera un ideal monomial generat de r monoame libere de patrate de grad d. Se arata ca daca r este mai mare sau egal (daca I nu este principal) decat numarul de monoame libere de patrate ale lui I de grad $d+1$, atunci $\operatorname{depth} S/I = d$. Daca J este un ideal nenul strict continut in I, generat de monoame libere de patrate de grad mai mare sau egal decat

$d+1$, si r este mai mare decat numarul de monoame libere de patrate ale lui I/J de grad $d+1$ (sau mai general sdepth$I/J = d$) atunci depth$I/J = d$. In particular, obtinem in situatiile descries mai sus un rezultat pozitiv pentru conjectura lui Stanley. Rezultatul principal (Teorema 2.2) da o conditie suficienta care implica faptul ca depth$I/J = d$, si anume atunci cand $\rho_d(I) > \rho_{d+1}(I) - \rho_{d+1}(J)$, unde I si J sunt ideale monomiale in S, iar $\rho_d(I)$ reprezinta numarul tuturor monoamelor libere de patrate de grad d ale lui I. Demonstratia acestui rezultat foloseste omologie Koszul, o tehnica noua de abordare a acestei conjecturi, introdusa de autor. Mai mult acesta arata ca abordarea conjecturii cu omologie Koszul pare cea ma buna strategie care poate fi abordata in cazurile particulare ale conjecturii considerate de autor. Daca I este generat de cel putin $\rho_{d+1}(I)$ monoame libere de patrate de grad d, atunci se demonstreaza in Corolarul 3.4 ca depth$I = d$. Acest lucru generalizeaza un rezultat precedent al autorului, care a fost punctul de plecare pentru aceasta tema de cercetare. Mai mult, se arata ca aceste conditii impuse sunt consecinte ale faptului ca sdepth$I/J = d$, ceea ce inseamna ca in aceasta situatie are loc conjectura lui Stanley. In lucrarea [44], autorul generalizeaza Teorema 2.2 din lucrarea 8 in modul urmator. Se considera situatia in care I si J sunt doua ideale monomiale libere de patrate astfel incat J este strict continut in I si I este generat de monoame de grad mai mare sau egal decat d, iar J este generat de monoame de grad mai mare sau egal cu $d+1$. In rezultatul principal al articolului, Teorema 1.3, se arata ca in anumite conditii, se poate calcula depthI/J ceea ce ar putea implica o demonstratie a conjecturii lui Stanley, pe cazul idealelor monomiale libere de patrate. In lucrarea [46], sunt demonstrate cateva cazuri noi in care conjectura lui Stanley are loc. Mai precis, se considera cazul in care I si J sunt doua ideale monomiale libere de patrate astfel incat J este strict continut in I, astfel incat I este generat in grad ≥ 1, iar J in grad ≥ 2. In plus, daca I contine exact o variabila, iar ceilalti generatori sunt de grad mai mare sau egal cu 2 atunci sdepth$I/J \leq 2$ implica depth$I/J \leq 2$, ceea ce inseamna ca are loc conjectura lui Stanley. Pentru demonstrarea acestui rezultat (Teorema 1.10), autorii extind tehnici si rezultate deja folosite in lucrarile [43, 44].

Lucrarile [9, 10] sunt centrate pe analizarea unor cazuri particulare legate de conjectura Stanley. In lucrarea [9], se demonstreaza ca daca I este un ideal monomial intersectie completa atunci conjectura lui Stanley are loc pentru S/I si I. Acest rezultat reprezinta o generalizare non-triviala a rezultatelor cunoscute pentru ideale monomiale intersectie completa. In lucrarea [10] sunt date margini exacte pentru Stanley depth-ul catului I/J, pentru doua ideale monomiale intersectie completa I si J din S. Ca un caz particular, este calculat Stanley depth-ul pentru caturile a doua ideale monomiale ireductibile. De asemenea, sunt demonstrate cateva inegalitati legate de Stanley depth.

2013: In lucrarile [23], [17] si [22] se studiaza clase de ideale binomiale asociate unor obiecte combinatoriale. Idealele binomiale muchie (Binomial edge ideals) au fost introduse recent de J. Herzog si colaboratorii sai [28] si au fost studiate intens in ultimii ani.

Pentru un graf simplu G pe multimea de vafuri $[n]$, se considera idealul binomial asociat J_G in algebra de polinoame $S = K[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]$ peste un corp K. Acesta este generat de toate binoamele $f_{ij} = x_iy_j - x_jy_i$, cu $\{i, j\}$ muchie in G. Inca de la aparitia lor, idealele binomiale muchie si-au dovedit aplicabilitatea in statistica algebrica. Sunt deja cateva articole in literatura de specialitate care studiaza aceste aplicatii [4], [28], [51]. In ultimii ani s-au studiat intens invarianti algebrici si omologici ai idealelor binomiale muchie, precum si extinderi ale lor. Exemplificam cu urmatoarele articole: [14], [19], [37], [42], [50], [53], [54], [56], [57].

Ca pentru orice ideal graduat care apare din combinatorica, se urmareste exprimarea invariantilor algebrici si omologici ai lui J_G in functie de combinatorica grafului G. In prezent se cunosc cateva proprietati importante ale idealelor binomial muchie. S-a dovedit ca ele sunt ideale radicale, idealele prime minimale se pot exprima in functie de combinatorica grafului [28], se cunosc clase de grafuri pentru care idealele binomial associate sunt Cohen-Macaulay sau Gorenstein [16]. Exista si un interes special pentru studiul invariantilor omologici ai idealelor binomiale muchie, in particular pentru calculul regularitatii si al dimensiunii proiective. Intr-o lucrare recenta [37] se arata ca, in general, pentru un graf conex G, regularitatea lui S/J_G este marginita inferior de lungimea celui mai lung drum indus in graf si superior de numarul de varfuri minus 1. Mai mult, se conjectureaza ca J_G are regularitate maxima daca si numai daca G este un drum. In lucrarea [23] se demonstreaza ca, pentru un graf G conex inchis (care verifica o anumita conditie combinatoriala care, din punct de vedere algebric este echivalenta cu faptul ca J_G are o baza Groebner patratica), regularitatea lui S/J_G este chiar egala cu lungimea celui mai lung drum indus in graf. Prin urmare, conjectura Matsuda-Murai [37] este adevarata pentru grafurile inchise. In aceeasi lucrare se demonstreaza conjectura de mai sus pentru o clasa de grafuri care include arborii. In plus, se arata ca, pentru un graf inchis G, regularitatea lui J_G coincide cu regularitatea idealului initial al lui J_G in raport cu ordonarea lexicografica. Acest rezultat vine in sprijinul unei conjecturi recente [16] care afirma ca J_G si idealul sau initial in raport cu ordonarea lexicografica au aceleasi numere Betti extremale. In aceasta directie sunt, deocamdata, foarte putine rezultate. Cel obtinut in lucrarea [23] constituie un pas important in studiul aceste conjecturi.

O algebra Koszul este o algebra standard graduata peste un corp al carei ideal maximal admite rezolutie liniara. Algebrele Koszul apar frecvent printre inelele torice si alte algebre studiate in algebra comutativa combinatoriala si geometria algebrica [3], [12], [52]. Se stie ca o algebra Koszul este definita de cuadrice. In plus, se cunoaste ca o K–algebra este Koszul daca idealul sau de definitie are o baza Groebner patratica.

In lucrarea [17] se considera K-algebre definite de ideale binomiale muchie, deci de forma $R = S/J_G$. Deoarece idealul J_G este generat de quadrice, apare in mod natural intrebarea: Pentru care grafuri G algebra S/J_G ste Koszul? Cand S/J_G este Koszul, spunem ca graful G este Koszul (peste corpul K). Daca graful G este inchis, ceea ce este echivalent cu faptul ca J_G are o baza Groebner patratica, rezulta ca S/J_G este Koszul. Prin urmare, orice graf inchis este Koszul. Pe de alta parte, se pot gasi usor exemple de grafuri Koszul care nu sunt inchise. In lucrarea [17] demonstram ca orice graf Koszul este chordal si claw-free. Prin urmare, avem urmatoarele implicatii:

$$G = \text{graf inchis} \Rightarrow G = \text{Koszul} \Rightarrow G = \text{chordal si claw-free}.$$

Aratam ca niciuna din implicatiile de mai sus nu este echivalenta si clasificam toate grafurile Koszul al caror clique-complex are dimensiunea cel mult egala cu 2.

In lucrarea [22] se considera ideale binomiale asociate, de aceasta data, laticelor distributive. Data o lattice finite L, in inelul de polinoame $K[L]$ se considera idealul binomial I_L, numit *join-meet*, generat de binoamele de forma $ab-(a\vee b)(a\wedge b)$, unde a si b sunt elemente incomparable in L. Aceste ideale se mai numesc ideale Hibi deoarece sunt idealele torice ale inelelor Hibi. Acestea din urma au fost introduse si studiate de Hibi intr-o serie de articole publicate la sfarsitul anilor '80 [31], [32], [33] . Ele au legaturi cu teoria reprezentarii si cu alte domenii [36]. Lucrarile [1], [27], [49] studiaza bazele Groebner ale idealelor Hibi relativ la diverse ordonari monomiale.

In lucrarea [22] se abordeaza pentru prima data in literatura problema syzygy-lor idealelor Hibi. Pentru o lattice distributiva planara L se arata ca regularitatea idealului Hibi asociat se poate exprima in functie de combinatorica laticii. Pentru o lattice neplanara arbitrara L se obtin margini (inferioara si superioara) pentru regularitatea lui I_L. Mai precis, se arata ca regularitate lui I_L este mai mare sau egala cu numarul de elemente din L join-ireductibile incomparabile doua cate doua minus 1 si mai mica sau egala cu numarul de elemente join-ireductibile minus 1. Ca aplicatie a acestor rezultate se demonstreaza ca pentru o lattice distributiva L, idealul I_L are rezolutie liniara daca si numai daca laticea este izomorfa cu laticea divizorilor lui $2\cdot 3^a$, cu $a\geq 1$.

In articolul [35] autorii introduc un algoritm de calcul pentru invariantul Hilbert-depth al unui modul multigraduat finit generat M peste inelul de polinoame $R=K[X_1,\ldots,X_n]$ standard multigraduat. Acest algoritm e bazat pe metoda introdusa in [34] si cateva imbunatatiri. Algoritmul se poate adapta pentru calculul Stanley depth a lui M daca $\dim_K M_a\leq 1$ pentru toti $a\in\mathbb{Z}^n$. In continuare, este oferita o implementare experimentala a algoritmului in CoCoA [11] si folosita pentru a gasi exemple interesante. In consecinta, sunt prezentate raspunsuri complete la urmatoarele intrebari puse de Herzog in [26]:

1.1. [26, Problema 1.66] *Gasiti un algoritm de calcul pentru Stanley depth a unui R-modul multigraduat finit generat M cu* $\dim_K M_a\leq 1$ *pentru toti* $a\in\mathbb{Z}^n$.

1.2. [26, Problema 1.67] *Fie M si N R-module multigraduate finit generate. Atunci*

$$\operatorname{sdepth}(M\oplus N)\geq\min\{\operatorname{sdepth}(M),\operatorname{sdepth}(N)\}.$$

Avem egalitate?

1.3. [26, Text dupa Problema 1.67] *In cazul particular in care* $I\subset R$ *este ideal monomial, avem* $\operatorname{sdepth}(R\oplus I)=\operatorname{sdepth} I$*?*

In lucrarile [45, 47, 48] autorii prezinta noi cazuri particulare in care conjectura lui Stanley are loc. Pentru toate cele trei articole mentionate mai sus contextul general este urmatorul. Fie K un corp, $S = K[x_1,...,x_n]$ inelul de polinoame in n variabile si $I \supsetneq J$ doua ideale monomiale libere de patrate din S. Autorii presupun ca I este generat de monoame libere de patrate de grad $\geq d$, unde d este un numar natural. In plus, via un izomorfism multigraduat J poate fi ales ca fiind (0) sau generat in grad $\geq d+1$. Fie r numarul monoamelor de grad d din I si B (resp. C) multimea monoamelor libere de patrate de grad $d+1$ (resp. $d+2$) din $I \setminus J$, iar $s = |B|$ si $q = |C|$. In lucrarea [47], autorii considera urmatorul caz particular: presupun ca I este generat de un monom f de grad d si de o multime E formata din monoame libere de patrate de grad $\geq d+1$. In aceasta situatie ei demonstreaza ca daca $s \neq q+1$ si $\operatorname{sdepth}_S(I/J) \leq d+1$ atunci $\operatorname{depth}_S(I/J) \leq d+1$. In lucrarea [48] autorii incearca sa generalizeze rezultatul precedent in urmatorul context: presupun ca I este minimal generat de monoamele libere de patrate $f_1,\ldots,f_r$ de grad d si de o multime E formata din monoame libere de patrate de grad $\geq d+1$. In acest context mai general ei demonstreaza ca in oricare dintre cazurile: 1) $d = 1$, $E = \emptyset$; 2) $r = 1$; 3) $1 < r \leq 3$, $E = \emptyset$ daca $\operatorname{sdepth}_S(I/J) \leq d+1$ atunci si $\operatorname{depth}_S(I/J) \leq d+1$. In particular, se observa ca obtin rezultatul din [47] in cazul 2). Plecand de la aceasta idee, in [45], autorul propune o versiune mai slaba a conjecturii lui Stanley si anume:

Conjectura 1.4. *Fie $I \subset S$ un ideal minimal generat de monoamele libere de patrate $f_1,\ldots,f_r$ de grad d si de o multime E formata din monoame libere de patrate de grad $\geq d+1$. Daca* $\operatorname{sdepth}_S(I/J) \leq d+1$ *atunci* $\operatorname{depth}_S(I/J) \leq d+1$.

Principalul rezultat al lucrarii [45] este ca aceasta conjectura este adevarata in oricare din urmatoarele 2 situatii: 1) $r \leq 4$, 2) $r = 5$, $E = \emptyset$ si exista $c \in C$ astfel incat $\operatorname{supp}(c) \not\subset \cup_{i=1}^{5} \operatorname{supp}(f_i)$, generalizand astfel rezultatele obtinute in [47, 48].

In vederea prezentarii rezultatelor obtinute in [8], trebuie sa introducem cateva notatii. Fie $\mathscr{A} = \{n_1,n_2,n_3\}$ o multime de intregi pozitivi cu proprietatea ca $\gcd(n_1,n_2,n_3) = 1$. Idealul toric $I_{\mathscr{A}} \subset K[x_1,x_2,x_3]$ al acestei configuratii a fost studiat pentru prima data de Herzog in [25], care a demonstrat ca $I_{\mathscr{A}}$ este ori intersectie completa (caz in care este minimal generat de 2 binoame) ori aproape intersectie completa (caz in care este minimal generat de 3 generatori). Idealele torice sunt ideale binomiale, a caror legatura cu statistica algebrica a fost prezentat pentru prima data de Diaconis si Sturmfels in [15], generand ulterior o intensa activitate de cercetare in acest domeniu. De o importanta deosebita in statistica algebrica este cunoasterea urmatorilor invarianti: complexitatea Markov $m(\mathscr{A})$ si complexitatea Graver $g(\mathscr{A})$ (vezi [55] pentru detalii) in cazul in care $\mathscr{A}$ este o multime finita de vectori $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$ din $\mathbb{N}^n$, unde $r \geq 3$ si $n \geq 1$. Rezultatul fundamental in aceasta directie este ca $g(\mathscr{A}) < \infty$ si exista o formula de calcul pentru ea data in [55, Theorem 3]. Pentru complexitatea Markov, mult mai importanta din punct de vedere al aplicatiilor in statistica algebrica, se stie doar ca este marginita superior de complexitatea Graver (vezi [55]) dar nu se stie o formula de calcul pentru ea. Mai mult, doar in cateva cazuri particulare se stie cat este aceasta complexitate Markov. Santos si Sturmfels lasa in [55] ca problema deschisa calculul complexitatii Markov $m(\mathscr{A})$ in cazul in care $\mathscr{A} = \{n_1, n_2, n_3\}$ in functie de n_1, n_2, n_3 si conjectureaza ca $g(\mathscr{A}) = n_1 + n_2 + n_3$ daca $\gcd(n_1, n_2) = \gcd(n_1, n_3) = \gcd(n_2, n_3) = 1$. Surprinzator, in lucrarea [8], autorii demonstreaza ca rezultat principal ca $m(\mathscr{A}) = 3$ daca $I_{\mathscr{A}}$ este aproape intersectie completa si $m(\mathscr{A}) = 2$ daca $I_{\mathscr{A}}$ este intersectie completa. In plus, autorii demonstreaza ca valoarea conjecturata pentru $g(\mathscr{A})$ nu este adevarata, dar ca $g(\mathscr{A}) \geq n_1 + n_2 + n_3$, inegalitatea putand fi stricta. Rezultatele sunt cu atat mai surprinzatoare cu cat complexitatea Graver poate fi oricat de mare pe cand complexitatea Markov este cel mult 3. Demonstratiile date de autori se bazeaza pe rezultate generale demonstrate in [6, 7] cat si pe descrierea clara a multimilor posibilie de generatori minimali data de Herzog in [25].

In lucrarea [30] autorii studiaza idealele monomiale care se scriu ca intersectie de puteri de ideale monomiale prime, pe care le numesc *ideale monomiale de tip intersectie*. Este un lucru cunoscut faptul ca orice ideal monomial liber de patrate este de tip intersectie, fiind o intersectie de ideale monomiale prime. Evident, printre idealele monomiale non-radicale, idealele monomiale de tip intersectie sunt cele mai apropiate de idealele monomiale libere de patrate. Intr-adevar, diverse tipuri de astfel de ideale au fost studiate in literatura, precum idealele curbelor tetraedrale (vezi [38, 24]). Autorii reusesc sa caracterizeze in [30, Theorem 1.1] toate idealele monomiale $I \subset S$ care sunt de tip intersectie. Mai exact I este de tip intersectie daca si numai daca pentru fiecare ideal prim asociat $\mathfrak{p}$ al lui I gradul minimal al unui generator al localizatului monomial $I(\mathfrak{p})$ al lui I este mai mare decat gradul maxim al unui element nenul din soclul lui $S(\mathfrak{p})/I(\mathfrak{p})$. In plus, autorii arata ca daca I este de tip intersectie, prezentarea lui ca intersectie de puteri de ideale monomiale prime este unic determinata. Exponentii puterilor idealelor monomiale prime asociate lui I in cazul in care I este de tip intersectie sunt marginiti superiori de catre $\operatorname{reg}(I(\mathfrak{p}))$, pentru orice $\mathfrak{p}$ un prim asociat al lui I, vezi [30, Theorem 1.3]. In cazul in care exponentii sunt egali cu marginea superioara pentru orice prim asociat, idealul se numeste de tip intersectie tare si demonstreaza ca sunt exact idealele I pentru care $I(\mathfrak{p})$ are rezolutie liniara pentru orice $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(S/I)$. Sunt demonstrate cateva proprietati ale acestor ideale de tip intersectie: sunt intreg inchise, hiperplanele suport ale poliedrului Newton al unui ideal de tip intersectie pot fi descrise in functia de unica descompunere descrisa mai sus. Printre clasele de ideale de tip intersectie tare autorii demonstreaza ca se numara idealele polimatroidale, idealele principale Borel (care sunt unicele ideale de tip Borel cu aceasta proprietate). Un alt rezultat important este clasificarea tuturor idealelor muchie a caror putere a doua este de tip intersectie. O consecinta importanta a acestui rezultat este ca pentru grafurile cu proprietatea ca puterea a doua a idealului muchie nu este de tip intersectie, atunci nici puterile mai mari sau egale cu 2 nu sunt de tip intersectie.

2. Diseminarea rezultatelor

Prezentam pe ani calendaristici modul in care au fost diseminate rezultatele stiintifice obtinute in cadrul acestui grant.

2012 Dorin Popescu, Viviana Ene, Bogdan Ichim, Dumitru Stamate si Mircea Cimpoeas au fost organizatorii din 2012 ai editiei 20 a traditionalei Scolii Nationale de Algebra, "Discrete invariants in commutative algebra and in algebraic geometry", tinuta la Mangalia in perioada 02.09.2012-08.09.2012, si care a avut parte de o deosebita participare externa (11 profesori invitati) si un puternic impact stiintific. De asemenea, Viviana Ene, Bogdan Ichim si Dumitru Stamate au contribuit cu cate o conferinta la aceasta manifestare stiintifica. In afara diseminarii rezultatelor in cadrul Scolii Nationale de Algebra membrii grantului au participat si la conferinte in strainatate. Bogdan Ichim a tinut o prezentare cu titlul "Introduction to Normaliz" la Universitatea Rostock pe data de 09-05-2012 si o prezentare cu titlul "How to compute the multigraded Hilbert depth of a module" la Universitatea Osnabruck pe data de 20-11-2012. De asemenea Dorin Popescu a tinut o prezentare la Universitatea din Kaiserslautern in luna iulie cu titlul "Rezultate si contributii noi la conjectura lui Stanley". Un alt membru al grantului, Viviana Ene, s-a deplasat in Germania, la Universitatea Essen, pentru continuarea unui proiect de cercetare comun initiat cu Prof. Jurgen Herzog. Andrei Zarojanu a participat la conferinta "Workshop for young researchers in Mathematics", care a avut loc in perioada 10.05.2012-11.05.2012 la Constanta, cu comunicarea "Stanley conjecture on intersection of three monomial primary ideals".

2013 In acest an membrii echipei de cercetare a grantului au participat la urmatoarele conferinte unde au sustinut comunicari orale asupra celor mai noi rezultate in cercetare:

1. *Experimental and Theoretical Methods in Algebra, Geometry and Topology*, conferinta internationala care s-a desfasurat la Eforie Nord in perioada 21-24 iunie 2013. Conferinta a reunit participanti din 14 tari.
   http://math.univ-ovidius.ro/Conference/ETMAGT60/
   Dorin Popescu a prezentat aici comunicarea *A hope for Stanley Conjecture on monomial ideals*.
2. *Joint International Meeting of the American Mathematical Society and the Romanian Mathematical Society*, organizata la Universitatea "1 Decembrie 1918" din Alba Iulia in perioada 27-30 iunie 2013.
   http://imar.ro/ams-ro2013/description.php
   Viviana Ene a prezentat la aceasta conferinta comunicarea *Binomial ideals and graphs* .
3. Conferinta aniversara *Faculty of Sciences - 150 years* care a avut loc in perioada 29.08-01.09.2013, la Universitatea Bucuresti.
   http://fmi.unibuc.ro/FMI-150/

Dorin Popescu a sustinut comunicarea *Around Stanley's conjecture on monomial ideals* si Viviana Ene a prezentat *Binomial edge ideals*.

4 A XXI-a Scoala Nationala de Algebra cu tema *Algebraic Methods in Combinatorics*, organizata la Institutul de Matematica al Academiei Romane, in perioada 2-6 Septembrie 2013. La scoala au participat un numar mare de studenti masteranzi si doctoranzi, atat din tara cat si din strainatate.

Membri ai grantului au predat urmatoarele lectii (acompaniate si de tutoriale):

– *Algebraic and homological properties of binomial edge ideals* (2 lectii), Viviana Ene,
– *Tools of Combinatorial Commutative Algebra*, Dumitru Stamate
– *Matroids and realisability*, Dumitru Stamate
– *Polymatroidal ideals* (2 lectii), Marius Vladoiu

Au fost, de asemenea, prezentate urmatoarele comunicari:

– *Stanley depth of quotient of monomial complete intersection ideals*, Mircea Cimpoeas
– *Depth of some special monomial ideals*, Andrei Zarojanu.

Toti membrii grantului isi prezinta in mod regulat noile rezultate in cadrul Seminarului de Algebra Comutativa si Combinatorica ”Nicolae Radu”.

REFERENCES

[1] A. Aramova, J. Herzog, T. Hibi, Finite lattices and lexicographic Gröbner bases, European J. Combin. **21** (2000), 431–439.

[2] A. Aslam, V. Ene, Simplicial complexes with rigid depth, Arch. Math. 99 (4) (2012), 315-325.

[3] L.L. Avramov, A. Conca, S. Iyengar, Subadditivity of syzygies of Koszul algebras, arXiv:1308.6811.

[4] N. Ay, J. Rauh, Robustness and conditional independence ideals, 2011, arXiv:1110.1338.

[5] M. Brun, G. Floystad, The Auslander-Reiten translate on monomial rings, Adv. Math. 226, 952–991, 2011.

[6] H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, Markov Bases of Lattice Ideals, arXiv:1303.2303v1.

[7] H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, Markov bases and generalized Lawrence liftings, arXiv:0697072v1.

[8] H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, Markov complexity of monomial curves, submitted, arXiv:1311.4707v1.

[9] M. Cimpoeas, The Stanley conjecture on monomial almost complete intersection ideals, Bull. Soc. Math. Roumanie. vol 55(103), no. 1 (2012), 35-39.

[10] M. Cimpoeas, Stanley depth of quotient of monomial complete intersection ideals, va aparea in Comm. Algebra.

[11] CoCoATeam, CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra, available at http://cocoa.dima.unige.it

[12] A. Conca, E. De Negri, M. E. Rossi, Koszul Algebras and Regularity, in: Commutative Algebra, Expository Papers Dedicated to David Eisenbud on the Occasion of His 65th Birthday (ed. Irena Peeva), (2013) 285–315.

[13] D. A. Cox, A. Erskine, On closed graphs, arXiv:1306.5149.

[14] M. Crupi, G. Rinaldo, Binomial edge ideals with quadratic Gröbner bases, Electron. J. Combin., **18** (2011), no. 1, # P211.

[15] P. Diaconis, B. Sturmfels, Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions, Ann. Statist. **26**, 363–397 (1998).

[16] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, Cohen-Macaulay binomial edge ideals, Nagoya Math. J. **204**, 57–68, 2011.

[17] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, Koszul binomial edge ideals, submitted, arXiv:1310.6426v1.

[18] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, F. Mohammadi, Determinantal facet ideals, Michigan Math. J. 62, 39–57, 2013 .

[19] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, A. A. Qureshi, The binomial edge ideal of a pair of graphs, va aparea in Nagoya Math. J.

[20] V. Ene, R. Okazaki, On the radical of muligraded modules, J. Algebra 388, 10–21, 2013.

[21] V. Ene, A. Qureshi, Ideals generated by diagonal 2-minors, Comm. Algebra 41(8), 3058–3066, 2013.

[22] V. Ene, A. A. Qureshi, A. Rauf, Regularity of join-meet ideals of distributive lattices, Electron. J. Combin. **20** (3) (2013) #P20

[23] V. Ene, A. Zarojanu, On the regularity of binomial edge ideals, va apare in Math. Nachr.

[24] C. Francisco, J. Migliore and U. Nagel, On the componentwise linearity and the minimal free resolution of a tetrahedral curve, J. Algebra **299**, 535–569 (2006).

[25] J. Herzog, Generators and Relations of Abelian Semigroups and Semigroup Rings, Manuscripta Math. **3**, 175-193 (1970).

[26] J. Herzog, A survey on Stanley depth. In "Monomial Ideals, Computations and Applications", A. Bigatti, P. Giménez, E. Sáenz-de-Cabezón (Eds.), Proceedings of MONICA 2011. Springer Lecture Notes in Mathematics 2083 (2013).

[27] J. Herzog, T. Hibi, Finite lattices and Gröbner bases, Math. Nachr. **285** (2012), 1969–1973.

[28] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdotir, T. Kahle, J. Rauh, Binomial edge ideals and conditional independence statements, Adv. Appl. Math. **45** (2010), 317–333.

[29] H. Herzog, Y. Takayama, N. Terai, On the radical of a monomial ideal, Arch. Math. 85, 397–408, 2005.

[30] J. Herzog and M. Vladoiu, Monomial ideals with primary components given by powers of monomial prime ideals, arXiv:1310.3409.

[31] T. Hibi, Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, in"Commutative Algebra and Combinatorics" (M. Nagata and H. Matsumura, Eds.), Advanced Studies in Pure Math., Volume 11, North–Holland, Amsterdam, 1987, pp. 93 – 109.

[32] T. Hibi, Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, Nagoya Math. J. **112**(1988), 1–24.

[33] T. Hibi, Hilbert functions of Cohen-Macaulay integral domains and chain conditions of finite partially ordered sets, J. Pure Appl. Algebra **72**(1991), 265–273.

[34] B. Ichim and J.J. Moyano-Fernández, How to compute the multigraded Hilbert depth of a module, va aparea in Mathematische Nachrichten, arXiv:1209.0084v2

[35] B. Ichim and A. Zarojanu, An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module, arXiv:1304.7215v1.

[36] S. Kim, Distributive lattices, affine semigroups, and branching rules of the classical groups, J. Combin. Theory Ser. A, **119** (6), (2012), 1132–1157.

[37] K. Matsuda, S. Murai, Regularity bounds for binomial edge ideals, J. Commut. Algebra **5** (2013), 141–149.

[38] J. Migliore and U. Nagel, Tetrahedral curves, Int. Math. Res. Notices **15**, 899–939 (2005).

[39] E. Miller, The Alexander duality functors and local duality with monomial support, J. Algebra 231, 180-234, 2000.

[40] N. C. Minh, N. V. Trung, Cohen-Macaulayness of monomial ideals and symbolic powers of Stanley-Reisner ideals, Adv. Math. 226, 1285-1306, 2011.

[41] M. Ohtani, Graphs and Ideals generated by some 2-minors, Commun. Algebra **39** (2011), no. 3, 905–917.

[42] M. Ohtani, Binomial edge ideals of complete multipartite graphs, Commun. Algebra **41** (2013), no. 10, 3858–3867.

[43] D. Popescu, Depth of factors of square free monomial ideals, acceptat spre publicare in Proceedings AMS, arXiv:AC/1110.1963.

[44] D. Popescu, Upper bounds of depth of monomial ideals, J. Commutative Alg. 5(2), 323-327, 2013.

[45] D. Popescu, Stanley depth on five generated, squarefree, monomial ideals, preprint 2013.

[46] D. Popescu, A. Zarojanu, Depth of some square free monomial ideals, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, vol 56(104) No. 1, 117-124, 2013.

[47] D. Popescu, A. Zarojanu, Depth of some special monomial ideals, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, vol 56 (104) No. 3, 365-368, 2013.

[48] D. Popescu, A. Zarojanu, Three generated squarefree monomial ideals, trimis spre publicare, arXiv:1307.8292.

[49] A. Qureshi, Indispensable Hibi relations and Gröbner bases, va aparea in Algebra Colloq.

[50] A. Rauf, G.Rinaldo, Construction of Cohen-Macaulay binomial edge ideals, va aparea in Commun Algebra

[51] J. Rauh. Generalized binomial edge ideals. Adv. Appl. Math. **50**(3), (2013), 409–414.

[52] J.E. Roos, B. Sturmfels, A toric ring with irrational Poincaré-Betti series, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 141–146.

[53] S. Saeedi Madani and D. Kiani, Binomial edge ideals of graphs, Electron. J. Combin, **19** (2012), no. 2, # P44.

[54] S. Saeedi Madani and D. Kiani, On The Binomial Edge Ideal of a Pair of Graphs, Electron. J. Combin, **20** (2013), no. 1, # P48.

[55] F. Santos, B. Sturmfels, Higher Lawrence configurations, J. Combin. Theory Ser. A **103**, 151–164 (2003).

[56] P. Schenzel, S. Zafar, Algebraic properties of the binomial edge ideal of a complete bipartite graph, va aparea in An. St. Univ. Ovidius Constanta, Ser. Mat.

[57] S. Zafar, On approximately Cohen-Macaulay binomial edge ideal, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Tome **55**(103) (2012) No. 4, 429–442.

Director grant,

Prof. dr. Dorin Popescu