RAPORT STIINTIFIC AL GRANTULUI

PN–II–ID–PCE–2011–3–1023, NR. 247/2011,

IN PERIOADA 01.01.2014 – 30.11.2014

INTRODUCERE

Vom prezenta in acest raport activitatea desfasurata in perioada 01.01.2014 – 30.11.2014 de membrii grantului PN–II–ID–PCE–2011–3–1023, nr. 247/2011, avand titlul ”Algorithmic and theoretical methods for studying monomial and binomial ideals with applications in combinatorics, commutative algebra and graph theory” si al carui director este Prof. dr. Dorin Popescu. Pentru o mai buna vizualizare vom prezenta in Sectiunea 1 rezultatele stiintifice obtinute in aceasta perioada de catre membrii grantului, iar in Sectiunea 2 vom prezenta modul in care au fost diseminate rezultatele acestui grant, la conferintele/stagiile de cercetare finantate din bugetul acestui grant. Mentionam ca toate realizarile cuprinse in cadrul acestui raport pot fi consultate la adresa grantului

`https://dl.dropboxusercontent.com/u/112281424/grantPCE-2011-3-1023/indexDP.html`

In ceea ce priveste rezultatele stiintifice, situatia in acest an calendaristic este urmatoarea:

Lucrari publicate:

(1) D. Popescu, *Depth of factors of squarefree monomial ideals,* **Proceedings AMS** 142, 1965–1972, 2014.
(2) H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, *Markov complexity of monomial curves,* **J. Algebra** 417, 391–411, 2014.
(3) J. Herzog, M. Vladoiu, *Monomial ideals with primary components given by powers of monomial prime ideals,* **Electronic J. Combinatorics** 21(1), #P1.69, 2014.
(4) B. Ichim, A. Zarojanu, *An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module,* **Experimental Mathematics** 23(3), 322–331, 2014.
(5) V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Koszul binomial edge ideals* Bridging Algebra, Geometry, and Topology, **Springer Proceedings in Mathematics & Statistics**, 96, D. Ibadula, W. Veys (Eds.) Springer, 127–138, 2014.
(6) M. Cimpoeaş, *Stanley depth of quotient of monomial complete intersection ideals,* **Comm. in Algebra** 42, 4274–4280 (2014).

Lucrari acceptate spre publicare:

(1) V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Linear flags and Koszul filtrations*, va aparea in **Kyoto J. Math**.
(2) V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Linearly related polyominoes*, va aparea in **J. Algebraic Combinatorics**, DOI 10.1007/s10801-014-0560-3.

(3) F. Chaudhry, A. Dokuyucu, V. Ene, *Binomial edge ideals and rational normal scrolls*, va aparea in **Bull. Iranian Math. Soc.**.
(4) V. Ene, *Syzygies of Hibi rings*, va aparea in **Acta Mathematica Vietnamica**, special volume dedicated to the 60th birthday of Professor N. V. Trung.
(5) V. Ene, A. Zarojanu, *On the regularity of binomial edge ideals*, va aparea in **Mathematische Nachrichten**, DOI: 10.1002/mana.201300186.
(6) D. Popescu, A. Zarojanu, Three generated squarefree monomial ideals, va aparea in **Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie**, 58(106), no. 3, 2015, vezi si arXiv:1307.8292.

Lucrari trimise spre publicare:

(1) V. Ene, J. Herzog, S. Saeedi Madani, *A note on the regularity of the Hibi rings*, preprint, arXiv:1404.2554.
(2) V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, S. Saeedi Madani, *Pseudo-Gorenstein and level Hibi rings*, preprint, arXiv:1405.6963.
(3) A. Dimca, D. Popescu, *Hilbert series and Lefschetz properties of dimension one almost complete intersections*, preprint, arXiv:1403.5921.
(4) D. Popescu, *Depth in a pathological case*, preprint, arXiv:1406.1398.

1. Rezultate stiintifice obtinute in 2014

In cele ce urmeaza prezentam pe scurt rezultatele obtinute in cele 8 lucrari elaborate in anul 2014.

1. V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Linear flags and Koszul filtrations*, va aparea in Kyoto J. Math.

Fie K un corp si $S = K[x_1, \dots, x_n]$ inelul de polinoame in n nedeterminate. Fie $I \subset (x_1, \dots, x_n)^2$ un ideal graduat al lui S. Consideram K-algebra $R = S/I$ si notam cu $\mathfrak{m}$ idealul sau maximal graduat. Algebra R se numeste Koszul daca $K = R/\mathfrak{m}$ are rezolutie R-liniara. Se stie ca daca R este Koszul, atunci I este generat de quadrice, iar daca I are o baza Gröbner patratica, atunci R este Koszul. In [27] a fost introdusa notiunea de algebra tare Koszul. Orice algebra tare Koszul este Koszul [27], dar invers nu este adevarat.

O alta conditie suficienta pentru proprietatea lui R de a fi Koszul este data de existenta unei filtrari Koszul pentru R [8, 7].

In articolul nostru, am studiat legatura intre urmatoarele proprietati:

(i) R admite o filtrare Koszul;
(ii) I are o baza Gröbner patratica.

In Teorema 1.1 am aratat ca daca I are o baza Gröbner patratica relativ la ordonarea revlexicografica, atunci R admite un 'flag' liniar. Un lant de ideale in R generate de forme liniare

$$(0) = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

se numeste flag liniar daca, pentru orice j, I_{j+1}/I_j este ciclic si anulatorul sau este generat de forme liniare.

In general, chiar daca I este un ideal binomial care are o baza Gröbner patratica relativ la ordonarea revlexicografica, idealele cat $(\bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) : \bar{x}_i$ nu sunt neaparat generate de submultimi ale $\{\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}\}$. Dar pentru unele clase de ideale binomiale care apar din combinatorica, aceasta proprietate are loc: Teorema 1.6, Teorema 2.1, Corolarul 2.6.

2. V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, *Linearly related polyominoes*, va aparea in J. Algebraic Combin. DOI 10.1007/s10801-014-0560-3.

Idealele polyomino au fost introduse in [45]. Ele includ idealele determinantale asociate cu 'two-sided ladders' si idealele binomiale Hibi asociate laticelor distributive planare. Un ideal polyomino este generat de o colectie de minori de ordin 2 ai unei matrice generice X de tip $m\times n$. In articol, am considerat asemenea colectii de minori cu o proprietate suplimentara de convexitate.

Intelegerea rezolutiilor acestor ideale este o problema dificila. In [17] a fost calculata regularitatea idealelor Hibi asociate laticelor distributive. Sharpe [S1,S2] a aratat ca idealul determinantal $I_2(X)$ al tuturor minorilor de ordin 2 ai lui X are relatii liniare. Kurano [32] a extins acest rezultat la ideale $I_t(X)$ unde $2\leq t\leq \min(m,n)$. Hashimoto a aratat ca, in general, rezolutia idealelor determinantale depinde de caracteristica corpului de baza [21]. Bruns si Herzog au arata in [3] ca numarul Betti $\beta_2(I_2(X))$ nu depinde de caracterstica corpului.

Folosind ca instrument de baza complexul de divizori liberi de patrate introdus de Bruns si Herzog in [3], am clasificat idealele polyomino care au relatii liniare. In plus, pentru un polyomino $\mathscr{P}$, am determinat in ce conditii idealul asociat $I_{\mathscr{P}}$ are rezolutie liniara. In particular, au fost obtinute si alte rezultate referitoare la rezolutia idealelor Hibi asociate laticelor distributive.

3. F. Chaudhry, A. Dokuyucu, V. Ene, *Binomial edge ideals and rational normal scrolls*, va aparea in Bull. Iranian Math. Soc.

Date o matrice Hankel de tip $2\times n$,

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n\\ x_2 & \dots & x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}.$$

si un graf G pe multimea $[n]$, se considera idealul $I_G\subset R=K[x_1,\dots,x_{n+1}]$ generat de minorii maximali ai matricei X care corespund muchiilor lui G. Pentru un graf inchis, inzestrat cu o etichetare naturala a varfurilor sale, generatorii lui I_G formeaza chiar baza Gröbner relativ la ordonarea revlexicografica. Ca o consecinta la acest rezultat se obtine ca idealul I_G este Cohen-Macaulay de dimensiune egala cu 1+numarul de componente conexe ale grafului. In Sectiunea 2 a articolului se determina idealele prime asociate ale lui I_G pentru G conex si inchis. Acest rezultat permite caracterizarea grafurilor inchise conexe pentru care I_G este ideal radical. In aceeasi ipoteza pentru G, se obtine si faptul ca I_G este intersectie completa set-teoretica Cohen-Macaulay. In ultima sectiune a articolului, pentru un graf inchis, se obtine ca regularitatea lui R/I_G este mai mica sau egala cu numarul de clicuri maximale ale lui G. Drept corolar, se caracterizeaza grafurile inchise G pentru care I_G are rezolutie liniara.

4. V. Ene, *Syzygies of Hibi rings*, va aparea in Acta Mathematica Vietnamica, special volume dedicated to the 60th birthday of Professor N. V. Trung.

Acest articol este un survey asupra unor rezultate recente care studiaza rezolutiile inelelor Hibi (generalizate) asociate laticelor distributive. El cuprinde 3 sectiuni: Hibi rings and their Gröbner bases, Level and pseudo-Gorenstein Hibi rings, The regularity of Hibi rings.

Inlele Hibi au fost introduse de Hibi in anul 1987 [28]. Ele apar in diverse contexte algebrice si combinatoriale.

Fie L o latice distributiva finita. Dintr-o celebra teorema a lui Birkhoff, se stie ca L este laticea $\mathscr{I}(P)$ a idealeleor poset ale posetului P format cu elementele join-ireductibile ale lui L. Fie $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ si $R = K[t, x_1, \ldots, x_n]$ inelul de polinoame in $n+1$ nedeterminate peste un corp K. Inelul Hibi $R[L]$ asociat lui L este inelul toric peste K generat de monoamele $u_\alpha = t\prod_{p_i \in \alpha} x_i$, unde α este ideal in P. Inelul $R[L]$ este o algebra standard graduata peste K cu $\deg u_\alpha = 1$ pentru orice $\alpha \in L$. Idealul de definitie al acestui inel se numeste idealul Hibi asociat laticei L.

Hibi a aratat ca inelele sale au structura de ASL (algebra with straightening laws) si ca sunt domenii normale Cohen-Macaulay. Mai mult, el a caracterizat in functie de P inelele $R[L]$ care sunt Gorenstein. In ultimii ani s-au studiat diverse proprietati ale inelelor si idealelor Hibi. De exemplu, bazele Gröbner ale idealului de definitie al unui inel Hibi in [1, 26, 46], diverse proprietati legate de proprietatea Koszul [6, 27], inelul claselor de divizori al unui inel Hibi [20], proprietati geometrice ale varietatii asociate idealului Hibi [52]. Mare parte din aceste proprietati sunt prezentate in prima sectiune a acestui survey.

In [15] au fost introduse inelele si idealele Hibi generalizate. In prima sectiune a articolului nostru aratam ca acestea au, de asemenea, structura de ASL si regasim baza Gröbner a idealului de definitie asociat.

In a doua sectiune a lucrarii prezentam rezultate recente privind proprietatile inelelor Hibi (generalizate) de a fi level sau pseudo-Gorenstein. Parte din aceste rezultate au fost obtinute in lucrarea [V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, S. Saeedi Madani, *Pseudo-Gorenstein and level Hibi rings*, arXiv:1405.6963.]

In ultima sectiune prezentam formula regularitatii lui $R[L]$ in functie de posetul P care a fost obtinuta in lucrarea [V. Ene, J. Herzog, S. Saeedi Madani, *A note on the regularity of Hibi rings*, arXiv:1404.2554] si deducem caracterizari ale laticelor pentru care $R[L]$ are rezolutie liniara sau pura.

5. V. Ene, J. Herzog, S. Saeedi Madani, *A note on the regularity of the Hibi rings*, arXiv:1404.2554.

Despre inelul Hibi $R[L]$ asociat unei latice distriutive $L = \mathscr{I}(P)$, unde P este un poset finit, se stia deja din lucrarile lui Hibi ca $\dim R[L] = |P|+1$, deci $\operatorname{proj}\dim R[L] = |L| - |P| - 1$ deoarece $R[L]$ este Cohen-Macaulay. Prima incercare de a studia regularitatea lui $R[L]$ a fost facuta in lucrarea [17]. Aici se demonstreaza, in cazul cand laticea este planara, ca regularitatea lui $R[L]$ este egala cu numarul maxim de patrate dintr-o sublatice ciclica a lui L. In lucrarea noastra demonstram ca, pentru orice latice distributiva L,

$$\operatorname{reg} R[L] = |P| - \operatorname{rank} P - 1.$$

Demonstratia acestei egalitati foloseste descrierea combinatoriala data de Hibi in [28] pentru generatorii idealului canonic al lui $R[L]$. Se poate obtine si o demonstratie pur combinatoriala a acestei formule pe care o prezentam in linii mari in articol. Formula pentru $\operatorname{reg} R[L]$ permite si caracterizarea laticelor pentru care regularitatea lui $R[L]$ este 1 sau 2.

6. V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, S. Saeedi Madani, *Pseudo-Gorenstein and level Hibi rings*, arXiv:1405.6963.

In acest articol se continua studiul inelelelor si idealelor Hibi inceput in articolul precedent. Pentru o alagebra standard graduata R care este Cohen-Macaulay si are modulul canonic ω_R, se stie ca R este Gorenstein daca si numai daca ω_R este ciclic. Conditia asupra lui ω_R se poare relaxa cel putin in doua directii. In cazul cand ω_R este generat intr-un singura grad, atunci R se numeste level. Cand exista un singur generator al lui ω_R in cel mai mic grad, spunem ca R este pseudo-Gorenstein. Aceasta ultima notiune a fost introdusa in articolul nostru.

In lucrare caracterizam laticele distributive L in functie de posetul P al elementelor join-ireductibile ale lui L pentru care inelul Hibi corespunzator este psedo-Gorenstein. In plus, explicam care sunt relatiile dintre aceasta notiune si proprietatea level sau Gorenstein. Introducem notiunea de latice hyper-planara care constituie o generalizare naturala a laticelor planare. In lucrare demonstram ca o latice hyper-planara este pseudo-Gorenstein (adica inelul sau Hibi are aceasta proprietate) daca si numai daca toate lanturile dintr-o descompunere canonica a lui P au aceeasi lungime.

O conditie suficienta pentru proprietatea level a lui $R[L]$ a fost data in [35]. Aceasta nu este si necesara. In lucrare am dat o conditie necesara pentru ca $R[L]$ sa fie level si conjecturam ca aceasta conditie este si suficienta. Conditia pe care am obtinut-o se exprima in functie de combinatorica posetului P. Pentru laticele planare care satisfac o conditie de regularitate demonstram ca acea conditie necesara pentru proprietatea level este si suficienta. In ultima sectiune a articolului studiem proprietatile level si pseudo-Gorenstein pentru inele Hibi generalizate.

7. A. Dimca, D. Popescu, *Hilbert series and Lefschetz properties of dimension one almost complete intersections*, arXiv:1403.5921.

Fie $S = K[x_0,\ldots,x_n]$ algebra polinoamelor peste un corp de caracteristica zero K si $f = f_0,\ldots,f_n$ un sistem de polinoame cu deg $f_i = d_i$ aproape intersectie completa. Se descrie seria Hilbert a lui $S/(f)$ in functie de seria Hilbert a lui S/I unde I este saturatul lui (f) in S. In cazul cand I este intersectie completa se poate determina complet seria Hilbert a lui $S/(f)$.

Problema provine din teoria singularitatilor. Fie $V \subset \mathbf{P}^n$ o hipersuprafata proiectiva cu singularitati izolate data de o ecuatie $g = 0$, $g \in S$. Atunci derivatele partiale $g_0,\ldots,g_n$ sunt in conditiile de mai sus si se poate descrie seria Hilbert a algebrei Milnor $M(g) = S/(g_0,\ldots,g_n)$ asociata lui g. Aceasta ajuta la calculul diferitilor invarianti ai lui V.

In acest context se studiaza proprietatile Lefschetz ale algebrei $M(g)$. Proprietatile Lefschetz sunt studiate de multa vreme. Dar in acest domeniu persista cateva conjecturi celebre chiar pentru cazul cand $f_0,\ldots,f_n$ este un sir regulat. Ceea ce s-a facut e complet valabil pentru $n \le 2$. Alte mici rezultate sunt facute pentru $n > 2$ si par a fi generos finantate de NSA. Se crede ca aceste rezultate au aplicatii in criptografie. In lucrarea de fata se obtine o proprietate de tip Lefschetz pentru cazul cand f este doar aproape intersectie completa si $n = 2$, in particular pentru $M(g)$ in cazul cand $n = 2$. Daca $n > 2$ exista contraexemple.

8. D. Popescu, *Depth in a pathological case*, arXiv:1406.1398.

Fie $S = K[x_1,\ldots,x_n]$ algebra polinoamelor peste un corp K si $J \subset I \subset S$ doua ideale monomiale. Presupunem ca I este minimal generat de niste monoame $f_1,\ldots,f_r$ libere de patrate de grad d si o multime E de monoame libere de patrate de grad $\ge d+1$, iar J este sau zero sau generat de monoame libere de patrate de grad $\ge d+1$. Fie w_{ij} cel mai mic multiplu comun al lui f_i, f_j, $1 \le i < j \le r$ si W multimea tutror w_{ij} posibili. Fie B multimea monoamelor libere de patrate din $I \setminus J$ de grad $d+1$.

In aceasta lucrare se arata ca daca $B \setminus E \subset W$ (in terminologia data I/J este un caz patologic) atunci $\text{depth}_S I/J \leq d+1$. Aceasta implica valabilitatea Conjecturii Stanley in cazul patologic, deoarece lucrarea proc3 arata deja ca daca asa numitul Stanley depth al lui I/J este d atunci rezulta $\text{depth}_S I/J = d$. Pentru demonstratie se observa intai reducerea la cazul $E = \emptyset$. Aceasta este imediata folosind asa numita Depth Lema. In cazul cand $E = \emptyset$ o observatie interesanta spune ca daca $r > 1$ si $\text{depth}_S I/(J, f_r) = d$ atunci $\text{depth}_S I/J \leq d+1$. Aici se foloseste omologia Koszul.

Demonstratiile sunt dificile si inspirate de studiul mai multor exemple obtinute cu Sistemul Computer Algebra SINGULAR.

2. Diseminarea rezultatelor

In acest an membrii echipei de cercetare a grantului au sustinut urmatoarele comunicari la Scoala Nationala de Algebra, desfasurata in perioada 1-5 septembrie la sediul IMAR (vezi `http://math.univ-ovidius.ro/sna/edition.aspx?cat=GeneralInfo&itemID=8`):

1. Viviana Ene, ”Hibi rings and their Grobner bases”, 1.09.2014.
2. Miruna Roşca, ”Vertex cover algebras of weighted graphs”, 1.09.2014.
3. Viviana Ene, ”Level and pseudo - Gorenstein Hibi rings”, 2.09.2014.
4. Andrei Zarojanu, ”An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module”, 2.09.2014.
5. Viviana Ene, ”The regularity of Hibi rings”, 4.09.2014.

De asemenea, dorim sa mentionam ca editia din acest an a avut printre organizatori si cativa membri ai echipei grantului: Viviana Ene, Miruna Roşca, Andrei Zarojanu, Dumitru Stamate si Marius Vlădoiu. In plus, toti membrii grantului isi prezinta in mod regulat noile rezultate in cadrul Seminarului de Algebra Comutativa si Combinatorica ”Nicolae Radu”, vezi link-ul de mai jos cu istoricul conferintelor saptamanale din 2014.
`http://www.imar.ro/organization/activities/archive/seminars_arh_sem_19_2014_s.php`

References

[1] A. Aramova, J. Herzog, T. Hibi, Finite lattices and lexicographic Gröbner bases, European J. Combin. **21** (2000), 431–439.

[2] M. Brun, G. Floystad, The Auslander-Reiten translate on monomial rings, Adv. Math. 226, 952–991, 2011.

[3] W. Bruns, J. Herzog, *Semigroup rings and simplicial complexes*, J. Pure Appl. Algebra **122** (1997), 185–208.

[4] M. Cimpoeas, The Stanley conjecture on monomial almost complete intersection ideals, Bull. Soc. Math. Roumanie. vol 55(103), no. 1 (2012), 35-39.

[5] M. Cimpoeas, Stanley depth of quotient of monomial complete intersection ideals, va aparea in Comm. Algebra.

[6] A. Conca, Universally Koszul algebras, Math. Ann. **317** (2000), 329–346.

[7] A. Conca, M. E. Rossi, G. Valla, Gröbner flags and Gorenstein algebras, Compositio Math. **129** (2001), 95–121.

[8] A. Conca, N. V. Trung, G. Valla, Koszul property for points in projective space, Math. Scand. **89** (2001), 201–216.

[9] D. A. Cox, A. Erskine, On closed graphs, arXiv:1306.5149.

[10] M. Crupi, G. Rinaldo, Binomial edge ideals with quadratic Gröbner bases, Electron. J. Combin., **18** (2011), no. 1, # P211.

[11] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, Cohen-Macaulay binomial edge ideals, Nagoya Math. J. **204**, 57–68, 2011.

[12] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, Koszul binomial edge ideals, submitted, arXiv:1310.6426v1.

[13] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, F. Mohammadi, Determinantal facet ideals, Michigan Math. J. 62, 39–57, 2013 .

[14] V. Ene, J. Herzog, T. Hibi, A. A. Qureshi, The binomial edge ideal of a pair of graphs, va aparea in Nagoya Math. J.

[15] V. Ene, J. Herzog, F. Mohammadi, *Monomial ideals and toric rings of Hibi type arising from a finite poset*, European J. Combin. **32** (2011), 404–421.

[16] V. Ene, A. Qureshi, Ideals generated by diagonal 2-minors, Comm. Algebra 41(8), 3058–3066, 2013.

[17] V. Ene, A. A. Qureshi, A. Rauf, *Regularity of join-meet ideals of distributive lattices*, Electron. J. Combin. **20** (3) (2013), #P20.

[18] V. Ene, A. Zarojanu, On the regularity of binomial edge ideals, va apare in Math. Nachr.

[19] M. Hashimoto, *Determinantal ideals without minimal free resolutions*, Nagoya Math. J. **118** (1990), 203–216.

[20] M. Hashimoto, T. Hibi, A. Noma, *Divisor class groups of affine semigroup rings associated with distributive lattices*, J. Algebra **149** (1992), 352–357.

[21] J. Herzog, A survey on Stanley depth. In "Monomial Ideals, Computations and Applications", A. Bigatti, P. Giménez, E. Sáenz-de-Cabezón (Eds.), Proceedings of MONICA 2011. Springer Lecture Notes in Mathematics 2083 (2013).

[22] J. Herzog, T. Hibi, Finite lattices and Gröbner bases, Math. Nachr. **285** (2012), 1969–1973.

[23] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdotir, T. Kahle, J. Rauh, Binomial edge ideals and conditional independence statements, Adv. Appl. Math. **45** (2010), 317–333.

[24] H. Herzog, Y. Takayama, N. Terai, On the radical of a monomial ideal, Arch. Math. 85, 397–408, 2005.

[25] J. Herzog and M. Vladoiu, Monomial ideals with primary components given by powers of monomial prime ideals, arXiv:1310.3409.

[26] J. Herzog, T. Hibi, *Finite lattices and Gröbner bases*, Math. Nachr. **285** (2012), 1969–1973.

[27] J. Herzog, T. Hibi, G. Restuccia, Strongly Koszul Algebra, Math. Scand. **86** (2000), 161–178.

[28] T. Hibi, *Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws*, In: "Commutative Algebra and Combinatorics" (M. Nagata and H. Matsumura, Eds.), Adv. Stud. Pure Math. **11**, North–Holland, Amsterdam, (1987), 93–109.

[29] T. Hibi, Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, Nagoya Math. J. **112**(1988), 1– 24.

[30] T. Hibi, Hilbert functions of Cohen-Macaulay integral domains and chain conditions of finite partially ordered sets, J. Pure Appl. Algebra **72**(1991), 265–273.

[31] B. Ichim and A. Zarojanu, An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module, arXiv:1304.7215v1.

[32] K. Kurano, *The first syzygies of determinantal ideals*, J. Algebra **124** (1989), 414–436.

[33] S. Kim, Distributive lattices, affine semigroups, and branching rules of the classical groups, J. Combin. Theory Ser. A, **119** (6), (2012), 1132–1157.

[34] K. Matsuda, S. Murai, Regularity bounds for binomial edge ideals, J. Commut. Algebra **5** (2013), 141–149.

[35] M. Miyazaki, *A sufficient condition for a Hibi ring to be level and levelness of Schubert cycles*, Comm. Alg. **35** (2007), 2894–2900.

[36] D. Popescu, Depth of factors of square free monomial ideals, acceptat spre publicare in Proceedings AMS, arXiv:AC/1110.1963.

[37] D. Popescu, Upper bounds of depth of monomial ideals, J. Commutative Alg. 5(2), 323-327, 2013.

[38] D. Popescu, Stanley depth on five generated, squarefree, monomial ideals, preprint 2013.

[39] D. Popescu, A. Zarojanu, Depth of some square free monomial ideals, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, vol 56(104) No. 1, 117-124, 2013.

[40] D. Popescu, A. Zarojanu, Depth of some special monomial ideals, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, vol 56 (104) No. 3, 365-368, 2013.

[41] D. Popescu, A. Zarojanu, Three generated squarefree monomial ideals, trimis spre publicare, arXiv:1307.8292.

[42] A. Qureshi, Indispensable Hibi relations and Gröbner bases, va aparea in Algebra Colloq.

[43] A. Rauf, G.Rinaldo, Construction of Cohen-Macaulay binomial edge ideals, va aparea in Commun Algebra

[44] J.E. Roos, B. Sturmfels, A toric ring with irrational Poincaré-Betti series, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 141–146.

[45] A. Qureshi, *Ideals generated by* 2*-minors, collections of cells and stack polyominoes*, J. Algebra **357** (2012), 279–303.

[46] A. Qureshi, *Indispensable Hibi relations and Gröbner bases*, to appear in Algebra Colloq.

[47] S. Saeedi Madani and D. Kiani, Binomial edge ideals of graphs, Electron. J. Combin, **19** (2012), no. 2, # P44.

[48] S. Saeedi Madani and D. Kiani, On The Binomial Edge Ideal of a Pair of Graphs, Electron. J. Combin, **20** (2013), no. 1, # P48.

[49] F. Santos, B. Sturmfels, Higher Lawrence configurations, J. Combin. Theory Ser. A **103**, 151–164 (2003).

[50] D. W. Sharpe, *On certain polynomial ideals defined by matrices*, Quart. J. Math. Oxford (2) **15** (1964), 155–175.

[51] D. W. Sharpe, *The syzygies and semi-regularity of certain ideals defined by matrices*, Proc. London Math. Soc. **15** (1965), 645–679.

[52] D. G. Wagner, *Singularities of toric varieties associated with finite distributive lattices*, J. Algebraic Combin. **5**(1996), 149–165.

Director grant,

Prof. dr. Dorin Popescu