RAPORT ŞTIINŢIFIC PRIVIND IMPLEMENTAREA PROIECTULUI PN-II-RU-PD-2012-3-0656 ÎN PERIOADA MAI-DECEMBRIE 2013

DUMITRU I. STAMATE

Date de identificare

Proiect PN-II-RU-PD-2012-3-0656
Contract nr. 7 / 24.04.2013
Titlul: Combinatorial and homological methods in the study of algebras
Pagina web: https://dl.dropboxusercontent.com/u/112281424/grantPD-2012-3-0656/index.html
Director de proiect: dr. Dumitru Ioan Stamate
Mentor: C.S.I. dr. Mihai Cipu
Instituţia finanţatoare: UEFISCDI
Instituţia gazdă: Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române (IMAR), Bucureşti
Durata proiectului: mai 2013-aprilie 2015
Perioada raportului curent: etapa 1, mai 2013 – decembrie 2013

Contents

1. Scurtă introducere în tematica abordată

Dată o algebră graduată $R = \oplus_i R_i$ şi M-un R-modul graduat finit generat, ne interesează studiul rezoluţiei libere graduate minimale a lui M peste R. Invarianţii acesteia (numerele Betti $\beta_i^R(M)$) sunt foarte importanţi în întelegerea ecuaţiilor ce îl descriu pe M. În multe cazuri de interes, d. ex. când R este algebră de polinoame, iar $M = I$ este un ideal monomial sau binomial, există un plus de structură pe acest modul, ceea ce se reflectă în proprietăţile modulului. Devin disponibile numeroase tehnici combinatoriale, topologice sau omologice. Acesta este un subiect de mare actualitate, pentru detalii trimitem la monografiile [3], [13], [19], [14].

În cazul în care M sau R nu sunt direct graduate, o metodă bună pentru a ne reduce la cazul graduat este să considerăm filtrarea indusă de puterile unui ideal $\mathfrak{m} \subset R$ şi să construim graduatul asociat

$$\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} R = R/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \cdots$$

şi asemănător pentru module obtinem $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} M$. Desigur, anumite proprietăţi se pot pierde, dar ştim de exemplu că numerele Betti pot cel mult creşte prin această trecere: $\beta_i^R(M) \le \beta_i^{\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} R}(\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} M)$. Pentru mai multe discuţii pe aceasta temă se poate consulta [1]. Geometric, dacă $(R, \mathfrak{m})$ este inelul local de coordonate al unei varietăţi în jurul unui punct (originea), graduatul său asociat este inelul de coordonate al conului tangent în punctul de pe varietate, cf. [5], [17].

O clasă specială de inele graduate $R = \oplus_i R_i$ este cea în care R_0 este un corp (sau inel semisimplu) şi are o rezoluţie liniară ca R-modul. Spunem în acest caz că R este Koszul. În cazul algebrelor negraduate ab initio, folosim ideea de mai sus de trecere la graduatul asociat (unei filtrari corespunzatoare) şi putem studia şi pentru acestea proprietatea Koszul. Această idee a fost explorată cu succes de catre V. Reiner şi directorul de proiect în [15] cu perspective de a largi spectrul de aplicaţii.

2. Rezultate principale

În cadrul proiectului a fost deja realizată lucrarea [10]:

Jürgen Herzog, **Dumitru I. Stamate**
On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring, preprint august 2013, 18pp.

Aceasta a fost postată spre consultare pe serverul de preprinturi www.arXiv.org şi a fost trimisă spre evaluare/publicare la o prestigioasa revistă ISI. În cele ce urmează vom prezenta un rezumat al lucrării.

Fie $\mathbf{a} = a_1 < \cdots < a_r$ un şir de numere naturale. Notăm prin $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ (sau mai simplu $\langle \mathbf{a} \rangle$) subsemigrupul lui $\mathbb{N}$ generat de $a_1, \ldots, a_r$. Cu alte cuvinte, $\langle \mathbf{a} \rangle$ constă din toate combinaţiile liniare ale numerelor $a_1, \ldots, a_r$ cu coeficienţi din $\mathbb{N}$. Dacă $H = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ vom numi $a_1, \ldots, a_r$ un *sistem de generatori* pentru H. În continuare, orice subsemigrup $H \subset \mathbb{N}$ cu $0 \in H$ va fi numit *semigrup numeric*. Un astfel de semigrup este finit generat şi admite un unic sistem minimal de generatori a carui cardinalitate o vom nota cu $\mu(H)$. În literatura de specialitate apare adeseori ca parte a definitiei unui semigrup numeric condiţia suplimentară ca cel mai mare divizor comun al generatorilor să fie 1. În contextul acestei lucrări este convenabil să renuntăm la aceasta cerinţă.

Pentru orice întreg k, fie $\mathbf{a} + k$ şirul decalat (shiftat) $a_1 + k, \ldots, a_r + k$. Dacă H este generat minimal de $\mathbf{a} = a_1, \ldots, a_r$, notăm $H_k = \langle \mathbf{a} + k \rangle$. Vom numi mulţimea de semigrupuri $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *familia shiftată (decalată)* ataşată lui H. Se observă că deşi a_i-urile îl genereaza pe H minimal, este posibil ca pentru anumiţi k şirul $\mathbf{a} + k$ să nu fie un sistem minimal de generatori pentru H_k. Aşadar, în particular $(H_k)_\ell$ poate să fie diferit de $H_{k+\ell}$. De exemplu, pentru $H = \langle 3, 5, 7 \rangle$ obţinem $H_1 = \langle 4, 6, 8 \rangle = \langle 4, 6 \rangle$.

Pe de altă parte, dacă $H = \langle \mathbf{a} \rangle$ este generat minimal de $\mathbf{a} = a_1 < \cdots < a_r$, atunci pentru toţi $k > a_r - 2a_1$, H_k este generat minimal de şirul $\mathbf{a} + k$.

Fie K un corp şi $S = K[x_1, \ldots, x_r]$ inelul de polinoame peste K în variabilele $x_1, \ldots, x_r$. Fie $\mathbf{a} = a_1 < \cdots < a_r$ un şir de numere naturale nenule, iar $\varphi : S \to K[t]$ morfismul de K-algebre cu $\varphi(x_i) = t^{a_i}$ pentru $i = 1, \ldots, r$, unde $K[t]$ este inelul de polinoame peste K in variabila t. Dacă notăm $H = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$, atunci imaginea lui φ este inelul semigrupal $K[H]$, adică este K-subalgebra lui $K[t]$ generată de $t^{a_1}, \ldots, t^{a_r}$ peste K. Vom nota nucleul lui φ prin $I(\mathbf{a})$. În cazul în care $\mathbf{a}$ este un sistem minimal de generatori pentru H, idealul $I(\mathbf{a})$ depinde doar de semigrupul H si notăm $I_H = I(\mathbf{a})$.

Se cunoaşte din [9] că numărul minim de generatori $\mu(I_H)$ ai lui I_H este cel mult 3 pentru $r \leq 3$. Pe de alta parte, deja pentru $r = 4$, numarul $\mu(I_H)$ poate fi arbitrar de mare, cf. [2]. Cu atit mai mult, este surprinzator ca pentru orice semigrup numeric H există o margine superioară pentru numerele $\mu(I_{H_k})$ independentă de k, vezi [20, Theorem 1.1]. Acest rezultat a fost conjecturat de J. Herzog şi H. Srinivasan şi a fost demonstrat mai întâi de P. Gimenez, I. Sengupta şi H. Srinivasan în [7] pentru semigrupuri numerice generate de o progresie aritmetică. Această conjectură şi o formă mai tare a ei au fost demonstrate recent de T. Vu in [20].

Deşi pentru $r = 3$ avem că $\mu(I_H) \leq 3$, numărul de generatori pentru I_H^* poate fi arbitrar de mare. O primă familie de astfel de exemple a fost gasită de T. Shibuta, vezi [8]. Pentru această familie *lărgimea* nu este mărginită, unde prin lărgimea (width) semigrupului H, notată $\mathrm{wd}(H)$, inţelegem diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic element din sistemul minimal de generatori ai lui H. În Corolarul 1.16 din lucrare noi demonstrăm că există o margine superioară globală pentru $\mu(I_H^*)$ valabilă pentru toate semigrupurile de lărgime dată. Acest lucru rezultă dintr-o teoremă recentă a lui Vu, cf. [20, Theorem 1.1] şi din urmatoarea teoremă pe care noi o demonstrăm.

Theorem 1.4. *Fie H un semigrup numeric. Atunci există $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $k \geq k_0$, idealul I_{H_k} este generat minimal de o bază standard, iar $\beta_i(I_{H_k}) = \beta_i(I_{H_k}^*)$ pentru toţi i. În particular, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} K[H_k]$ este Cohen–Macaulay pentru toţi $k \geq k_0$.*

Metodele folosite de noi pentru a arăta existenţa unei margini uniforme pentru $\mu(I_H^*)$ pentru toate semigrupurile numerice cu largime fixată nu furnizează însă şi o valoare explicită. Totuşi, experimente numerice cu SINGULAR [4] ne fac să credem că $\binom{\mathrm{wd}(H)+1}{2}$ este o astfel de margine superioară, iar aceasta nu poate fi imbunătăţită deoarece este atinsă de semigrupuri numerice generate de anumite intervale de întregi. Noi demonstrăm că această margine conjecturată este valabilă pentru orice semigrup numeric H cu proprietatea că $\mu(I_H^*) \leq \mu(I_{\widetilde{H}}^*)$, unde $\widetilde{H}$ este semigrupul generat de toţi întregii din intervalul determinat de cel mai mic şi cel mai mare dintre generatorii minimali ai lui H.

În sprijinul conjecturii pe care o facem, demonstrăm în Proposition 2.10 că pentru un semigrup numeric H generat de o progresie aritmetica avem chiar $\beta_i(I_H^*) \leq$

$\beta_i(I^*_{\tilde{H}})$, pentru toţi i. Este posibil ca o astfel de inegalitate să aibă loc pentru orice semigrup numeric!

În ultima secţiune a lucrării considerăm unele exemple de familii de semigrupuri pe care testăm conjecturile şi descriem idealul I^*_H pentru fiecare membru H din familie. Prima familie se bazează pe un rezultat bine-cunoscut al lui J. Sally din [16], unde autoarea descrie idealul relaţiilor conului tangent al unui inel local Gorenstein cu proprietatea că $r = e + d - 3$. Aici r este dimensiunea de scufundare, e este multiplicitatea, iar d este dimensiunea Krull a inelului. Prin semigroup Sally înţelegem un semigrup numeric a cărui algebră semigrupală satisface identitatea de mai sus. Noi arătăm că există semigrupuri Sally de orice multiplicitate $e \geq 4$. O altă familie pe care o considerăm este datorată lui H. Bresinsky [2]. Este prima familie cunoscută de semigrupuri numerice 4-generate cu proprietatea că $\mu(I_H)$ poate fi arbitrar de mare când H parcurge această familie. Noi arătam că orice semigrup Bresinsky este Cohen-Macaulay şi dăm un sistem minimal de generatori care este şi bază standard.

Celelalte două familii se referă la semigrupuri 3-generate, iar deşi membrii familiilor pot avea lărgime arbitrară, totuşi comportamentul lui $\mu(I^*_H)$ este foarte diferit. Pentru $a > 3$, idealul I^*_H asociat semigrupului $H = \langle a, a + 1, 2a + 3\rangle$ este generat de $\lfloor \frac{a-1}{3} \rfloor + 3$ monoame. Pentru această familie, numărul de generatori ai lui I^*_H este o funcţie quasi-liniară în lărgimea lui H, care tinde la infinit când $\mathrm{wd}(H)$ tinde la infinit. Dacă $a = 3b$ regăsim exemplul lui T. Shibuta, tratat cu metode diferite în [8, Example 5.5].

Pe de altă parte, pentru orice $a, b > 3$ coprime, dacă notăm $H = \langle a, b, ab - a - b\rangle$, atunci are loc $\mu(I^*_H) = 4$, deşi lărgimea semigrupurilor de acest tip poate fi arbitrar de mare.

Am avut discuţii semnificative pe teme de cercetare aferente obiectivelor proiectului şi cu alţi specialişti pe care i-am întâlnit la conferinţe sau la universităţile pe care le-am vizitat. În urmatoarele etape vom continua aceste discuţii pentru a obtine noi rezultate valoroase.

3. Diseminarea rezultatelor şi alte activităţi

Această etapă a avut o importantă componentă financiara alocată mobilităţilor. Aceasta a permis întilniri cu reputaţi specialişti de la universităţi de renume, care s-au materializat deja într-o lucrare mentionată mai sus şi alte discuţii care vor fi fructificate în viitorul apropiat. Am fost invitat sa susţin prezentări la toate universităţile vizitate.

Vizite de documentare/colaborare efectuate:

(1) Universitatea Osnabrueck, Germania, iunie 2013. Gazdă: prof. Tim Römer.
(2) Universitatea Duisburg-Essen, Essen, Germania, iulie-august 2013. Gazdă: prof. Jürgen Herzog.
(3) University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, septembrie 2013. Gazdă: prof. Roger Wiegand.
(4) University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, octombrie 2013. Gazdă: prof Victor Reiner.

(5) University of Missouri, Columbia, MO, SUA, octombrie 2013. Gazdă: prof. Hema Srinivasan.

Diseminare:

(1) D. Stamate, *On the CI property of the tangent cone of a toric ring*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, Universitatea Ovidius Constanţa, 8-10 mai 2013.
(2) D. Stamate, *Shifting semigroups*, short talk, Workshop "Syzygies in Berlin", Freie Universität, Berlin, Germania, 28 mai 2013.
(3) D. Stamate, *Shifted semigroup rings*, Oberseminar University of Osnabrueck, Germania, 4 iunie 2013.
(4) D. Stamate, *On the CI property of the tangent cone of a toric ring*, AMS-RMS Joint meeting, Special Session on Commutative Algebra, Alba Iulia, 30 iunie 2013.
(5) D. Stamate, *On the equations of toric rings*, Universitatea Duisburg-Essen, Essen, 29 august 2013.
(6) D. Stamate, *Tools of Combinatorial Commutative Algebra 2*, Scoala Nationala de Algebra "Algebraic methods in Combinatorics", 3 septembrie 2013.
(7) D. Stamate, *Matroids and realisability*, Şcoala Naţională de Algebră "Algebraic methods in Combinatorics", 4 septembrie 2013.
(8) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, 18 septembrie 2013.
(9) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, 14 octombrie 2013.
(10) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Missouri, Columbia, MO, SUA, 22 octombrie 2013.
(11) D. Stamate, *Asymptotic properties of numerical semigroups I, II*, Seminarul de algebra comutativa IMAR & Univ. Bucuresti, 19 si 26 noiembrie 2013.

Alte deplasari sprijinite de acest grant:

(1) Conferinta GMZ50 in onoarea lui Gunter Ziegler, Freie Universität Berlin, Germania, organizata de Christian Haase, Raman Sanyal, Nadja Wisniewski, 25 mai 2013.
(2) COCOA School, Universität Osnbrück, Germania, organizata de W. Bruns, L. Robbiano, A. Bigatti, 10-14 iunie 2013.
(3) ETMAGT-International Conference Experimental and Theoretical Methods in Algebra, Geometry and Topology, Eforie Nord, 20-24 iunie 2013. (Dumitru Stamate si Mihai Cipu)
(4) Algebraic Combinatorics, Madrid, 26-30 noiembrie 2013. (Mihai Cipu)

Discuţiile cu prof. Tim Römer cu ocazia deplasării la Osnbrück în iunie 2013 au favorizat **organizarea** ediţiei din acest an (a 21-a) a Şcolii Naţionale de Algebră-"Algebraic methods in Combinatorics" unde prof. Tim. Römer a fost key-note speaker. Am organizat această activitate la IMAR, 2-6 septembrie 2013, împreună cu Viviana Ene, Mihai Epure, Miruna Roşca, Andrei Zarojanu. Comitetul ştiinţific: Dorin Popescu, Tim Römer, Marius Vlădoiu. Prezenţa a fost foarte numeroasă, inclusiv mulţi studenţi şi doctoranzi.

4. Planuri de viitor

În etapa următoare a grantului vom continua studiul proprietăţilor asimptotice ale algebrelor torice asociate semigrupurilor numerice deoarece este o zona nouă ce a stârnit interes rapid. Dorim să studiem dacă proprietăţi gen periodicitate se extind şi la semigrupuri nenumerice. De asemenea, dorim să aflam̆ dacă există explicaţii topologice pentru fenomenele descrise. Cu siguranţa vom folosi programele specializate pentru calcul simbolic, iar alături de SINGULAR [4] folosit deja, vom utiliza şi MAGMA [12] pentru care tocmai am achiziţionat licenţa.

Aceste experimente numerice ne vor fi de folos şi la studiul proprietăţii Koszul pentru graduatul asociat $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ pentru H un semigrup numeric, unul dintre obiectivele proiectului de cercetare.

Avem în vedere un program dens de activităţi. Asigurarea finantării periodic şi la termen de catre UEFISCDI a fost un factor cheie pentru realizarea activităţilor desfăşurate în 2013. Sperăm ca şi în etapa viitoare să ne bucurăm de acest lucru.

References

[1] R. Achilles, L. L. Avramov, *Relations between properties of a ring and of its associated graded ring*, Seminar D. Eisenbud/B. Singh/W. Vogel, Vol. 2, Teubner, Leipzig, 1982, 5–29.

[2] H. Bresinsky, *On prime ideals with generic zero $x_i = t^{n_i}$*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** no.2 (1975), 329–332.

[3] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1998.

[4] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, Singular 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2012).

[5] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, 1995.

[6] P. Gimenez, I. Sengupta, H. Srinivasan, *Minimal free resolutions for certain affine monomial curves*, in A. Corso, C. Polini (Eds.), Commutative Algebra and Its Connections to Geometry, PASI 2009, in: Contemp. Math., vol **555**, Amer. Math. Soc., 2011, pp. 87–95.

[7] P. Gimenez, I. Sengupta, H. Srinivasan, *Minimal graded free resolutions for monomial curves defined by arithmetic sequences*, J. Algebra **338** (2013), 294–310.

[8] S. Goto, W. Heinzer, M. Kim, *The leading ideal of a complete intersection of height two. II*, J. Algebra **312** (2007), 709–732.

[9] J. Herzog, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.

[10] J. Herzog, D. I. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Preprint 2013, arXiv:1308.4644 [math.AC].

[11] A. V. Jayanthan, H. Srinivasan, *Periodic Occurance of Complete Intersection Monomial Curves*, Proc. AMS, **141** (2013), 4199-4208. arXiv:1203.1991 [math.AC].

[12] *MAGMA-Computational Algebra System*, developped by Computational Algebra Group at the University of Sydney, Australia, available at http://magma.maths.usyd.edu.au.

[13] E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Springer GTM, 2005.

[14] I. Peeva, textitGraded Syzygies, Algebra and Applications Ser., Vol 14, Springer 2011.

[15] V. Reiner, D. I. Stamate, *K*oszul incidence algebras, affine semigroup rings, and Stanley-Reisner ideals, Adv. Math. 224, no. 6 (2010), 2312–2345.

[16] J.D. Sally, *Good embedding dimensions for Gorenstein singularities*, Math. Ann. **249** (1980), 95–106.
[17] I. R. Şafarevici, *Bazele geometriei algebrice*, Ed. St. Encicl., Bucureşti, 1976.
[18] D. I. Stamate, *Asymptotic properties in the shifted family of a numerical semigroup with few generators*, în pregătire.
[19] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition, Birkăuser Boston, 1996.
[20] T. Vu, *Periodicity of Betti numbers of monomial curves*, Preprint 2013, 17pp, arXiv:1304.1659 [math.AC].

28 noiembrie 2013
dr. Dumitru I. Stamate

Dumitru I. Stamate, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Bucharest, Str. Academiei 14, Bucharest, Romania, and
Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Research group of the project PN-II-RU-PD-2012-3-0656, P.O.Box 1-764, Bucharest 014700, Romania
E-mail address: dumitru.stamate@fmi.unibuc.ro