

**RAPORT ȘTIINȚIFIC PRIVIND IMPLEMENTAREA
PROIECTULUI PN-II-RU-PD-2012-3-0656
ÎN PERIOADA MAI 2013– DECEMBRIE 2014**

DUMITRU I. STAMATE

DATE DE IDENTIFICARE

Proiect PN-II-RU-PD-2012-3-0656

Contract nr. 7 / 24.04.2013

Titlul: Combinatorial and homological methods in the study of algebras

Pagina web: <https://dl.dropboxusercontent.com/u/112281424/grantPD-2012-3-0656/index.html>

Director de proiect: dr. Dumitru Ioan Stamate

Mentor: C.S.I. dr. Mihai Cipu

Instituția finanțatoare: UEFISCDI

Instituția gazdă: Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române (IMAR), București

Durata proiectului (actualizată februarie 2014): mai 2013 – octombrie 2015

Perioada raportului curent: etapele 1 și 2: mai 2013 – decembrie 2014

CONTENTS

Date de identificare	1
1. Scurtă introducere în tematica abordată	1
2. Obiective științifice	2
3. Rezultate principale	2
4. Diseminarea rezultatelor și alte activități	6
5. Planuri de viitor	9
References	9

1. SCURTĂ INTRODUCERE ÎN TEMATICA ABORDATĂ

Date o algebră graduată $R = \bigoplus_i R_i$ și M -un R -modul graduat finit generat, ne interesează studiul rezoluției libere graduate minimale a lui M peste R . Invarianții acesteia (numerele Betti $\beta_i^R(M)$) sunt foarte importanți în înțelegerea ecuațiilor ce îl descriu pe M . În multe cazuri de interes, d. ex. când R este algebră de polinoame, iar $M = I$ este un ideal monomial sau binomial, există un plus de structură pe acest modul, ceea ce se reflectă în proprietățile modului. Devin disponibile numeroase tehnici combinatoriale, topologice sau omologice. Acesta este un subiect de mare actualitate, pentru detalii trimitem la monografiile [4], [22], [30], [23].

În cazul în care M sau R nu sunt direct graduate, o metodă bună pentru a ne reduce la cazul graduat este să considerăm filtrarea indusă de puterile unui ideal $\mathfrak{m} \subset R$ și să construim graduatul asociat

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R = R/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$$

și asemănător pentru module obținem $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} M$. Desigur, anumite proprietăți se pot pierde, dar știm de exemplu că numerele Betti pot cel mult crește prin această trecere: $\beta_i^R(M) \leq \beta_i^{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} M)$. Pentru mai multe discuții pe aceasta temă se poate consulta [1]. Geometric, dacă (R, \mathfrak{m}) este inelul local de coordonate al unei varietăți în jurul unui punct (originea), graduatul său asociat este inelul de coordonate al conului tangent în punctul de pe varietate, cf. [9], [27].

O clasă specială de inele graduate $R = \bigoplus_i R_i$ este cea în care R_0 este un corp (sau inel semisimplu) și are o rezoluție liniară ca R -modul. Spunem în acest caz că R este Koszul. În cazul algebrilor negraduate ab initio, folosim ideea de mai sus de trecere la graduatul asociat (unei filtrări corespunzătoare) și putem studia și pentru acestea proprietatea Koszul. Această idee a fost explorată cu succes de către V. Reiner și directorul de proiect în [25] cu perspective de a largi spectrul de aplicații. Chiar și pentru o algebră standard graduată este destul de dificil să probăm proprietatea Koszul (vezi [12], [24], [6]). Conca, Trung și Valla ([7]), urmând o idee din Herzog et al ([17]) au arătat că dacă algebra are o așa numită *filtrare Koszul*, atunci ea este Koszul. Această condiție suficientă a fost utilă în determinarea multor clase de algebre, a se consulta survey-ul [6] și referințele.

2. OBIECTIVE ȘTIINȚIFICE

În planul de realizare a proiectului pentru perioada acoperită de acest raport avem următoarele teme principale de concentrare cu obiectivele aferente :

- (1) Proprietăți asimptotice ale algebrilor torice.
Obiectiv: 1 lucrare acceptată într-o revistă indexată ISI.
- (2) Persistența proprietăților omologice la deformări de tip Gröbner.
Obiectiv: 1 preprint.

3. REZULTATE PRINCIPALE

Obiectivele (numerice) descrise mai sus au fost atinse prin lucrarea [18] publicată recent în Journal of Algebra și prin lucrarea [5] care este în stadiul de preprint supus discuțiilor cu unii specialiști înaintea trimiterii spre revistă.

Am făcut progrese semnificative și în ceea ce privește obiectivele propuse pentru etapa 2015 a acestui grant, e.g. [19] și [28].

În continuare descriem conținutul lucrărilor realizate deja și pe scurt progresele obținute la celelalte teme pe care ne vom concentra în etapa următoare.

A fost publicată lucrarea [18]:

Jürgen Herzog, **Dumitru I. Stamate**

On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring, J. Algebra **418** (2014), 8–28.

În cele ce urmează vom prezenta un rezumat al acesteia, util și în descrierea celorlalte lucrări.

Fie $\mathbf{a} = a_1 < \dots < a_r$ un șir de numere naturale. Notăm prin $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ (sau mai simplu $\langle \mathbf{a} \rangle$) subsemigrupul lui \mathbb{N} generat de a_1, \dots, a_r . Cu alte cuvinte, $\langle \mathbf{a} \rangle$ constă din toate combinațiile liniare ale numerelor a_1, \dots, a_r cu coeficienți din \mathbb{N} . Dacă $H = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ vom numi a_1, \dots, a_r un *sistem de generatori* pentru H . În continuare, orice subsemigrup $H \subset \mathbb{N}$ cu $0 \in H$ va fi numit *semigrup numeric*. Un astfel de semigrup este finit generat și admite un unic sistem minimal de generatori a cărui cardinalitate o vom nota cu $\mu(H)$. În literatura de specialitate apare adeseori ca parte a definiției unui semigrup numeric condiția suplimentară ca cel mai mare divizor comun al generatorilor să fie 1. În contextul acestei lucrări este convenabil să renunțăm la aceasta cerință.

Pentru orice întreg k , fie $\mathbf{a} + k$ șirul decalat (shiftat) $a_1 + k, \dots, a_r + k$. Dacă H este generat minimal de $\mathbf{a} = a_1, \dots, a_r$, notăm $H_k = \langle \mathbf{a} + k \rangle$. Vom numi mulțimea de semigrupuri $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *familia shiftată (decalată)* atașată lui H . Se observă că deși a_i -urile îl generează pe H minimal, este posibil ca pentru anumiți k șirul $\mathbf{a} + k$ să nu fie un sistem minimal de generatori pentru H_k . Așadar, în particular $(H_k)_\ell$ poate să fie diferit de $H_{k+\ell}$. De exemplu, pentru $H = \langle 3, 5, 7 \rangle$ obținem $H_1 = \langle 4, 6, 8 \rangle = \langle 4, 6 \rangle$. Pe de altă parte, dacă $H = \langle \mathbf{a} \rangle$ este generat minimal de $\mathbf{a} = a_1 < \dots < a_r$, atunci pentru toți $k > a_r - 2a_1$, H_k este generat minimal de șirul $\mathbf{a} + k$.

Fie K un corp și $S = K[x_1, \dots, x_r]$ inelul de polinoame peste K în variabilele x_1, \dots, x_r . Fie $\mathbf{a} = a_1 < \dots < a_r$ un șir de numere naturale nenule, iar $\varphi : S \rightarrow K[t]$ morfismul de K -algebre cu $\varphi(x_i) = t^{a_i}$ pentru $i = 1, \dots, r$, unde $K[t]$ este inelul de polinoame peste K în variabila t . Dacă notăm $H = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$, atunci imaginea lui φ este inelul semigrupal $K[H]$, adică este K -subalgebra lui $K[t]$ generată de t^{a_1}, \dots, t^{a_r} peste K . Vom nota nucleul lui φ prin $I(\mathbf{a})$. În cazul în care \mathbf{a} este un sistem minimal de generatori pentru H , idealul $I(\mathbf{a})$ depinde doar de semigrupul H și notăm $I_H = I(\mathbf{a})$.

Se cunoaște din [16] că numărul minim de generatori $\mu(I_H)$ ai lui I_H este cel mult 3 pentru $r \leq 3$. Pe de altă parte, deja pentru $r = 4$, numărul $\mu(I_H)$ poate fi arbitrar de mare, cf. [3]. Cu atît mai mult, este surprinzător ca pentru orice semigrup numeric H există o margine superioară pentru numerele $\mu(I_{H_k})$ independentă de k , vezi [31, Theorem 1.1]. Acest rezultat a fost conjecturat de J. Herzog și H. Srinivasan și a fost demonstrat mai întîi de P. Gimenez, I. Sengupta și H. Srinivasan în [14] pentru semigrupuri numerice generate de o progresie aritmetică. Această conjectură și o formă mai tare a ei au fost demonstrate recent de T. Vu în [31].

Deși pentru $r = 3$ avem că $\mu(I_H) \leq 3$, numărul de generatori pentru I_H^* poate fi arbitrar de mare. O primă familie de astfel de exemple a fost găsită de T. Shibuta, vezi [15]. Pentru această familie *lărgimea* nu este mărginită, unde prin *lărgimea* (width) semigrupului H , notată $\text{wd}(H)$, înțelegem diferența dintre cel mai mare și cel mai mic element din sistemul minimal de generatori ai lui H . În Corolarul 1.16 din lucrare noi demonstrăm că există o margine superioară globală pentru $\mu(I_H^*)$ valabilă pentru toate semigrupurile de lărgime dată. Acest lucru rezultă dintr-o

teoremă recentă a lui Vu, cf. [31, Theorem 1.1] și din următoarea teoremă pe care noi o demonstrăm.

Theorem 1.4. *Fie H un semigrup numeric. Atunci există $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $k \geq k_0$, idealul I_{H_k} este generat minimal de o bază standard, iar $\beta_i(I_{H_k}) = \beta_i(I_{H_k}^*)$ pentru toți i . În particular, $\text{gr}_m K[H_k]$ este Cohen–Macaulay pentru toți $k \geq k_0$.*

Metodele folosite de noi pentru a arăta existența unei margini uniforme pentru $\mu(I_H^*)$ pentru toate semigrupurile numerice cu lărgime fixată nu furnizează însă și o valoare explicită. Totuși, experimente numerice cu SINGULAR [8] ne fac să credem că $\binom{\text{wd}(H)+1}{2}$ este o astfel de margine superioară, iar aceasta nu poate fi îmbunătățită deoarece este atinsă de semigrupuri numerice generate de anumite intervale de întregi. Noi demonstrăm că această margine conjecturată este valabilă pentru orice semigrup numeric H cu proprietatea că $\mu(I_H^*) \leq \mu(I_{\tilde{H}}^*)$, unde \tilde{H} este semigrupul generat de toți întregii din intervalul determinat de cel mai mic și cel mai mare dintre generatorii minimali ai lui H .

În sprijinul conjecturii pe care o facem, demonstrăm în Proposition 2.10 că pentru un semigrup numeric H generat de o progresie aritmetică avem chiar $\beta_i(I_H^*) \leq \beta_i(I_{\tilde{H}}^*)$, pentru toți i . Este posibil ca o astfel de inegalitate să aibă loc pentru orice semigrup numeric!

În ultima secțiune a lucrării considerăm unele exemple de familii de semigrupuri pe care testăm conjecturile și descriem idealul I_H^* pentru fiecare membru H din familie. Prima familie se bazează pe un rezultat bine-cunoscut al lui J. Sally din [26], unde autoarea descrie idealul relațiilor conului tangent al unui inel local Gorenstein cu proprietatea că $r = e + d - 3$. Aici r este dimensiunea de scufundare, e este multiplicitatea, iar d este dimensiunea Krull a inelului. Prin semigrup Sally înțelegem un semigrup numeric a cărui algebră semigrupală satisface identitatea de mai sus. Noi arătăm că există semigrupuri Sally de orice multiplicitate $e \geq 4$. O altă familie pe care o considerăm este datorată lui H. Bresinsky [3]. Este prima familie cunoscută de semigrupuri numerice 4-generate cu proprietatea că $\mu(I_H)$ poate fi arbitrar de mare când H parcurge această familie. Noi arătăm că orice semigrup Bresinsky este Cohen-Macaulay și dăm un sistem minimal de generatori care este și bază standard.

Celelalte două familii se referă la semigrupuri 3-generate, iar deși membrii familiilor pot avea lărgime arbitrară, totuși comportamentul lui $\mu(I_H^*)$ este foarte diferit. Pentru $a > 3$, idealul I_H^* asociat semigrupului $H = \langle a, a + 1, 2a + 3 \rangle$ este generat de $\lfloor \frac{a-1}{3} \rfloor + 3$ monoame. Pentru această familie, numărul de generatori ai lui I_H^* este o funcție quasi-liniară în lărgimea lui H , care tinde la infinit când $\text{wd}(H)$ tinde la infinit. Dacă $a = 3b$ regăsim exemplul lui T. Shibuta, tratat cu metode diferite în [15, Example 5.5].

Pe de altă parte, pentru orice $a, b > 3$ coprime, dacă notăm $H = \langle a, b, ab - a - b \rangle$, atunci are loc $\mu(I_H^*) = 4$, deși lărgimea semigrupurilor de acest tip poate fi arbitrar de mare.

Lucrarea [5]:
Mircea Cimpoeaş, **Dumitru I. Stamate**,
On intersections of complete intersection ideals, preprint 2014.

a fost stimulată de experimentele numerice și de experiența obținută la pregătirea lucrării anterioare.

Un ideal I într-un inel (Noetherian) R este numit *intersecție completă* (CI pe scurt) dacă poate fi generat de height I elemente, i.e. minimul admis de faimoasa teoremă lui Krull. Această clasă de ideale Gorenstein are numeroase proprietăți omologice și interpretări geometrice. De aceea caracterul ei extremal a atras atenția multor cercetători.

În general clasa idealelor CI nu este închisă la operațiile importante cu ideale (e.g. sumă, intersecție) cu excepția unor cazuri triviale. Totuși în această lucrare evidențiem familii (infinite) de ideale CI care sunt închise la operația de intersecție.

Pentru a explica construcția vom continua să folosim notațiile din paragrafele anterioare. Am văzut că pentru o listă \mathbf{a} și un shift $k \gg 0$, numerele Betti pentru $I_{\mathbf{a}+k}$ sunt periodice în k . În particular, dacă $I_{\mathbf{a}+k}$ este CI pentru un $k \gg 0$, atunci există o infinitate de shifturi j pentru care $I_{\mathbf{a}+j}$ și $I_{\mathbf{a}+j}^*$ sunt de asemenea CI.

Data o familie finită de indici $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ considerăm

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{j \in \mathcal{A}} I_{\mathbf{a}+j}$$

și similar

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{j \in \mathcal{A}} I_{\mathbf{a}+j}^*.$$

Aceste ideale nu mai sunt binomiale și multe din proprietățile de la ideale torice se pierd. Folosind tehnici de baze Gröbner și rezultate din [20] demonstrăm că atunci când $I_{\mathbf{a}+j}$ este CI pentru toți $j \in \mathcal{A}$ și $\min \mathcal{A} \gg 0$, atunci $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ și $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ sunt de asemenea CI.

Rezultate mai precise se obțin în cazul semigrupurilor 3-generate folosind caracterizările shifturilor $k \gg 0$ pentru care $I(\mathbf{a} + k)$ este CI, cf. [29].

Numeroase experimente numerice ne fac să credem că această proprietate de stabilitate la intersecție a idealelor CI obținute dintr-o familie shiftată de semigrupuri este o fațetă a unui fenomen de periodicitate mai larg. De asemenea, deformări Gröbner ale acestor ideale "shiftate" au aceeași periodicitate la intersecții. Considerăm că acestea sunt motive pentru studiul ulterior al proprietăților "asimptotice" ale semigrupurilor afine, nu neaparat numerice.

În pregătirea etapei 2015, mobilitățile realizate au favorizat inițierea unor colaborări ([28], [18]) care corespund obiectivelor etapei viitoare. Descriem pe scurt aceste progrese.

În [28]:
Alexandra Seceleanu, **Dumitru I. Stamate**, *On Sally semigroup rings*, in preparation.

studiem clasa algebrelor Sally definite anterior. Am observat experimental că în cazul algebrelor Sally artiniene, numerele Betti coincid. Noi confirmăm această observație și furnizăm o formulă pentru acestea. Sunt utile rezultatele recente de

clasificare a algebrelor artiniene scurte obținute de Elias și Rossi ([10]), precum și o teoremă de descompunere pentru sumele conexe de inele, cf. Anathnarayan et al ([2]). O astfel de formulă este utilă deoarece pentru semigrupuri numerice Sally numerele Betti sunt relativ mari, aproape de maximul conjecturat în [18].

În plus față de [18], găsim numeroase exemple de semigrupuri numerice Sally.

În [19]:

J. Herzog, D.I. Stamate, *Strongly Koszul ungraded toric rings*, in preparation.

Extindem noțiunea de algebră strongly Koszul (introdusă în [17]) și la algebre torice $K[H]$ care nu sunt standard graduate. Putem arăta că graduatul asociat este Koszul în sens clasic, și are aceeași serie Poincaré ca algebra $K[H]$. În particular, rezultă că cea din urmă este o serie rațională. Sunt utile caracterizările topologice obținute anterior de noi în [25] pentru cazul $\text{gr}_m K[H]$.

4. DISEMINAREA REZULTATELOR ȘI ALTE ACTIVITĂȚI

Planificarea activităților grantului a avut o importantă componentă alocată mobilităților. Am considerat esențiale întâlnirile cu renumiți specialiști de la universități de renume. Acestea s-au materializat în mai multe proiecte pe tematica grantului. Astfel, o lucrare comună fost publicată recent într-o revistă prestigioasă în domeniul, alta este în stadiul de preprint, iar altele sunt în diverse stadii de redactare sau configurare a rezultatelor în vederea redactării, a se vedea secțiunea anterioară.

Am fost invitat să susțin prezentări la toate universitățile vizitate. Acestea au fost excelente ocazii pentru a obține feedback și sugestii pentru dezvoltări ulterioare. Detaliem mai jos vizitele de documentare/colaborare care în general merg în paralel cu prezentarea rezultatelor obținute în cadrul proiectului de față.

Vizite de documentare/colaborare efectuate:

- (1) Universitatea Osnabrueck, Germania, iunie 2013. Gazdă: prof. Tim Römer.
- (2) Universitatea Duisburg-Essen, Essen, Germania, iulie-august 2013. Gazdă: prof. Jürgen Herzog.
- (3) University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, septembrie 2013. Gazdă: prof. Roger Wiegand.
- (4) University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, octombrie 2013. Gazdă: prof. Victor Reiner.
- (5) University of Missouri, Columbia, MO, SUA, octombrie 2013. Gazdă: prof. Hema Srinivasan.
- (6) University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, ianuarie 2014. Gazdă: prof. Roger Wiegand.
- (7) University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, februarie 2014. Gazdă: prof. Victor Reiner.
- (8) Universite de Montpellier 2, Institut de Mathematiques et de Modelisations de Montpellier, Montpellier, France, Mai 2014. Gazdă: dr. Ignacio Garcia Marco.
- (9) Universita di Genova, Italia, iunie 2014. Gazdă: prof. Aldo Conca.

- (10) Universitatea Duisburg-Essen, Essen, Germania, iulie-august 2014. Gazdă: prof. Jürgen Herzog.
- (11) University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, septembrie 2014. Gazdă: dr. Alexandra Seceleanu.

Specialiști străini invitați:

În perioada 2–7 septembrie 2014 l-am avut ca invitat pe prof. Jorge Ramirez Alfonsin, Université Montpellier 2, Franța care a ținut o serie de 4 prelegeri despre proprietăți algebrice ale matroizilor în cadrul Școlii Naționale de Algebră.

În plus, am discutat rezultatele sale foarte recente asupra funcției Moebius pentru intervalele semigrupurilor numerice și noi abordări în studiul semigrupurilor (numerice) cu metode combinatoriale.

Diseminarea rezultatelor:

- (1) D. Stamate, *On the CI property of the tangent cone of a toric ring*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, Universitatea Ovidius Constanța, 8–10 mai 2013.
- (2) D. Stamate, *Shifting semigroups*, short talk, Workshop "Syzygies in Berlin", Freie Universität, Berlin, Germania, 28 mai 2013.
- (3) D. Stamate, *Shifted semigroup rings*, Oberseminar University of Osnabrueck, Germania, 4 iunie 2013.
- (4) D. Stamate, *On the CI property of the tangent cone of a toric ring*, AMS-RMS Joint meeting, Special Session on Commutative Algebra, Alba Iulia, 30 iunie 2013.
- (5) D. Stamate, *On the equations of toric rings*, Universitatea Duisburg-Essen, Essen, 29 august 2013.
- (6) D. Stamate, *Tools of Combinatorial Commutative Algebra 2*, Școala Națională de Algebră "Algebraic methods in Combinatorics", 3 septembrie 2013.
- (7) D. Stamate, *Matroids and realisability*, Școala Națională de Algebră "Algebraic methods in Combinatorics", 4 septembrie 2013.
- (8) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, 18 septembrie 2013.
- (9) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, 14 octombrie 2013.
- (10) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Missouri, Columbia, MO, SUA, 22 octombrie 2013.
- (11) D. Stamate, *Asymptotic properties of numerical semigroups I, II*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. București, 19 și 26 noiembrie 2013.
- (12) D. Stamate, *About the structure of Sally rings*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, 14 februarie 2014.

- (13) D. Stamate, *On the CI property of the tangent cone of a toric ring*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, Universitatea Ovidius Constanța, 22–23 mai 2014.
- (14) D. Stamate, *On numerical semigroup rings and their defining relations*, Séminaire Algèbre et géométrie combinatoires, Université de Montpellier 2, Franța, 27 mai 2014.
- (15) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Commutative Algebra Seminar talk, University of Genova, Italia, 3 iunie 2014.
- (16) D. Stamate, *Asymptotic properties of numerical semigroups*, Școala Națională de Algebră ”Algebraic and Combinatorial Applications of Toric Ideals”, 3 septembrie 2014.
- (17) D. Stamate, *Flavors of Koszul rings*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, 17 septembrie 2014.

Alte prezentări științifice:

- (1) M. Cipu, *Algebraic tools for discrete tomography*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. București, 18 februarie 2014.
- (2) M. Cipu, *Quantic Ehrhart polynomials*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. București, 1 aprilie 2014.
- (3) D. Stamate, *On the subadditivity problem for maximal shifts in free resolutions, after Herzog et al*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. București, 6 mai 2014.
- (4) M. Cipu, *A conjectural characterization for complete intersection numerical semigroups*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. București, 4 noiembrie 2014.

Alte deplasări sprijinite de acest grant:

- (1) Conferința GMZ50 în onoarea lui Gunter Ziegler, Freie Universität Berlin, Germania, organizată de Christian Haase, Raman Sanyal, Nadja Wisniewski, 25 mai 2013.
- (2) COCOA School, Universität Osnbrück, Germania, organizată de W. Bruns, L. Robbiano, A. Bigatti, 10–14 iunie 2013.
- (3) ETMAGT-International Conference Experimental and Theoretical Methods in Algebra, Geometry and Topology, Eforie Nord, 20–24 iunie 2013. (Dumitru Stamate și Mihai Cipu)
- (4) Recent Trends in Algebraic and Geometric Combinatorics, Madrid, 26-30 noiembrie 2013. (Mihai Cipu)
- (5) Encuentros de Algebra Computacional y Aplicaciones-EACA, Barcelona, Spania, 17–22 iunie 2014. (Mihai Cipu)
- (6) Meeting On Combinatorial Commutative Algebra, MOCCA, Levico Terme, Italia, 8–12 septembrie 2014. (Mihai Cipu)

Discuțiile cu prof. Tim Römer cu ocazia deplasării la Osnbrück în iunie 2013 au favorizat **organizarea** celei de-a 21 ediții a Școlii Naționale de Algebră-”Algebraic methods in Combinatorics” unde prof. Tim. Römer a fost key-note speaker. Am organizat această activitate la IMAR, 2-6 septembrie 2013, împreună cu Viviana

Ene, Mihai Epure, Miruna Roșca, Andrei Zarojanu. Comitetul științific: Dorin Popescu, Tim Römer, Marius Vlădoiu.

În acest an, cu ocazia deplasării la Montpellier l-am invitat pe prof. Jorge Ramirez-Alfonsin să țină un ciclu de prezentări la București la a 22-a editie a Școlii Naționale de Algebră ”Algebraic and Combinatorial Applications of Toric Ideals”. Comitetul științific: Hara Charalambous, Mihai Cipu (membru în echipa proiectului), Jorge Ramirez Alfonsin. Am organizat această școală la IMAR, 1-5 septembrie 2014, împreună cu Florin Ambro, Viviana Ene, Mihai Epure, Miruna Roșca, Marius Vlădoiu și Andrei Zarojanu.

La ambele ediții prezența a fost numeroasă, inclusiv mulți studenți și doctoranzi.

5. PLANURI DE VIITOR

În conformitate cu Planul de realizare a proiectului, în etapa următoare a grantului vom continua studiul persistenței proprietăților omologice la deformări de tip Gröbner pentru algebra torică asociată unui semigrup deoarece este o zonă nouă ce a stârnit interes rapid. Programele specializate pentru calcul simbolic, în special SINGULAR [8], vor fi foarte utile în experimente numerice concrete. Lucrarea [5] va fi trimisă spre publicare la începutul anului 2015 în urma consultărilor cu colegii și alți specialiști.

Vom finaliza lucrul la [19] pentru a identifica noi situații descriibile combinatorial de algebra Koszul.

De asemenea ne vom ocupa de studiul combinatorial și topologic al intervalelor unui semigrup numeric. Aceasta ne vor fi de folos și la studiul proprietății Koszul pentru graduatul asociat $\text{gr}_m K[H]$ pentru H un semigrup numeric, unul dintre obiectivele proiectului de cercetare.

Avem în vedere un program dens de activități. Asigurarea finanțării periodice și la termen de către UEFISCDI a fost un factor cheie pentru realizarea activităților desfășurate până acum. Sperăm ca și în etapa viitoare să ne bucurăm de acest lucru.

REFERENCES

- [1] R. Achilles, L. L. Avramov, *Relations between properties of a ring and of its associated graded ring*, Seminar D. Eisenbud/B. Singh/W. Vogel, Vol. 2, Teubner, Leipzig, 1982, 5–29.
- [2] H. Ananthnarayan, Ela Celikbas, Zheng Yang, *Decomposing Gorenstein Rings as Connected Sums*, preprint, arXiv:1406.7600 [math.AC].
- [3] H. Bresinsky, *On prime ideals with generic zero $x_i = t^{n_i}$* , Proc. Amer. Math. Soc. **47** no.2 (1975), 329–332.
- [4] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1998.
- [5] M. Cimpoeaș, D.I. Stamate, *On intersections of complete intersection ideals*, preprint 2014.
- [6] A. Conca, E. De Negri, M.E. Rossi, *Koszul algebras and regularity*. Commutative algebra, 285–315, Springer, New York, 2013.
- [7] A. Conca, N.V. Trung, G. Valla, *Koszul property for points in projective spaces*. Math. Scand. **89** (2001) no. 2, 201–216.
- [8] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, SINGULAR 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de> (2012).
- [9] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, 1995.

- [10] J. Elias, M.E. Rossi, *Isomorphism classes of short Gorenstein local rings via Macaulays inverse system*, Trans. Amer. Math. Soc., 364 (2012), 4589-4604.
- [11] V. Ene, J. Herzog, *Gröbner bases in commutative algebra*, Graduate Studies in Mathematics **130**, American Mathematical Society, 2012.
- [12] R. Fröberg, *Koszul algebras* in Advances in commutative ring theory (Fez, 1997), 337–350, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 205, Dekker, New York, 1999.
- [13] P. Gimenez, I. Sengupta, H. Srinivasan, *Minimal free resolutions for certain affine monomial curves*, in A. Corso, C. Polini (Eds.), Commutative Algebra and Its Connections to Geometry, PASI 2009, in: Contemp. Math., vol **555**, Amer. Math. Soc., 2011, pp. 87–95.
- [14] P. Gimenez, I. Sengupta, H. Srinivasan, *Minimal graded free resolutions for monomial curves defined by arithmetic sequences*, J. Algebra **338** (2013), 294–310.
- [15] S. Goto, W. Heinzer, M. Kim, *The leading ideal of a complete intersection of height two. II*, J. Algebra **312** (2007), 709–732.
- [16] J. Herzog, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.
- [17] J. Herzog, T. Hibi, G. Restuccia, *Strongly Koszul algebras*, Math. Scand. **86** (2000), 161-178.
- [18] J. Herzog, D.I. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, J. Algebra **418** (2014), 8–28. arXiv:1308.4644 [math.AC].
- [19] J. Herzog, D.I. Stamate, *Strongly Koszul ungraded toric rings*, in preparation.
- [20] A. V. Jayanthan, H. Srinivasan, *Periodic Occurance of Complete Intersection Monomial Curves*, Proc. AMS, **141** (2013), 4199-4208. arXiv:1203.1991 [math.AC].
- [21] *MAGMA-Computational Algebra System*, developed by Computational Algebra Group at the University of Sydney, Australia, available at <http://magma.maths.usyd.edu.au>.
- [22] E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Springer GTM, 2005.
- [23] I. Peeva, *textitGraded Syzygies*, Algebra and Applications Ser., Vol 14, Springer 2011.
- [24] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic algebras*, University Lecture Series, 37, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [25] V. Reiner, D. I. Stamate, *Koszul incidence algebras, affine semigroup rings, and Stanley-Reisner ideals*, Adv. Math. 224, no. 6 (2010), 2312–2345.
- [26] J.D. Sally, *Good embedding dimensions for Gorenstein singularities*, Math. Ann. **249** (1980), 95–106.
- [27] I. R. Şafarevici, *Bazele geometriei algebrice*, Ed. St. Encicl., Bucureşti, 1976.
- [28] A. Seceleanu, D.I. Stamate, *On Sally semigroup rings*, in preparation.
- [29] D. I. Stamate, *Asymptotic properties in the shifted family of a numerical semigroup with few generators*, submitted.
- [30] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition, Birkäuser Boston, 1996.
- [31] T. Vu, *Periodicity of Betti numbers of monomial curves*, J. Algebra **418** (2014), 66–90. arXiv:1304.1659 [math.AC].

3 decembrie 2014
dr. Dumitru I. Stamate

DUMITRU I. STAMATE, FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE, UNIVERSITY OF BUCHAREST, STR. ACADEMIEI 14, BUCHAREST, ROMANIA, AND
SIMION STOILOW INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE ROMANIAN ACADEMY, RESEARCH GROUP OF THE PROJECT PN-II-RU-PD-2012-3-0656, P.O.BOX 1-764, BUCHAREST 014700, ROMANIA

E-mail address: `dumitru.stamate@fmi.unibuc.ro`