RAPORT ŞTIINŢIFIC FINAL PRIVIND IMPLEMENTAREA PROIECTULUI PN-II-RU-PD-2012-3-0656 ÎN PERIOADA MAI 2013– OCTOMBRIE 2015

DUMITRU I. STAMATE

Date de identificare

Proiect PN-II-RU-PD-2012-3-0656
Contract nr. 7 / 24.04.2013
Titlul: Combinatorial and homological methods in the study of algebras
Pagina web: https://dl.dropboxusercontent.com/u/112281424/grantPD-2012-3-0656/index.html
Director de proiect: dr. Dumitru Ioan Stamate
Mentor: C.S.I. dr. Mihai Cipu
Instituţia finanţatoare: UEFISCDI
Instituţia gazdă: Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române (IMAR), Bucureşti
Durata proiectului (actualizată februarie 2014): mai 2013 – octombrie 2015
Perioada raportului curent: mai 2013 – octombrie 2015

Contents

1. Scurtă introducere în tematica abordată

Date o algebră graduată $R = \oplus_i R_i$ şi M-un R-modul graduat finit generat, ne intereseazǎ studiul rezoluţiei libere graduate minimale a lui M peste R. Invarianţii acesteia (numerele Betti $\beta_i^R(M)$) sunt foarte importanţi în înţelegerea ecuaţiilor ce îl descriu pe M. În multe cazuri de interes, d. ex. când R este algebră de polinoame, iar $M = I$ este un ideal monomial sau binomial, există un plus de structură pe acest modul, ceea ce se reflectă în proprietăţile modulului. Devin disponibile numeroase tehnici combinatoriale, topologice sau omologice. Acesta este un subiect de mare actualitate, pentru detalii trimitem la monografiile [4], [22], [31], [23].

În cazul în care M sau R nu sunt direct graduate, o metodă bună pentru a ne reduce la cazul graduat este să considerăm filtrarea indusă de puterile unui ideal $\mathfrak{m} \subset R$ şi să construim graduatul asociat

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R = R/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \cdots$$

şi asemănător pentru module obtinem $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} M$. Desigur, anumite proprietăţi se pot pierde, dar ştim de exemplu că numerele Betti pot cel mult creşte prin această trecere: $\beta_i^R(M) \leq \beta_i^{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} M)$. Pentru mai multe discuţii pe aceasta temă se poate consulta [1]. Geometric, dacă $(R, \mathfrak{m})$ este inelul local de coordonate al unei varietăţi în jurul unui punct (originea), graduatul său asociat este inelul de coordonate al conului tangent în punctul de pe varietate, cf. [9], [27].

O clasă specială de inele graduate $R = \oplus_i R_i$ este cea în care R_0 este un corp (sau inel semisimplu) şi are o rezoluţie liniară ca R-modul. Spunem în acest caz că R este Koszul. În cazul algebrelor negraduate ab initio, folosim ideea de mai sus de trecere la graduatul asociat (unei filtrari corespunzatoare) şi putem studia şi pentru acestea proprietatea Koszul. Această idee a fost explorată cu succes de catre V. Reiner şi directorul de proiect în [25] cu perspective de a largi spectrul de aplicaţii. Chiar şi pentru o algebră standard graduată este destul de dificil să probăm proprietatea Koszul (vezi [12], [24], [6]). Conca, Trung si Valla ([7]), urmând o idee din Herzog et al([17]) au arătat că dacă algebra are o aşa numită *filtrare Koszul*, atunci ea este Koszul. Această condiţie suficientă a fost utilă în determinarea multor clase de algebre, a se consulta survey-ul [6] şi referinţele.

2. Obiective ştiinţifice şi gradul de realizare

Prezentăm sumativ temele principale de concentrare cu obiectivele aferente şi gradul de realizare.

(1) Proprietăţi asimptotice ale algebrelor torice.
Obiectiv: 1 lucrare acceptată într-o revistă indexată ISI.
Realizare: Lucrarea Juergen Herzog, Dumitru I. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Journal of Algebra vol 418 (2014), 8-28. DOI 10.1016/j.jalgebra.2014.07.008. Preprint version available at arXiv:1308.4644 [math.AC].

(2) Persistenţa proprietăţilor omologice la deformări de tip Gröbner.
Obiectiv: 1 lucrare trimisă spre publicare la o revistă ISI.
Realizare:
   (a) Lucrarea Mircea Cimpoeas, Dumitru I. Stamate, *On intersections of complete intersection ideals*, Preprint 11 pp, 2015 este în evaluare la o revistă ISI internaţională.
   (b) Lucrarea Alexandra Seceleanu, Dumitru I. Stamate, *On Sally semigroup rings*, este în pregătire.

(3) Studiul combinatorial şi topologic al semigrupurilor numerice.
Obiectiv: 1 lucrare trimisă spre publicare

Realizare: Lucrarea J. Herzog, D.I. Stamate, *Quadratic numerical semigroups and the Koszul property*, 23 pages. Preprint version available at arXiv:1510.00935 [math.AC] este în evaluare la o revistă ISI internaţională.

(4) Proprietatea Koszul pentru unele clase de algebre.
Obiectiv: 1 preprint
Realizare: Lucrarea D.I. Stamate, *On the Cohen-Macaulay property for quadratic tangent cones*, preprint 2015.

3. Rezultate principale

Obiectivele descrise mai sus au fost atinse prin lucrarea [18] publicată recent în Journal of Algebra, prin lucrările [5] şi [19] trimise spre evaluare la prestigioase reviste ISI, şi prin preprintul [30] care este în stadiul discuţiilor cu unii specialişti înaintea trimiterii spre revistă.

Mentionăm de asemenea lucrarea [28], realizată în afara obiectivelor minimale propuse şi care este in curs de finalizare.

În continuare detaliem conţinutul acestor lucrări.

A fost publicată lucrarea [18]:
Jürgen Herzog, **Dumitru I. Stamate**
On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring, J. Algebra **418** (2014), 8–28.

În cele ce urmează vom prezenta un rezumat al acesteia, util şi în descrierea celorlalte lucrări.

Fie $\mathbf{a} = a_1 < \cdots < a_r$ un şir de numere naturale. Notăm prin $\langle a_1, \ldots, a_r\rangle$ (sau mai simplu $\langle \mathbf{a}\rangle$) subsemigrupul lui $\mathbb{N}$ generat de $a_1, \ldots, a_r$. Cu alte cuvinte, $\langle \mathbf{a}\rangle$ constă din toate combinaţiile liniare ale numerelor $a_1, \ldots, a_r$ cu coeficienţi din $\mathbb{N}$. Dacă $H = \langle a_1, \ldots, a_r\rangle$ vom numi $a_1, \ldots, a_r$ un *sistem de generatori* pentru H. În continuare, orice subsemigrup $H \subset \mathbb{N}$ cu $0 \in H$ va fi numit *semigrup numeric*. Un astfel de semigrup este finit generat şi admite un unic sistem minimal de generatori a carui cardinalitate o vom nota cu $\mu(H)$. În literatura de specialitate apare adeseori ca parte a definitiei unui semigrup numeric condiţia suplimentară ca cel mai mare divizor comun al generatorilor să fie 1. În contextul acestei lucrări este convenabil să renuntăm la aceasta cerinţă.

Pentru orice întreg k, fie $\mathbf{a} + k$ şirul decalat (shiftat) $a_1 + k, \ldots, a_r + k$. Dacă H este generat minimal de $\mathbf{a} = a_1, \ldots, a_r$, notăm $H_k = \langle \mathbf{a} + k\rangle$. Vom numi mulţimea de semigrupuri $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *familia shiftată (decalată)* ataşată lui H. Se observă că deşi a_i-urile îl genereaza pe H minimal, este posibil ca pentru anumiţi k şirul $\mathbf{a}+k$ să nu fie un sistem minimal de generatori pentru H_k. Aşadar, în particular $(H_k)_\ell$ poate să fie diferit de $H_{k+\ell}$. De exemplu, pentru $H = \langle 3, 5, 7\rangle$ obţinem $H_1 = \langle 4, 6, 8\rangle = \langle 4, 6\rangle$. Pe de altă parte, dacă $H = \langle \mathbf{a}\rangle$ este generat minimal de $\mathbf{a} = a_1 < \cdots < a_r$, atunci pentru toţi $k > a_r - 2a_1$, H_k este generat minimal de şirul $\mathbf{a} + k$.

Fie K un corp şi $S = K[x_1, \ldots, x_r]$ inelul de polinoame peste K în variabilele $x_1, \ldots, x_r$. Fie $\mathbf{a} = a_1 < \cdots < a_r$ un şir de numere naturale nenule, iar $\varphi : S \to K[t]$ morfismul de K-algebre cu $\varphi(x_i) = t^{a_i}$ pentru $i = 1, \ldots, r$, unde $K[t]$ este inelul de polinoame peste K in variabila t. Dacă notăm $H = \langle a_1, \ldots, a_r\rangle$, atunci imaginea lui φ este inelul semigrupal $K[H]$, adică este K-subalgebra lui $K[t]$ generată de $t^{a_1}, \ldots, t^{a_r}$ peste K. Vom nota nucleul lui φ prin $I(\mathbf{a})$. În cazul în care $\mathbf{a}$ este un sistem minimal de generatori pentru H, idealul $I(\mathbf{a})$ depinde doar de semigrupul H si notăm $I_H = I(\mathbf{a})$.

Se cunoaşte din [16] că numărul minim de generatori $\mu(I_H)$ ai lui I_H este cel mult 3 pentru $r \leq 3$. Pe de alta parte, deja pentru $r = 4$, numarul $\mu(I_H)$ poate fi arbitrar de mare, cf. [3]. Cu atit mai mult, este surprinzator ca pentru orice semigrup numeric H există o margine superioară pentru numerele $\mu(I_{H_k})$ independentă de k, vezi [32, Theorem 1.1]. Acest rezultat a fost conjecturat de J. Herzog şi H. Srinivasan şi a fost demonstrat mai întâi de P. Gimenez, I. Sengupta şi H. Srinivasan în [14] pentru semigrupuri numerice generate de o progresie aritmetică. Această conjectură şi o formă mai tare a ei au fost demonstrate recent de T. Vu in [32].

Deşi pentru $r = 3$ avem că $\mu(I_H) \leq 3$, numărul de generatori pentru I_H^* poate fi arbitrar de mare. O primă familie de astfel de exemple a fost gasită de T. Shibuta, vezi [15]. Pentru această familie *lărgimea* nu este mărginită, unde prin lărgimea (width) semigrupului H, notată $\mathrm{wd}(H)$, inţelegem diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic element din sistemul minimal de generatori ai lui H. În Corolarul 1.16 din lucrare noi demonstrăm că există o margine superioară globală pentru $\mu(I_H^*)$ valabilă pentru toate semigrupurile de lărgime dată. Acest lucru rezultă dintr-o teoremă recentă a lui Vu, cf. [32, Theorem 1.1] şi din urmatoarea teoremă pe care noi o demonstrăm.

Theorem 1.4. *Fie H un semigrup numeric. Atunci există $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $k \geq k_0$, idealul I_{H_k} este generat minimal de o bază standard, iar $\beta_i(I_{H_k}) = \beta_i(I_{H_k}^*)$ pentru toţi i. În particular, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} K[H_k]$ este Cohen–Macaulay pentru toţi $k \geq k_0$.*

Metodele folosite de noi pentru a arăta existenţa unei margini uniforme pentru $\mu(I_H^*)$ pentru toate semigrupurile numerice cu largime fixată nu furnizează însă şi o valoare explicită. Totuşi, experimente numerice cu SINGULAR [8] ne fac să credem că $\binom{\mathrm{wd}(H)+1}{2}$ este o astfel de margine superioară, iar aceasta nu poate fi imbunătăţită deoarece este atinsă de semigrupuri numerice generate de anumite intervale de întregi. Noi demonstrăm că această margine conjecturată este valabilă pentru orice semigrup numeric H cu proprietatea că $\mu(I_H^*) \leq \mu(I_{\widetilde{H}}^*)$, unde $\widetilde{H}$ este semigrupul generat de toţi întregii din intervalul determinat de cel mai mic şi cel mai mare dintre generatorii minimali ai lui H.

În sprijinul conjecturii pe care o facem, demonstrăm în Proposition 2.10 că pentru un semigrup numeric H generat de o progresie aritmetica avem chiar $\beta_i(I_H^*) \leq \beta_i(I_{\widetilde{H}}^*)$, pentru toţi i. Este posibil ca o astfel de inegalitate să aibă loc pentru orice semigrup numeric!

În ultima secţiune a lucrării considerăm unele exemple de familii de semigrupuri pe care testăm conjecturile şi descriem idealul I_H^* pentru fiecare membru H din familie. Prima familie se bazează pe un rezultat bine-cunoscut al lui J. Sally din [26], unde autoarea descrie idealul relaţiilor conului tangent al unui inel local Gorenstein cu proprietatea că $r = e + d - 3$. Aici r este dimensiunea de scufundare, e

este multiplicitatea, iar d este dimensiunea Krull a inelului. Prin semigroup Sally înţelegem un semigrup numeric a cărui algebră semigrupală satisface identitatea de mai sus. Noi arătăm că există semigrupuri Sally de orice multiplicitate $e \geq 4$. O altă familie pe care o considerăm este datorată lui H. Bresinsky [3]. Este prima familie cunoscută de semigrupuri numerice 4-generate cu proprietatea că $\mu(I_H)$ poate fi arbitrar de mare când H parcurge această familie. Noi arătam că orice semigrup Bresinsky este Cohen-Macaulay şi dăm un sistem minimal de generatori care este şi bază standard.

Celelalte două familii se referă la semigrupuri 3-generate, iar deşi membrii familiilor pot avea lărgime arbitrară, totuşi comportamentul lui $\mu(I_H^*)$ este foarte diferit. Pentru $a > 3$, idealul I_H^* asociat semigrupului $H = \langle a, a+1, 2a+3\rangle$ este generat de $\lfloor \frac{a-1}{3} \rfloor + 3$ monoame. Pentru această familie, numărul de generatori ai lui I_H^* este o funcţie quasi-liniară în lărgimea lui H, care tinde la infinit când $\mathrm{wd}(H)$ tinde la infinit. Dacă $a = 3b$ regăsim exemplul lui T. Shibuta, tratat cu metode diferite în [15, Example 5.5].

Pe de altă parte, pentru orice $a, b > 3$ coprime, dacă notăm $H = \langle a, b, ab - a - b\rangle$, atunci are loc $\mu(I_H^*) = 4$, deşi lărgimea semigrupurilor de acest tip poate fi arbitrar de mare.

Lucrarea [5]:
Mircea Cimpoeaş, **Dumitru I. Stamate**,
On intersections of complete intersection ideals, 11 pp, preprint 2015. Submitted.

a fost stimulată de experimentele numerice şi de experienţa obtinută la pregătirea lucrării anterioare.

Un ideal I într-un inel (Noetherian) R este numit *intersectie completa* (CI pe scurt) dacă poate fi generat de $\operatorname{height} I$ elemente, i.e. minimul admis de faimoasa teoremă lui Krull. Această clasa de ideale Gorenstein are numeroase proprietăţi omologice şi interpretări geometrice. De aceea caracterul ei extremal a atras atenţia multor cercetători.

În general clasa idealelor CI nu este închisă la operaţiile importante cu ideale (e.g. sumă, intersecţie) cu excepţia unor cazuri triviale. Totuşi în această lucrare evidenţiem familii (infinite) de ideale CI care sunt închise la operaţia de intersecţie.

Pentru a explica construcţia vom continua să folosim notaţiile din paragrafele anterioare. Am vazut că pentru o listă $\mathbf{a}$ şi un shift $k \gg 0$, numerele Betti pentru $I_{\mathbf{a}+k}$ sunt periodice în k. În particular, dacă $I_{\mathbf{a}+k}$ este CI pentru un $k \gg 0$, atunci există o infinitate de shifturi j pentru care $I_{\mathbf{a}+j}$ şi $I^*_{\mathbf{a}+j}$ sunt de asemenea CI.

Dată o familie finită de indici $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ considerăm

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = \cap_{j\in\mathcal{A}} I_{\mathbf{a}+j}$$

şi similar

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}} = \cap_{j\in\mathcal{A}} I^*_{\mathbf{a}+j}.$$

Aceste ideale nu mai sunt binomiale şi multe din proprietăţile de la ideale torice se pierd. Folosind tehnici de baze Gröbner şi rezultate din [20] demonstrăm că atunci când $I_{\mathbf{a}+j}$ este CI pentru toţi $j \in \mathcal{A}$ şi $\min \mathcal{A} \gg 0$, atunci $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ şi $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ sunt de asemenea CI.

Rezultate mai precise se obţin în cazul semigrupurilor 3-generate folosind caracterizările shifturilor $k \gg 0$ pentru care $I(\mathbf{a}+k)$ este CI, cf. [29].

Numeroase experimente numerice ne fac să credem că această proprietate de stabilitate la interesecţie a idealelor CI obţinute dintr-o familie shiftată de semigrupuri este o faţetă a unui fenomen de periodicitate mai larg. De asemenea, deformări Gröbner ale acestor ideale "shiftate" au aceeaşi periodicitate la intersecţii. Considerăm că acestea sunt motive pentru studiul ulterior al proprietăţilor "asimptotice" ale semigrupurilor afine, nu neaparat numerice.

În [19]:
Juergen Herzog, **Dumitru I. Stamate**, *Quadratic numerical semigroups and the Koszul property*, 23 pages. Preprint version available at arXiv:1510.00935 [math.AC]. Submitted.

gasim margini efective pentru multiplicitatea $e(H)$ a unui semigrup numeric H astfel incat graduatul asociat $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ este definit de relatii quadratice sau chiar Koszul. Vom spune ca H este quadratic/Koszul daca $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ are aceasta proprietate.

Theorem 1.1. ([19]) *Fie H un semigrup numeric quadratic generat minimal de n elemente, iar $K[H]$ algebra semigrupala asociata. Atunci*

(a) $n \leq e(H) \leq 2^{n-1}$;
(b) $e(H) = n \iff I_H^*$ are o rezolutie liniara;
(c) $e(H) = 2^{n-1} \iff I_H^*$ este ideal intersectie completa $\iff I_H$ este ideal intersectie completa.

O problema interesanta este insa determinarea efectiva a tuturor multiplicitatilor posibile din intervalul $[n, 2^{n-1}]$. Estimam ca nu toate valorile sunt posibile. In aceasta directie am obtinut urmatorul rezultat:

Theorem 1.9. ([19]) *Fie H un semigrup numeric quadratic generat minimal de n elemente, astfel incat $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ este Cohen-Macaulay. Atunci*

(a) ori $n \leq e(H) \leq 2^{n-1} - 2^{n-3}$, ori $e(H) = 2^{n-1}$;
(b) Daca $e(H) = 2^{n-1} - 2^{n-3}$, atunci I_H^* este ideal aproape intersectie completa

In situatia de la (b), idealul I_H^* are o baza Gröbner quadratica relativ la ordinea revlex indusa de $x_n > \cdots > x_1$.

Se stie ca in general daca un ideal I in algebra de polinoame S este G-quadratic, i.e. dupa o eventuala schimbare liniara de coordonate admite o baza Gröbner patratica relativ o ordine monomiala, atunci S/I este Koszul. Noi aratam ca are loc urmatoarea:

Proposition 1.12. ([19]) *Daca H este un semigrup numeric quadratic cu* $\operatorname{emb}\dim(H) =$ *n, iar $e(H)$ este n, 2^{n-1} sau si $2^{n-1} - 2^{n-3}$ in cazul in care* $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ *este Cohen-Macaulay, atunci H este G-quadratic.*

Noi semigrupuri numerice se obtin in general prin lipirea a doua semigrupuri cu mai putini generatori. Daca H_1 si H_2 sunt doua semigrupuri numerice, c_1 si c_2 intregi coprimi astfel incat $c_1 \in H_2 \setminus G(H_2)$ si $c_2 \in H_1 \setminus G(H_1)$, atunci spunem ca

$H = \langle c_1H_1, c_2H_2\rangle$ se obtine prin lipirea lui H_1 si H_2. Cel mai faimos rezultat in aceasta directie este caracterizarea lui Delorme pentru semigrupuri numerice intersectie completa (CI). Mai precis, orice astfel de semigrup este obtinut printr-o serie de lipiri incepand de la $\mathbb{N}$.

Daca $c_1 = 2$ si $H_2 = \mathbb{N}$ vom spune ca $H = \langle 2H_1, c_2\rangle$ este obtinut din H_1 printr-o lipire quadratica. Un rezultat important obtinut de noi (Theorem 2.14, [19]) este ca orice semigrup quadratic CI se obtine printr-o serie de lipiri quadratice pornind de la $\mathbb{N}$. Aceasta este o consecinta a faptului ca semigrupul $H = \langle 2L, \ell\rangle$ este quadratic/Koszul/G-quadratic daca si numai daca L are acceasi proprietate.

In ultima sectiune din lucrara aplicam rezultatele anterioare pentru a descrie complet semigrupurile quadratice din clasa semigrupurilor generate de progresii aritmetice sau geometrice, sau 3-generate, sau 4-generate simetrice ori pseudo-simetrice.

În [30]:
Dumitru I. Stamate, *On the Cohen-Macaulay property for quadratic tangent cones*, preprint 2015.
continuam directia de cercetare initiata in lucrarea [19]. Aratam ca daca orice semigrup numeric H cu cel mult 4 generatori, daca este quadratic este automat si G-quadratic, iar $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ este chiar Cohen-Macaulay. In cazul in care $\operatorname{emb\,dim}(H) = 5$, printr-o demonstratie laborioasa, aratam ca daca H este quadratic, atunci $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ este Cohen-Macaulay cu exceptia a exact doua familii de semigrupuri descrise explicit.

Aceste rezultate ne permit sa obtinem multiplicitatile efective pentru care H este quadratic iar $\operatorname{emb\,dim}(H) \leq 5$. Mai mult, putem detemina h-vectorul algebrelor $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$, iar ca aplicatie avem ca in conditiile de mai sus, daca lucram peste K algebric inchis de caracteristica $|neq2$, daca H este Koszul, atunci el este si G-quadratic.

Aratam constructiv ca pentru orice $n > 5$ gasim o infinitate de semigrupuri H Koszul, chiar G-quadratice, dar pentru care $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} K[H]$ nu este Cohen-Macaulay. Acest rezultat este important, deoarece cautari aleatoare pe calculator nu au furnizat astfel de exemple.

În [28]:
Alexandra Seceleanu, **Dumitru I. Stamate**, *On Sally semigroup rings*, in preparation.
studiem clasa algebrelor Sally definite anterior in [18]. Am observat experimental că în cazul algebrelor Sally artiniene, numerele Betti coincid. Noi confirmăm această observaţie şi furnizăm o formulă pentru acestea. Sunt utile rezultele recente de clasificare a algebrelor artiniene scurte obţinute de Elias şi Rossi ([10]), precum şi o teoremă de descompunere pentru sumele conexe de inele, cf. Anathnarayan et al ([2]). O astfel de formulă este utilă deoarece pentru semigrupuri numerice Sally numerele Betti sunt relativ mari, aproape de maximul conjecturat in [18].

În plus faţă de [18], găsim numeroase exemple de semigrupuri numerice Sally.

4. Diseminarea rezultatelor şi alte activităţi

Planificarea activităţilor grantului a avut o importantă componentă alocată mobilităţilor. Am considerat esenţiale întilnirile cu reputaţi specialişti de la universităţi de renume. Acestea s-au materializat în mai multe proiecte pe tematica grantului, a se vedea secţiunea anterioară.

Am fost invitat să susţin prezentări la toate universităţile vizitate. Acestea au fost excelente ocazii pentru a obtine feed-back şi sugestii pentru dezvoltări ulterioare. Detaliem mai jos vizitele de documentare/colaborare care în general merg în paralel cu prezentărea rezultatelor obţinute în cadrul proiectului de faţă.

Vizite de documentare/colaborare efectuate:

(1) Universitatea Osnabrueck, Germania, iunie 2013. Gazdă: prof. Tim Römer.
(2) Universitatea Duisburg-Essen, Essen, Germania, iulie-august 2013. Gazdă: prof. Jürgen Herzog.
(3) University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, septembrie 2013. Gazdă: prof. Roger Wiegand.
(4) University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, octombrie 2013. Gazdă: prof. Victor Reiner.
(5) University of Missouri, Columbia, MO, SUA, octombrie 2013. Gazdă: prof. Hema Srinivasan.
(6) University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, ianuarie 2014. Gazdă: prof. Roger Wiegand.
(7) University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, februarie 2014. Gazdă: prof. Victor Reiner.
(8) Universite de Montpellier 2, Institut de Mathematiques et de Modelisations de Montpellier, Montpellier, France, Mai 2014. Gazdă: dr. Ignacio Garcia Marco.
(9) Universita di Genova, Italia, iunie 2014. Gazdă: prof. Aldo Conca.
(10) Universitatea Duisburg-Essen, Essen, Germania, iulie-august 2014. Gazdă: prof. Jürgen Herzog.
(11) University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, septembrie 2014. Gazdă: dr. Alexandra Seceleanu.
(12) University of Sheffield, UK, mai 2015 (1 saptamina). Gazde: prof. Moty Katzman şi Dr. Ines Henriques.
(13) Universitatea Duisburg-Essen, Essen, Germania, septembrie 2015 (1 săptămână). Gazdă: prof. Jürgen Herzog.

Specialişti străini invitaţi:
În perioada 2–7 septembrie 2014 l-am avut ca invitat pe prof. Jorge Ramirez Alfonsin, Université Montpellier 2, Franţa care a ţinut o serie de 4 prelegeri despre proprietăţi algebrice ale matroizilor în cadrul Şcolii Naţionale de Algebră.

În plus, am discutat rezultatele sale foarte recente asupra funcţiei Moebius pentru intervalele semigrupurilor numerice şi noi abordari în studiul semigrupurilor (numerice) cu metode combinatoriale.

În perioada 12–20 iunie 2015 l-am avut ca invitat pe prof. Juergen Herzog, Universitaet Duisburg-Essen, Germany cu care am discutat asupra proiectelor comune, inclusiv [19]. A tinut pe 16 iunie 2015 o prelegere publica la IMAR cu titlul *Ideals associated to isotone maps between finite posets*, prelegere care s-a bucurat de o foarte numeroasă audienţă.

Diseminarea rezultatelor:

(1) D. Stamate, *On the CI property of the tangent cone of a toric ring*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, Universitatea Ovidius Constanţa, 8–10 mai 2013.
(2) D. Stamate, *Shifting semigroups*, short talk, Workshop "Syzygies in Berlin", Freie Universität, Berlin, Germania, 28 mai 2013.
(3) D. Stamate, *Shifted semigroup rings*, Oberseminar University of Osnabrueck, Germania, 4 iunie 2013.
(4) D. Stamate, *On the CI property of the tangent cone of a toric ring*, AMS-RMS Joint meeting, Special Session on Commutative Algebra, Alba Iulia, 30 iunie 2013.
(5) D. Stamate, *On the equations of toric rings*, Universitatea Duisburg-Essen, Essen, 29 august 2013.
(6) D. Stamate, *Tools of Combinatorial Commutative Algebra 2*, Şcoala Natională de Algebră "Algebraic methods in Combinatorics", 3 septembrie 2013.
(7) D. Stamate, *Matroids and realisability*, Şcoala Naţională de Algebră "Algebraic methods in Combinatorics", 4 septembrie 2013.
(8) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, 18 septembrie 2013.
(9) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, 14 octombrie 2013.
(10) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Missouri, Columbia, MO, SUA, 22 octombrie 2013.
(11) D. Stamate, *Asymptotic properties of numerical semigroups I, II*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. Bucureşti, 19 şi 26 noiembrie 2013.
(12) D. Stamate, *About the structure of Sally rings*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Minnesota, Minneapolis, MN, SUA, 14 februarie 2014.
(13) D. Stamate, *On the CI property of the tangent cone of a toric ring*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, Universitatea Ovidius Constanţa, 22–23 mai 2014.
(14) D. Stamate, *On numerical semigroup rings and their defining relations*, Seminaire Algebre et geometrie combinatoires, Université de Montpellier 2, Franţa, 27 mai 2014.

(15) D. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, Commutative Algebra Seminar talk, University of Genova, Italia, 3 iunie 2014.
(16) D. Stamate, *Asymptotic properties of numerical semigroups*, Şcoala Naţională de Algebră "Algebraic and Combinatorial Applications of Toric Ideals", 3 septembrie 2014.
(17) D. Stamate, *Flavors of Koszul rings*, Comm. Algebra Seminar talk, University of Nebraska, Lincoln, NE, SUA, 17 septembrie 2014.
(18) D. Stamate, *On intersections of complete intersection ideals*, Comm. Algebra Seminar IMAR and Univ. Bucuresti, 24 februarie 2015.
(19) D. Stamate, *Koszul filtrations*, Comm. Algebra Seminar IMAR and Univ. Bucuresti, 28 aprilie 2015.
(20) D. Stamate, *Koszul filtrations (II). Grobner flags.* , Comm. Algebra Seminar IMAR and Univ. Bucuresti, 5 may 2015.
(21) D. Stamate, *Koszul filtrations (III). Strongly Koszul rings and the ungraded version.*, Comm. Algebra Seminar IMAR and Univ. Bucuresti, 12 may 2015.
(22) D. Stamate, *Koszul rings and the combinatorics of posets.*, Comm. Algebra Seminar IMAR and Univ. Bucuresti, 19 may 2015.
(23) D. Stamate, *Filtrations for Koszul rings*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, Universitatea Ovidius Constanta, Romania, 21 may 2015.
(24) D. Stamate, *On the defining equations of tangent cones of numerical semigroup rings*, Algebra / Algebraic Geometry seminar, University of Sheffield, United Kingdom, 27 may 2015.
(25) D. Stamate, *Ungraded strongly Koszul rings*, The Eighth Congress of Romanian Mathematicians, Iasi, Romania, 26 iunie-1 iulie 2015.
(26) D. Stamate, *On the Koszul property for numerical semigroup rings*, Syzygies in Algebra and Geometry 2015, Busan, Korea, 26-30 august 2015.
(27) D. Stamate, *Koszul filtrations for ungraded rings*, National Algebra School – Interactions of Computer Algebra with Commutative Algebra, Combinatorics and Algebraic Statistics, IMAR, Bucharest, 3 septembrie 2015.
(28) D. Stamate, *On the Koszul property for numerical semigroup rings (I, II)*, Comm. Algebra Seminar IMAR and Univ. Bucuresti, 6 şi 13 octombrie 2015.
(29) D. Stamate, *Quadratic numerical semigroups and the Koszul property*, The first Romanian-Turkish Mathematics Colloquium, Constanta, Romania, 16 octombrie 2015.
(30) D. Stamate, *The structure of quadratic CI semigroups*, Comm. Algebra Seminar IMAR and Univ. Bucuresti, 10 noiembrie 2015.

Alte prezentări ştiinţifice:

(1) M. Cipu, *Algebraic tools for discrete tomography*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. Bucureşti, 18 februarie 2014.
(2) M. Cipu, *Quantic Ehrhart polynomials*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. Bucureşti, 1 aprilie 2014.

(3) D. Stamate, *On the subadditivity problem for maximal shifts in free resolutions, after Herzog et al*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. Bucureşti, 6 mai 2014.
(4) M. Cipu, *A conjectural characterization for complete intersection numerical semigroups*, Seminarul de algebră comutativă IMAR & Univ. Bucureşti, 4 noiembrie 2014.

Alte deplasări sprijinite de acest grant:

(1) Conferinţa GMZ50 în onoarea lui Gunter Ziegler, Freie Universität Berlin, Germania, organizată de Christian Haase, Raman Sanyal, Nadja Wisniewski, 25 mai 2013.
(2) COCOA School, Universität Osnbrück, Germania, organizată de W. Bruns, L. Robbiano, A. Bigatti, 10–14 iunie 2013.
(3) ETMAGT-International Conference Experimental and Theoretical Methods in Algebra, Geometry and Topology, Eforie Nord, 20–24 iunie 2013. (Dumitru Stamate şi Mihai Cipu)
(4) Recent Trends in Algebraic and Geometric Combinatorics, Madrid, 26-30 noiembrie 2013. (Mihai Cipu)
(5) Encuentros de Algebra Computacional y Aplicaciones-EACA, Barcelona, Spania, 17–22 iunie 2014. (Mihai Cipu)
(6) Meeting On Combinatorial Commutative Algebra, MOCCA, Levico Terme, Italia, 8–12 septembrie 2014. (Mihai Cipu)

Discuţiile cu prof. Tim Römer cu ocazia deplasării la Osnbrück în iunie 2013 au favorizat **organizarea** celei de-a 21 ediţii a Şcolii Naţionale de Algebră-"Algebraic methods in Combinatorics" unde prof. Tim. Römer a fost key-note speaker. Am organizat această activitate la IMAR, 2-6 septembrie 2013, împreună cu Viviana Ene, Mihai Epure, Miruna Roşca, Andrei Zarojanu. Comitetul ştiinţific: Dorin Popescu, Tim Römer, Marius Vlădoiu.

În 2014 cu ocazia deplasării la Montpellier l-am invitat pe prof. Jorge Ramirez-Alfonsin să ţină un ciclu de prezentări la Bucureşti la a 22-a editie a Şcolii Naţionale de Algebră "Algebraic and Combinatorial Applications of Toric Ideals". Comitetul ştiinţific: Hara Charalambous, Mihai Cipu (membru în echipa proiectului), Jorge Ramirez Alfonsin. Am organizat această şcoală la IMAR, 1-5 septembrie 2014, împreună cu Florin Ambro, Viviana Ene, Mihai Epure, Miruna Roşca, Marius Vlădoiu şi Andrei Zarojanu.

În 2015 am organizat a 23-a ediţie a Şcolii Naţionale de Algebră -Interactions of Computer Algebra with Commutative Algebra, Combinatorics and Algebraic Statistics, 31 august - 4 septembrie 2015, IMAR, Bucureşti, împreună cu Viviana Ene, Mihai Epure, şi Marius Vlădoiu. Comitet ştiinţific: Gerhard Pfister, Dorin Popescu.

La toate aceste ediţii prezenţa a fost numeroasă, inclusiv mulţi studenţi şi doctoranzi.

Cu ocazia celui de-al 8-lea Congres al Matematicienilor Romani, desfăşurat la Iaşi, România, împreuna cu Dorin Popescu am organizat sesiunea specială "Local rings and homological algebra, dedicated to Prof. Nicolae Radu" , 27 iunie 2015.

References

[1] R. Achilles, L. L. Avramov, *Relations between properties of a ring and of its associated graded ring*, Seminar D. Eisenbud/B. Singh/W. Vogel, Vol. 2, Teubner, Leipzig, 1982, 5–29.

[2] H. Ananthnarayan, Ela Celikbas, Zheng Yang, *Decomposing Gorenstein Rings as Connected Sums*, preprint, arXiv:1406.7600 [math.AC].

[3] H. Bresinsky, *On prime ideals with generic zero $x_i = t^{n_i}$*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** no.2 (1975), 329–332.

[4] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1998.

[5] M. Cimpoeaş, D.I. Stamate, *On intersections of complete intersection ideals*, 11 pp, preprint 2015. Submitted.

[6] A. Conca, E. De Negri, M.E. Rossi, *Koszul algebras and regularity.* Commutative algebra, 285-315, Springer, New York, 2013.

[7] A. Conca, N.V. Trung, G. Valla, *Koszul property for points in projective spaces.* Math. Scand. **89** (2001) no. 2, 201-216.

[8] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, Singular 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2012).

[9] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, 1995.

[10] J. Elias, M.E. Rossi, *Isomorphism classes of short Gorenstein local rings via Macaulays inverse system*,Trans. Amer. Math. Soc., 364 (2012), 4589-4604.

[11] V. Ene, J. Herzog, *Gröbner bases in commutative algebra*, Graduate Studies in Mathematics **130**, American Mathematical Society, 2012.

[12] R. Fröberg, *Koszul algebras* in Advances in commutative ring theory (Fez, 1997), 337–350, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 205, Dekker, New York, 1999.

[13] P. Gimenez, I. Sengupta, H. Srinivasan, *Minimal free resolutions for certain affine monomial curves*, in A. Corso, C. Polini (Eds.), Commutative Algebra and Its Connections to Geometry, PASI 2009, in: Contemp. Math., vol **555**, Amer. Math. Soc., 2011, pp. 87–95.

[14] P. Gimenez, I. Sengupta, H. Srinivasan, *Minimal graded free resolutions for monomial curves defined by arithmetic sequences*, J. Algebra **338** (2013), 294–310.

[15] S. Goto, W. Heinzer, M. Kim, *The leading ideal of a complete intersection of height two. II*, J. Algebra **312** (2007), 709–732.

[16] J. Herzog, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.

[17] J. Herzog, T. Hibi, G. Restuccia, *Strongly Koszul algebras*, Math. Scand. **86** (2000), 161-178.

[18] J. Herzog, D.I. Stamate, *On the defining equations of the tangent cone of a numerical semigroup ring*, J. Algebra **418** (2014), 8–28. arXiv:1308.4644 [math.AC].

[19] J. Herzog, D.I. Stamate, *Quadratic numerical semigroups and the Koszul property*, preprint 23 pp, 2015, arXiv:1510.00935 [math.AC]. Submitted.

[20] A. V. Jayanthan, H. Srinivasan, *Periodic Occurance of Complete Intersection Monomial Curves*, Proc. AMS, **141** (2013), 4199-4208. arXiv:1203.1991 [math.AC].

[21] *MAGMA-Computational Algebra System*, developped by Computational Algebra Group at the University of Sydney, Australia, available at http://magma.maths.usyd.edu.au.

[22] E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Springer GTM, 2005.

[23] I. Peeva, textitGraded Syzygies, Algebra and Applications Ser., Vol 14, Springer 2011.

[24] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic algebras*, University Lecture Series, 37, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[25] V. Reiner, D. I. Stamate, *K*oszul incidence algebras, affine semigroup rings, and Stanley-Reisner ideals, Adv. Math. 224, no. 6 (2010), 2312–2345.

[26] J.D. Sally, *Good embedding dimensions for Gorenstein singularities*, Math. Ann. **249** (1980), 95–106.

[27] I. R. Şafarevici, *Bazele geometriei algebrice*, Ed. St. Encicl., Bucureşti, 1976.

[28] A. Seceleanu, D.I. Stamate, *On Sally semigroup rings*, in preparation.
[29] D. I. Stamate, *Asymptotic properties in the shifted family of a numerical semigroup with few generators*, Semigroup Forum, in press. available online, DOI 10.1007/s00233-015-9724-2.
[30] D. I. Stamate, *On the Cohen-Macaulay property for quadratic tangent cones*, preprint 2015.
[31] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition, Birkäuser Boston, 1996.
[32] T. Vu, *Periodicity of Betti numbers of monomial curves*, J. Algebra **418** (2014), 66–90. arXiv:1304.1659 [math.AC].

30 octombrie 2015
dr. Dumitru I. Stamate

Dumitru I. Stamate, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Bucharest, Str. Academiei 14, Bucharest, Romania, and
Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Research group of the project PN-II-RU-PD-2012-3-0656, P.O.Box 1-764, Bucharest 014700, Romania
E-mail address: dumitru.stamate@fmi.unibuc.ro