

## Raport stiintific

privind implementarea proiectului PN-III-P1-1.1-TE-2021-1633  
in perioada 1ianuarie 2023- 31decembrie 2023

### Rezumatul etapei:

#### Rezultate verificabile prevazute in Planul de realizare:

-in perioada ianuarie – decembrie 2023 au fost finalizate **8 lucrari stiintifice** (trimise la publicare, acceptate sau publicate), peste obiectivul asumat de 3 lucrari trimise la publicare.  
-a fost actualizata periodic pagina web a grantului:  
<http://gta.math.unibuc.ro/~dumi/grantTE-2021-1633/index.html>  
-in aceasta etapa au fost sustinute **14 comunicari stiintifice** la conferinte sau seminarii de specialitate la institute sau universitati de prestigiu, peste obiectivul asumat de 4 comunicari.

Rezultatele verificabile au fost astfel *indeplinite in procent de 100%*.

**Obiectivele stiintifice** principale au fost studiul numerelor Betti si comportamentul la deformari, impreuna cu idealele urma si inelele \*-Gorenstein. Mai precis

- 1) Studiul idealelor urma intr-un inel, legatura cu singularitatile
- 2) Proprietati ale algebrelor de tip Gorenstein
- 3) Deformari ale inelelor torice
- 4) Numere Betti pentru inele Hibi.

Suplimentar, ne-a preocupat obiectivul global al grantului:

- 5) Investigarea de structuri algebrice cu substrat combinatorial.

### Rezumatul activitatilor realizate

In cadrul acestei etape am obtinut urmatoarele rezultate, ce vor fi descrise in sectiunile urmatoare.

-(Obiectivul 1) Am calculat in [1] idealul urma canonica pentru inelele determinantaie, determinand in particular cand acestea sunt nearly Gorenstein.

-(Obiectivul 2) Am introdus clasa inelelor far flung Gorenstein in [2], pentru care am gasit exemple, caracterizari si interferente cu probleme de teoria aditiva a numerelor.

-(Obiectivul 3) Am demonstrat ([9]) relatii de egalitate pentru numerele Betti (numarul de syzygii independenti) la o serie de algebre obtinute prin deformari ale unor inele torice 1-dimensionale (deci care provin din semigrupuri numerice).

-(Obiectivul 3) Am calculat depth-ul si am dat margini pentru Stanley-depth-ul unor clase de ideale monomiale in [4] . In [5] a fost introdus un nou invariant combinatorial (quasi depth) ce ofera margini superioare pentru Stanley depth la un cat de ideale monomiale.

-(Obiectivul 4) Am studiat experimental proprietati de anulare in tabela Betti pentru inelele Hibi.

-(Obiectivul 5) Am studiat invarianti numerici ([7]) si am caracterizat normalitatea ([8]) pentru anumite algebre politopale ce apar ca varietati filogenetice. In [6] sunt date noi formule pentru functia de k-multipartitii cu restrictii.

## Descrierea stiintifica cu punerea in evidenta a rezultatelor

[1] J. Herzog, S. Kumashiro, Dumitru I. Stamate, *The tiny trace ideals of the canonical modules in Cohen-Macaulay rings of dimension one*, **Journal of Algebra** 619 (2023), 626-642, [DOI 10.1016/j.jalgebra.2022.12.026](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.12.026). Preprint [version](#). (Obiectivul 2)

Sunt studiate inele locale Cohen-Macaulay 1-dimensionale pentru care idealul urma al modulului canonic este cat mai mic posibil, i.e. egal cu conductorul extinderii inelului in inchiderea sa intreaga. Numim aceste inele Far-Flung Gorenstein (FFG), pornind de la observatia ca proprietatea Gorenstein e echivalenta cu faptul ca idealul urma canonica sa fie tot inelul. Cercetam proprietatea FFG pentru algebra de endomorfisme a idealului maximal si pentru semigrupuri numerice. Aratam ca solutia problemei Rohrbach din teoria aditiva a numerelor furnizeaza o margine superioara pentru multiplacitatea unui semigrup numeric FFG. Sunt de asemenea studiate modulele reflexive pentru inele FFG.

[2] A. Ficarra, J. Herzog, Dumitru I. Stamate, V. Trivedi, *The canonical trace of determinantal rings*, 10 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#). (Obiectivul 1)

Data  $X$  o matrice  $n \times m$  ( $n \leq m$ ) cu intrari nedeterminate si  $r \leq n$ , prin inelul determinantal  $R_r$  intelegem catul algebrei de polinoame  $K[X]$  la idealul  $r$ -minorilor din  $X$ . Acestea sunt obiecte clasice de studiu in algebra comutativa, geometria algebrica si teoria invariantilor. Aratam ca idealul urma canonica pentru  $R_r$  este generat de puterea  $(m-n)$  a idealului  $(r-1)$ -minorilor lui  $X$ . In particular, locusul singular si locusul Gorenstein coincid pentru  $R_r$ , iar proprietatea nearly Gorenstein poate fi usor identificata. Sunt date conditii suficiente pentru ca idealul urma sa specializeze. Ca aplicatie, determinam idealul urma canonica pentru un idel Cohen-Macaulay  $R$  de codimensiune 2 si care e generic Gorenstein. Aratam ca daca idealul de definitie  $I$  al lui  $R$  este generat de  $n$  elemente, atunci idealul urma canonica al lui  $R$  este generat de minorii de ordin  $(n-2)$  ai matricei Burch pentru  $I$ .

[3] Mircea Cimpoeas, Adrian Gabriel Neacsu, *Geometrical isomorphisms between categories of fuzzy coverings and fuzzy partitions*, *Fuzzy Sets and Systems* 461 (2023), 108483, [DOI 10.1016/j.fss.2023.02.014](https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.02.014). Preprint [version](#). (Obiectivul 5)

Fie *Covering* categoria acoperirilor fuzzy, iar *Partition* categoria partițiilor fuzzy. Este construit geometric un izomorfism între *Partition* și o subcategorie plină din *Covering*, care poate fi apoi folosit la a determina bijectii între partiții fuzzy și acoperiri fuzzy cu un număr finit de mulțimi fuzzy. De asemenea, este stabilit un izomorfism între *Covering* $[n]$ , categoria acoperirilor cu  $n$  mulțimi fuzzy, și o subcategorie din *Partition*, ale cărei obiecte sunt  $n$ -mulțimile fuzzy ce satisfac anumite condiții.

[4] Silviu Balanescu, Mircea Cimpoeas, *Depth and Stanley depth of powers of the path ideal of a path graph*, 16 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#). (Obiectivul 3)

Notam cu  $I$  idealul monomial al drumurilor de lungime  $m$  dintr-un graf de tip drum (path) de lungime  $n$ , in inelul de polinoame  $S$  cu  $n$  nedeterminate. Este data o formula explicita pentru  $\text{depth}(I^t)$ , cu  $t$  arbitrar, si sunt prezentate margini pentru Stanley depth de  $I^t$  si  $S/I^t$ .

[5] Silviu Balanescu, Mircea Cimpoeas, Christian Krattenthaler, *On the quasi depth of monomial ideals*, 22 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#). (Obiectivul 3)

In aceasta lucrare este introdus un nou invariant, numit quasi depth, asociat unui cat de ideale monomiale intr-un inel de polinoame. Acest invariant furnizeaza o margine superioara de natura combinatoriala pentru Stanley depth. Ca aplicatie, este tratat cazul idealelor Veronese libere de patrute generate in grad  $m$ .

[6] Mircea Cimpoeas, Alexandra Teodor, *A note on the restricted  $k$ -multipartition function*, UPB Scientific Bulletin-Series A, Volume 85, Issue 3, 2023, [Page 11-18](#). (Obiectivul 5)

Fie  $a = (a_1, \dots, a_r)$  un sir de intregi pozitivi si  $k > 1$  un intreg. Este studiata functia  $p_{k,a}(n)$  ce numara  $k$ -multipartitiile cu restrictii asociate cu  $a$  si  $k$ . Furnizam noi formule pentru  $p_{k,a}(n)$ , partea ondulatorie, si partea polinomiala  $P_{k,a}(n)$ . De asemenea, gasim o margine inferioara pentru densitatea multimii  $\{n \geq 0 : p_{k,a}(n) \not\equiv 0 \pmod{m}\}$ , unde  $m > 1$  este numar intreg.

[7] Rodica Dinu, Martin Vodicka, *Phylogenetic degrees for claw trees*, 22 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#). (Obiectivul 5)

Modelele bazate pe grupuri apar in statistica algebrica drept modele matematice pentru procese evolutive din biologie, cu accent pe studiul mutatiilor genomului. In aceasta lucrare suntem interesati sa calculam gradul algebraic (multiplicitatea) pentru varietatile filogenetice asociate acestor modele. Numim grad filogenetic acest invariant, pe care il determinam pentru varietatea  $X_{G,n}$  atunci cand grupul  $G$  este unul dintre  $Z_2, Z_2 \times Z_2, Z_3$ , iar graful este un arbore de tip gheara ( $n$ -claw tree). Cum aceste varietati sunt torice, pentru a calcula gradul lor filogenetic e necesar sa calculam volumul politopului asociat  $P_{G,n}$ . Sunt furnizate formule exacte pentru toate aceste cazuri.

[8] Rodica Dinu, Martin Vodicka, *Classification of normal phylogenetic varieties for tripods*, 13 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#). (Obiectivul 5)

In aceasta lucrare este data o clasificare complete a varietatilor filogenetice normale ce provin din tripozi, sau mai general din arbori trivalenti. Pentru  $G$  grup abelian si  $T$  arbore trivalent arbitrar, se arata ca varietatea filogenetica asociata  $X_{G,T}$  este normal proiectiva (projectively normal) daca si numai daca  $G$  este unul dintre  $Z_2, Z_3, Z_2 \times Z_2, Z_4, Z_5, Z_7$ .

## Activitati stiintifice generate de proiect

### Lista lucrarilor elaborate

- 1) J. Herzog, S. Kumashiro, Dumitru I. Stamate, *The tiny trace ideals of the canonical modules in Cohen-Macaulay rings of dimension one*, **Journal of Algebra** 619 (2023), 626-642, [DOI 10.1016/j.jalgebra.2022.12.026](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.12.026). Preprint [version](#).
- 2) A. Ficarra, J. Herzog, Dumitru I. Stamate, V. Trivedi, *The canonical trace of determinantal rings*, 10 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#).

- 3) Mircea Cimpoeas, Adrian Gabriel Neacsu, *Geometrical isomorphisms between categories of fuzzy coverings and fuzzy partitions*, Fuzzy Sets and Systems 461 (2023), 108483, [DOI 10.1016/j.fss.2023.02.014](https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.02.014). Preprint [version](#).
- 4) Silviu Balanescu, Mircea Cimpoeas, *Depth and Stanley depth of powers of the path ideal of a path graph*, 16 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#).
- 5) Silviu Balanescu, Mircea Cimpoeas, Christian Krattenthaler, *On the quasi depth of monomial ideals*, 22 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#).
- 6) Mircea Cimpoeas, Alexandra Teodor, *A note on the restricted  $k$ -multipartition function*, UPB Scientific Bulletin-Series A, Volume 85, Issue 3, 2023, [Page 11-18](#).
- 7) Rodica Dinu, Martin Vodicka, *Phylogenetic degrees for claw trees*, 22 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#).
- 8) Rodica Dinu, Martin Vodicka, *Classification of normal phylogenetic varieties for tripods*, 13 pp. Trimisa la publicare. Preprint [version](#).

### Diseminarea rezultatelor

1. Rodica Dinu, *Non-simple polyominoes of Koenig type*, [FMI-IMAR Commutative Algebra Seminar](#), Bucuresti, 10 ianuarie 2023.
2. Rodica Dinu, *Gorenstein property for phylogenetic trivalent trees*, Workshop on [Combinatorial and Algebraic Aspects on Lattice Polytopes](#), Kwansei Gakuin University, Hyogo, Japan, 21 februarie 2023.
3. Mircea Cimpoeas, *Depth and Stanley depth of powers of some classes of monomial ideals*, [FMI-IMAR Commutative Algebra Seminar](#), Bucuresti, 7 martie 2023.
4. Dumitru Stamate, *Rings with tiny canonical trace ideals*, [FMI-IMAR Commutative Algebra Seminar](#), Bucuresti, 25 aprilie 2023.
5. Dumitru Stamate, *Progress on canonical trace ideals*, [Algebra Seminar](#), University of Pisa, Italia, 17 mai 2023.
6. Mircea Cimpoeas, *On the monoid algebra associated to the monomial characters of a finite group*, [Workshop for Young Researchers in Mathematics – 12th Edition](#), Universitatea “Al.I. Cuza” Iasi, 19 mai 2023.
7. Mircea Cimpoeas, *On the quasi depth of monomial ideals*, [The 28th National School on Algebra: Interactions between Algebra and Geometry in Bucharest](#), Universitatea din Bucuresti, Bucuresti, Romania.
8. Mircea Cimpoeas, *On almost monomial groups*, [10<sup>th</sup> Congress of Romanian Mathematicians](#), Pitesti, 4 iulie 2023.
9. Rodica Dinu, *On varieties coming from phylogenetic group-based models*, Special Session on Homological Methods in Commutative Algebra, [10<sup>th</sup> Congress of Romanian Mathematicians](#), Pitesti, 4 iulie 2023.
10. Dumitru Stamate, *Progress on canonical trace ideals*, [10<sup>th</sup> Congress of Romanian Mathematicians](#), Pitesti, 4 iulie 2023.
11. Dumitru Stamate, *Canonical trace ideals and Gorenstein related properties*, [Algebra and Gemetry Seminar](#), University of Genova, Italia, 19 septembrie 2023.
12. Teodor Grigorescu, *Far flung Gorenstein semigroups of small type*, [FMI-IMAR Commutative Algebra Seminar](#), Bucuresti, 3 octombrie 2023.
13. Mircea Cimpoeas, *Quasi depth for monomial ideals, (I), (II)*, [FMI-IMAR Commutative Algebra Seminar](#), Bucuresti, 10, 17 octombrie 2023.
14. Mircea Cimpoeas, *On the action of the Hecke group  $H(2)$  on subsets of quadratic fields*, [Number Theory Seminar](#), IMAR, Bucuresti, Romania, 22 noiembrie 2023.

## Stagii de documentare si de cercetare finantate de grant

- Dumitru Stamate la University of Duisburg-Essen, Campus Essen, Germany, mai 2023 (2 saptamani). Gazda: [Prof. Juergen Herzog](#).
- Dumitru Stamate la University of Genova, Italia, septembrie 2023 (2 saptamani). Gazda: [Dr. Francesco Strazzanti](#).

## Colaboratori, specialisti externi invitati

- [Francesco Navarra](#), de la University of Messina, Italia, 16 martie-3 aprilie 2023.
- [Alexandra Seceleanu](#) de la University of Nebraska, Lincoln, USA a vizitat echipa intre 23-29 iunie 2023. A sustinut un ciclu de 4 expuneri pe tema *Symbolic powers in algebra and geometry* adresate membrilor echipei, cat si participantilor la [28<sup>th</sup> National School on Algebra-Interactions between Algebra and Geometry in Bucharest](#), 24-28 iunie 2023, Universitatea din Bucuresti, Bucuresti, Romania.
- [Yairon Cid Ruiz](#), de la Katholieke Universiteit, Leuven, Belgia a vizitat echipa intre 23-28 iunie 2023. A sustinut un ciclu de 4 expuneri intitulate *Some lectures on multidegrees* adresate membrilor echipei, cat si participantilor la [28<sup>th</sup> National School on Algebra-Interactions between Algebra and Geometry in Bucharest](#), 24-28 iunie 2023, Universitatea din Bucuresti, Bucuresti, Romania.
- [Antonino Ficarra](#), University of Messina, Italia, a vizitat echipa intre 23-29 iunie 2023. Pe 26 iunie 2023 a sustinut prezentarea cu titlul *The toric ring of 1-dimensional simplicial complexes* adresata adresate membrilor echipei, cat si participantilor la [28<sup>th</sup> National School on Algebra-Interactions between Algebra and Geometry in Bucharest](#), 24-28 iunie 2023, Universitatea din Bucuresti, Bucuresti, Romania.
- [Max Kolbl](#) de la University of Osaka, Japonia, a vizitat echipa in intervalul 19-24 august 2023. Pe 22 august 2023 a sustinut prelegerea *Nearly Gorenstein Polytopes* in cadrul [Seminarului de Algebra Comutativa si Combinatorica](#) FMI-IMAR.

## Alte activitati desfasurate de membrii echipei

- D. Stamate impreuna cu Viviana Ene, Cristodor Ionescu si Marius Vladoiu au organizat the [28<sup>th</sup> National School on Algebra-Interactions between Algebra and Geometry in Bucharest](#), 24-28 iunie 2023, Universitatea din Bucuresti, Bucuresti, Romania.
- D. Stamate impreuna cu Prof. Dorin Popescu au organizat Sesiunea speciala ["Homological Methods in Commutative Algebra"](#) la 10<sup>th</sup> Congress of Romanian Mathematicians, Universitatea din Pitesti, 4 iulie 2023.
- A 12-a editie a [Workshop for Young Researchers in Mathematics](#), 18-19 mai 2023, a fost organizata la Universitatea "Al. I. Cuza" din Iasi de catre Cristina Anghel, **Rodica Dinu**, Alexandra Melnig si Remus Radu. R. Dinu si C. Anghel au organizat impreuna Sectiunea Algebra, Geometry, Number Theory & Topology.
- Incepand cu 25 aprilie 2023 a fost angajat (prin concurs) Teodor Grigorescu pe pozitia vacanta de student doctorand.
- Gabriela Petcu a sustinut lucrarea de disertatie in iulie 2023 si a inceput studiile doctorale sub coordonarea directorului de proiect la Universitatea din Bucuresti. Subiectul lucrarii si al documentarii din cadrul programului de doctorat au stat la baza a trei expuneri in [FMI-IMAR Commutative Algebra](#) Seminar intitulate *Cohen-*

*Macaulay binomial edge ideals of small graphs, after Bolognini et al.(I), (II)* (pe 7 si 11 aprilie 2023), respectiv *A combinatorial characterization of  $S_2$  binomial edge ideals, after Bolognini et al.* (pe 7 noiembrie 2023).

- Pagina web a grantului a fost actualizata periodic.
- Au fost stabilite directiile de concentrare pentru etapa urmatoare.

Director Proiect,

Conf. Dr. Dumitru I. Stamate